

De la constante inf-sup au problème de Cosserat, en passant par la quête du carré

Monique DAUGE et Martin COSTABEL

avec aussi

Christine BERNARDI, Vivette GIRAULT et Driss YACOUBI

4ème Journée Equipe Analyse Numérique

23.10.2008

La constante inf-sup

- Ω domaine (connexe) borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3)
- $L_0^2(\Omega)$ espace L^2 fonct. scalaires à moyenne nulle. Norme $|\cdot|_{0,\Omega}$
- $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ espace \mathbf{H}^1 fonct. vectorielles à trace nulle. Semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$

La constante inf-sup

$$[B1] \quad \beta(\Omega) = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega} |q|_{0,\Omega}}$$

On peut éliminer le sup dans la constante inf-sup

La norme $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ vectorielle est définie par $\|\varphi\|_{-1,\Omega} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\langle \varphi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}}$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, elle est équivalente à sa semi-norme

$$|\varphi|_{-1,\Omega} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\langle \varphi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}}$$

Et pour $\varphi = \nabla q$:

$$|\nabla q|_{-1,\Omega} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\langle \nabla q, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}}$$

La constante inf-sup et la norme H^{-1}

[B2]

$$\beta(\Omega) = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{|\nabla q|_{-1,\Omega}}{|q|_{0,\Omega}}$$

Relation avec le lemme de Lions

Lemme [Nečas 1965]

Si Ω est Lipschitz, il existe une constante α telle que pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$

$$|q|_{0,\Omega} \leq \alpha |\nabla q|_{-1,\Omega}$$

Soit $\alpha(\Omega)$ la plus petite constante α :

$$\alpha(\Omega) = \sup_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{|q|_{0,\Omega}}{|\nabla q|_{-1,\Omega}} \implies \boxed{\beta(\Omega) = \frac{1}{\alpha(\Omega)}}$$

Soit \mathbf{V}_{div} le noyau de la divergence : $\mathbf{V}_{\text{div}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0\}$.

On a les équivalences entre 1, 2, 3 et 4:

- ① ∇ est injectif à image fermée : $L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$
- ② div est surjectif : $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$
- ③ div est un isomorphisme : $\mathbf{V}_{\text{div}}^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$
- ④ $\beta(\Omega) > 0$.

La constante inf-sup peut être nulle

Dimension 2 : variable $\mathbf{x} = (x, y)$.

Contre-exemple [Tartar 1999]

Si Ω a une pointe cuspidale d'équation $0 < y < x^\delta$ avec $\delta > 1$, alors

div n'est pas surjectif $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$.

Donc, pour un tel domaine, $\beta(\Omega) = 0$.

Preuve: Considérer $q \in L_0^2(\Omega)$ de la forme $q(x, y) = x^\lambda$ près de $(0, 0)$.

$$(1) \quad q \in L^2(\Omega) \iff \lambda > -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$$

Si $q = \operatorname{div} \mathbf{w}$ avec $\mathbf{w} = (u, v) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, en considérant les fonctions

$$g(x) = \int_0^{x^\delta} q(x, y) dy \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^{x^\delta} u(x, y) dy$$

on trouve que $g = h'$. Donc $h(x) = x^{\lambda+\delta+1}(\lambda + \delta + 1)^{-1}$.

D'autre part on montre que $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ implique que $x^{-3\delta} h^2(x)$ est L^1 près de 0. Donc

$$(2) \quad \lambda > -\frac{3}{2} + \frac{\delta}{2}$$

Or, dès que $\delta > 1$, (1) n'implique pas (2). Ce qui achève la preuve.

$\beta(\Omega)$ est > 0 pour les unions finies de Lipschitz

Théorème [Crouzeix 2003]

Si $\Omega = \cup_{\text{finie}} \Omega_j$ avec Ω_j Lipschitz, alors $\beta(\Omega) > 0$.

Un résultat plus facile à démontrer

Théorème

Si $\bar{\Omega} = \cup_{\text{finie}} \bar{\Omega}_j$ avec les Ω_j Lipschitz et 2 à 2 disjoints, alors $\beta(\Omega) > 0$.

Preuve: La divergence est surjective de

$$\oplus_j \mathbf{H}_0^1(\Omega_j) \rightarrow \oplus_j L_0^2(\Omega_j)$$

Or $\oplus_j L_0^2(\Omega_j)$ est un sous-espace de codimension finie de $L_0^2(\Omega)$.

Et $\oplus_j \mathbf{H}_0^1(\Omega_j)$ est un sous-espace de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Donc div est à image fermée de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ dans $L_0^2(\Omega)$. Donc

$$\text{div}(\mathbf{H}_0^1(\Omega)) = \ker(\nabla)^\perp = L_0^2(\Omega)$$

puisque Ω est connexe.

Comment varie la constante inf-sup

- ① Si Ω est un **polygone avec fissures** (mais connexe) $\beta(\Omega) > 0$.
 Mais si $(\Omega_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de domaines comportant
 une **fissure qui se referme** quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
 le partageant en 2 composantes connexes à la limite, alors

$$\beta(\Omega_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Preuve: Utiliser la formule [B2] avec le gradient en norme \mathbf{H}^{-1} pour q constant par morceaux.

- ② Plus généralement, $\beta(\Omega) \rightarrow 0$ dès qu'il y a un **petit passage** qui se referme entre 2 parties d'aire > 0 .
- ③ $\beta(\Omega)$ est **invariante par homothéties et translations**.
 Elle ne dépend que de la forme du domaine.
- ④ $\beta(\Omega)$ **n'est pas invariante par transformations affines** en général.
 On va voir que l'aspect ratio joue un grand rôle:
- angles polygonaux
 - ellipses
 - rectangles

Lien avec l'opérateur D de [Crouzeix 1997]

$$D : L_0^2(\Omega) \longrightarrow L_0^2(\Omega) \\ q \longmapsto \operatorname{div} \Delta^{-1} \nabla q$$

Ici Δ^{-1} est l'inverse du Laplacien $\Delta : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

L'opérateur D est auto-adjoint borné positif.

La base $\sigma(\Omega)$ de son spectre est donnée par le quotient de Rayleigh

$$\sigma(\Omega) = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{\langle Dq, q \rangle_\Omega}{\langle q, q \rangle_\Omega}$$

Lemme

[B3]

$$\sigma(\Omega) = \beta(\Omega)^2$$

Preuve: Pour $q \in L_0^2(\Omega)$ soit \mathbf{w} la solution du pb de Dirichlet

$$\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} q$$

Donc en particulier, $\langle \operatorname{div} \mathbf{w}, q \rangle = \langle \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{w} \rangle$.

Comme $\mathbf{w} = \Delta^{-1} \nabla q$, on a $\langle Dq, q \rangle = \langle \operatorname{div} \mathbf{w}, q \rangle$, et [B3] en découle.

Spectre discret et essentiel

Selon les propriétés de $D - \sigma\mathbb{I}$ opérant $L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$:

- 1 **Spectre de D** : Ensemble des σ t.q. $D - \sigma\mathbb{I}$ n'est pas inversible.
- 2 **Valeur propre de D** : Réel σ t.q. $\ker(D - \sigma\mathbb{I}) \neq \{0\}$.
- 3 **Spectre discret**: Ens. des valeurs propres isolées de multiplicité finie.
- 4 **Spectre essentiel**: Le reste du spectre.
C'est l'ensemble des σ t.q. $D - \sigma\mathbb{I}$ n'est pas Fredholm^(*).

(*) **Rappel**: Opérateur Fredholm = Opérateur dont le noyau est de dimension finie, et l'image fermée de codimension finie.

Warning: Pas de compacité, ni pour D ni pour D^{-1} .

Le spectre de Cosserat

Définition [Cosserat & Cosserat 1898]

Soit pour $\sigma \in \mathbb{R}$, l'opérateur A_σ

$$\begin{aligned} A_\sigma : \mathbf{H}_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \sigma \Delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

Son spectre est l'ensemble des σ pour lesquels A_σ n'est pas inversible.

Comme pour les opérateurs auto-adjoints, on distingue

- 1 **Valeur propre** : Réel σ t.q. $\ker(A_\sigma) \neq \{0\}$.
- 2 **Spectre discret** : Ensemble des v.p. isolées de multiplicité finie.
- 3 **Spectre essentiel** : Le reste du spectre.
C'est l'ensemble des σ t.q. A_σ n'est pas Fredholm.

Lemme

Le spectre Cosserat est contenu dans l'intervalle $[0, 1]$.

Preuve: Considérer la forme bilinéaire $\sigma \langle \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle$

Cosserat vs. Crouzeix, i.e. A_σ vs. $D - \sigma \mathbb{I}$

Lemme (Correspondance entre noyaux)

- Si (σ, q) est une paire propre de D ,
alors $(\sigma, \Delta^{-1} \nabla q)$ est une paire propre Cosserat.
- Si (σ, \mathbf{u}) est une paire propre Cosserat avec $\sigma \neq 0$,
alors $(\sigma, \operatorname{div} \mathbf{u})$ est une paire propre de D .

Preuve: Calcul direct.

Lemme (Correspondance entre images)

On suppose $\beta(\Omega) > 0$.

- Soit $\varphi \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Alors

$$\operatorname{div} \Delta^{-1} \varphi \in \operatorname{im}(D - \sigma \mathbb{I}) \implies \varphi \in \operatorname{im} A_\sigma.$$

- Soit $p \in L_0^2(\Omega)$. Alors

$$\Delta \operatorname{div}^{-1} p \in \operatorname{im} A_\sigma \implies p \in \operatorname{im}(D - \sigma \mathbb{I}).$$

Preuve: Calcul direct.

Cosserat vs. Crouzeix, i.e. A_σ vs. $D - \sigma \mathbb{I}$: synthèse

- $\mathfrak{G}_{\text{dis}}(D)$ spectre discret de D
- $\mathfrak{G}_{\text{dis}}(A)$ spectre discret Cosserat
- $\mathfrak{G}_{\text{ess}}(D)$ spectre essentiel de D
- $\mathfrak{G}_{\text{ess}}(A)$ spectre essentiel Cosserat

Théorème

On suppose que $\beta(\Omega) > 0$. Soit $\sigma \neq 0$. Alors

$$\sigma \in \mathfrak{G}_{\text{dis}}(A) \iff \sigma \in \mathfrak{G}_{\text{dis}}(D)$$

et

$$\sigma \in \mathfrak{G}_{\text{ess}}(A) \iff \sigma \in \mathfrak{G}_{\text{ess}}(D)$$

$\sigma = 0$ et $\sigma = 1$ sont dans $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(A)$ [Mikhlin 1973]

$$\mathbf{u} \in \ker A_0 \Rightarrow \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

$$\mathbf{u} \in \ker A_1 \Rightarrow \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle - \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0.$$

Lemme

$$\ker A_0 = \mathbf{V}_{\text{div}} \quad \text{et} \quad \ker A_1 = \mathbf{V}_{\text{rot}} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \}.$$

Donc 0 et 1 sont dans le spectre essentiel Cosserat.

Ça se retrouve par *calcul symbolique*: Symbole de A_σ (ici $d = 2$)

$$-\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} (\xi_1 \quad \xi_2) + \sigma \begin{pmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma|\boldsymbol{\xi}|^2 - \xi_1^2 & -\xi_1\xi_2 \\ -\xi_1\xi_2 & \sigma|\boldsymbol{\xi}|^2 - \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $\sigma(\sigma - 1)|\boldsymbol{\xi}|^2$.

Donc $\sigma = 0$ et $\sigma = 1$ sont les seules valeurs pour lesquelles A_σ n'est pas un système elliptique.

$$A_\sigma \text{ n'est pas Fredholm si } \sigma \in \{0, 1\}$$

$\sigma = \frac{1}{2}$ est dans dans $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(A)$ [Mikhlin 1973]

Pour $\sigma \neq 0$ et $\neq 1$ on regarde si *les conditions de Dirichlet recouvrent* A_σ :
On considère pour $\xi > 0$ fixé les solutions $t \mapsto \mathbf{u}(t) = (u, v)(t)$ du système

$$A_\sigma(\frac{1}{i}\partial_t, \xi)\mathbf{u}(t) = 0, \quad t \geq 0$$

qui soient *exponentiellement décroissantes*. Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \partial_t^2 + \sigma(-\partial_t^2 + \xi^2) & i\xi\partial_t \\ i\xi\partial_t & -\xi^2 + \sigma(-\partial_t^2 + \xi^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0.$$

On trouve un espace $\mathfrak{K}(\xi)$ engendré par les 2 solutions indépendantes

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\xi t} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \xi t e^{-\xi t} + (\frac{1}{2} - \sigma) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\xi t}$$

Par déf., Dirichlet recouvre ssi la trace: $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}(0)$ est un iso $\mathfrak{K}(\xi) \rightarrow \mathbb{C}^2$.
Donc Dirichlet recouvre A_σ ssi $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

$A_\sigma \text{ n'est pas Fredholm si } \sigma = \frac{1}{2}$

Domaines réguliers, domaines polygonaux

On a obtenu dans le cas d'un domaine régulier:

Théorème

Si Ω est un domaine à bord régulier, $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(A) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

De plus $D - \frac{1}{2}\mathbb{I}$ est régularisant: Continu $L_0^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ [Crouzeix 1997].

Ω polygone ($d = 2$). Etude près d'un coin \mathbf{c} d'ouverture $\omega \in (0, 2\pi]$.

Les singularités sont celle du *système de Lamé* L avec coeff. $\check{\lambda}$ et $\check{\mu}$ car

$$A_\sigma = L_{\check{\lambda}, \check{\mu}} \quad \text{avec} \quad \check{\lambda} = \sigma + 1 \quad \text{et} \quad \check{\mu} = -\sigma.$$

Coord. polaires (r, θ) centrées en \mathbf{c} . Les *singularités* ont la forme $r^\lambda \mathbf{U}(\theta)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est solution de *l'équation discriminante*

$$\left(\frac{\sin \lambda \omega}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\check{\lambda} + \check{\mu}}{\check{\lambda} + 3\check{\mu}}\right)^2 \sin^2 \omega, \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{\sin \lambda \omega}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 - 2\sigma}\right)^2 \sin^2 \omega.$$

Spectre essentiel en présence de coins

Équation discriminante de A_σ

$$(\mathcal{D}) \quad (1 - 2\sigma) \frac{\sin \lambda \omega}{\lambda} = \pm \sin \omega.$$

Théorème

A_σ Fredholm ssi l'équation (\mathcal{D}) n'a pas racines sur la droite $\Re \lambda = 0$.

En posant $z = \lambda \omega$, on ré-écrit (\mathcal{D}) :

$$(1 - 2\sigma) \frac{\sin z}{z} = \pm \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

On trouve:

- (\mathcal{D}) a des racines sur la droite $\Re \lambda = 0$ ssi $|1 - 2\sigma| \omega \leq |\sin \omega|$
- Si $|1 - 2\sigma| \omega > |\sin \omega|$, il y a une racine $\lambda \in (0, 1)$

Théorème [Costabel & Dauge 2000]

Ω polygonal avec coin(s) d'ouverture ω .

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(A) = \{0\} \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{|\sin \omega|}{2\omega}, \frac{1}{2} + \frac{|\sin \omega|}{2\omega} \right] \cup \{1\}$$

Spectre essentiel en présence de coins, la figure

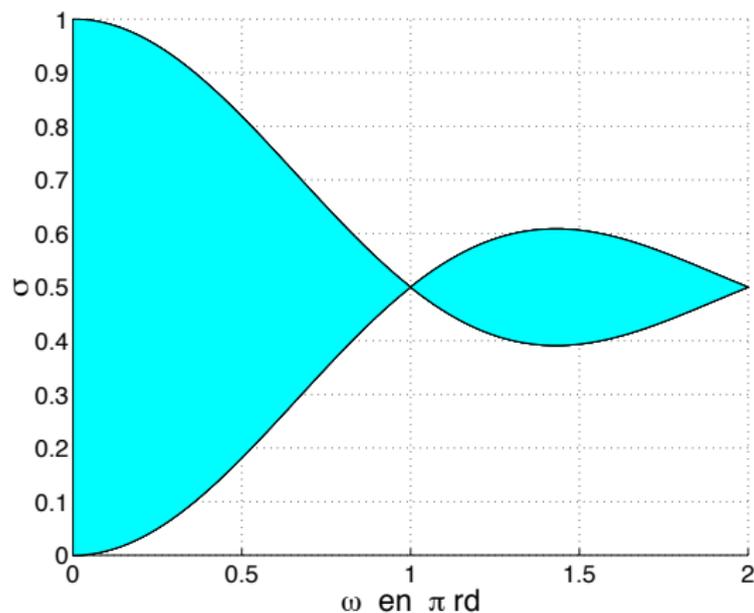


Figure: Le spectre essentiel σ en fonction de l'ouverture ω

Exposants de singularité dans un polygone

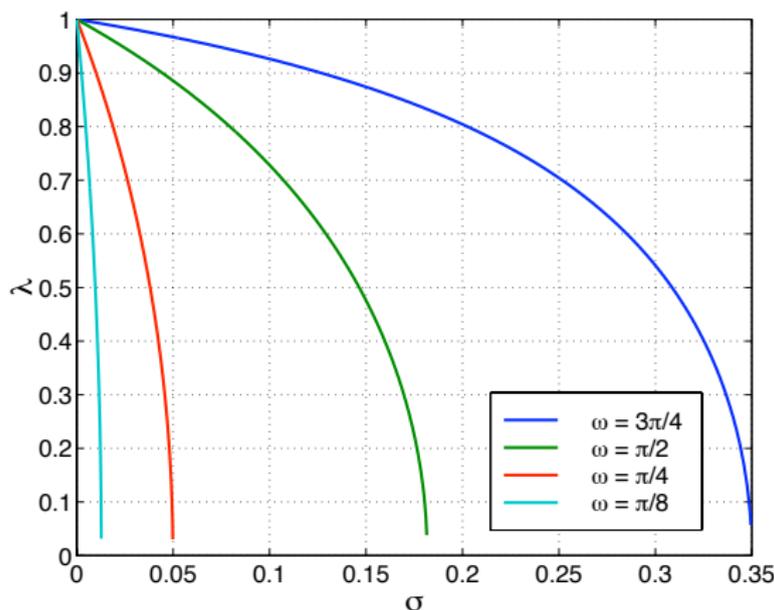
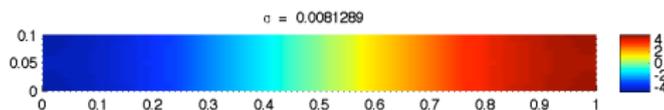


Figure: Exposants de singularité λ en fonction de σ pour 4 ouvertures ω

Les solutions ne sont jamais génériquement dans $H^2(\Omega)$.

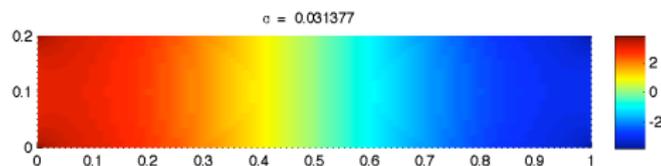
Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.1]$

$$\sigma_{\text{approx}} = 0.0081$$

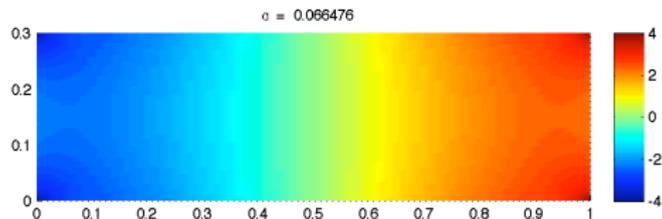
Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.2]$

$$\sigma_{\text{approx}} = 0.0314$$

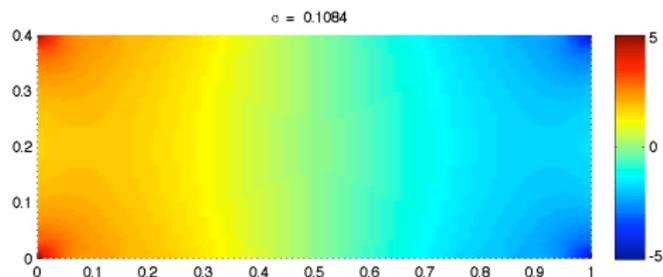
Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.3]$

$$\sigma_{\text{approx}} = 0.0665$$

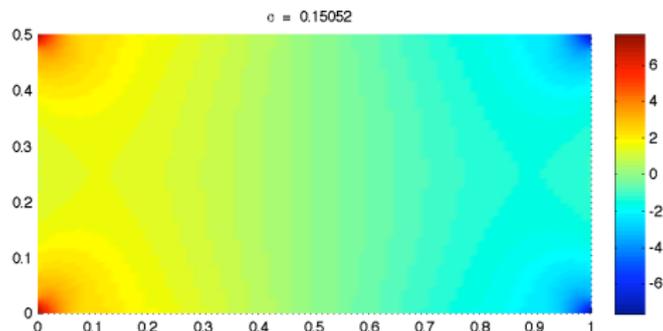
Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.4]$

$$\sigma_{\text{approx}} = 0.1084$$

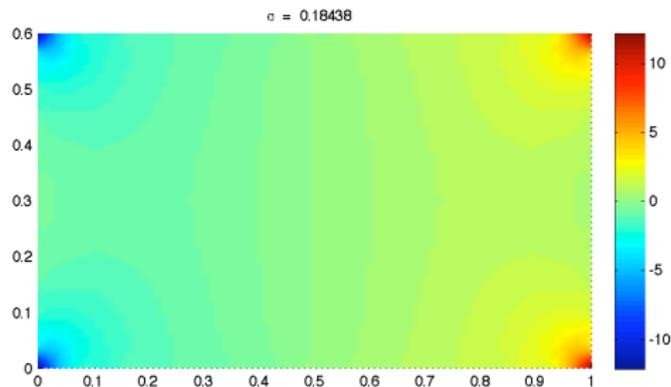
Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.5]$

$$\sigma_{\text{approx}} = 0.1505$$

Les singularités sont plus fortes quand σ augmente



Premier vecteur propre pour l'opérateur D dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 0.6]$
 $\sigma_{\text{approx}} = 0.1844$. (Le spectre essentiel pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ commence à 0.1817).

Formules explicites

- En dimension 2 si $\frac{1}{2} - a \in \mathfrak{S}(A)$, alors $\frac{1}{2} + a \in \mathfrak{S}(A)$.
Preuve. $(u, v) \mapsto (-v, u)$ fait passer de div à rot et de ∇ à rot.
- Si Ω est le disque ($d = 2$), $\mathfrak{S}(A) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ainsi $\mathfrak{S}_{\text{dis}}(A) = \emptyset$.
- Si Ω est la boule ($d = 3$), $\mathfrak{S}_{\text{dis}}(A) = \{\frac{\ell}{2\ell+1} : \ell \geq 1\}$.
- Généralement, pour la boule en dimension d , les valeurs propres $\neq 1$ de D sont associée à des vecteurs propres qui sont des polynômes harmoniques et sont égales à $\frac{\ell}{2\ell+d-2}$ [Crouzeix 1997].
- Si Ω est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{\text{ch}^2 \rho} + \frac{y^2}{\text{sh}^2 \rho} \leq 1$ (aspect ratio $\varepsilon = \text{th } \rho$)

$$\mathfrak{S}_{\text{dis}}(A) = \{\sigma_\ell(\rho), 1 - \sigma_\ell(\rho) : \ell \geq 1\}$$

avec

$$\sigma_\ell(\rho) = \frac{1}{2} - \frac{(\ell+1) \text{sh } 2\rho}{\text{sh } 2(\ell+1)\rho}$$

Si $\rho \rightarrow \infty$, alors $\varepsilon \rightarrow 1$ et l'ellipse tend vers le disque et $\sigma_\ell(\rho) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Si $\rho \rightarrow 0$, alors $\varepsilon \simeq \rho$ et $\sigma_\ell(\rho) = \varepsilon^2 \frac{\ell(\ell+2)}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$.

Ellipses

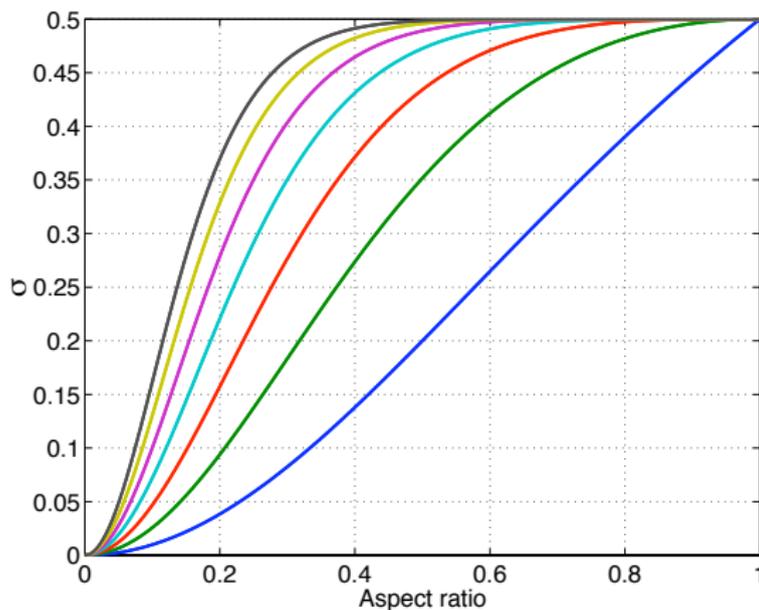


Figure: 7 premières valeurs propres σ_ℓ de l'ellipse en fonction de l'aspect ratio ε

Et le carré?

Comme $\omega = \frac{\pi}{2}$, on connaît son spectre essentiel:

$$\mathfrak{G}_{\text{ess}}(\mathbf{A}) = \{0\} \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right] \cup \{1\} \simeq \{0\} \cup [0.1817, 0.8183] \cup \{1\}.$$

D'où les bornes sup: $\sigma(\Omega) \leq 0.1817$ et $\beta(\Omega) \leq 0.42625$.

Théorème [Horgan & Payne 1983]

Ω étoilé / origine. Pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, soit $\gamma(\mathbf{x}) \in [0, \frac{\pi}{2})$ l'angle entre \mathbf{x} et la normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ à $\partial\Omega$ et:

$$\gamma = \gamma(\Omega) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \gamma(\mathbf{x}).$$

Alors

$$\sigma(\Omega) \geq \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 - \sin \gamma}{2}.$$

- **Carré**: $\gamma(\Omega) = \frac{\pi}{4}$. Minorant $\sigma(\Omega) \geq 0.14644$ et $\beta(\Omega) \geq 0.38268$.
- **n -gone régulier**: $\gamma(\Omega) = \frac{\pi}{n}$. Minorant $\sigma(\Omega) \geq \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right)$.
- **Rectangle** Ω_ε d'aspect ratio ε : $\gamma(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } \varepsilon$. D'où

$$\sigma(\Omega_\varepsilon) \geq \sin^2 \left(\frac{\text{arctg } \gamma}{2} \right) = \frac{\varepsilon^2}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Majorant pour le rectangle

Rectangle Ω d'aspect ratio ε . On utilise le **quotient de Rayleigh**

$$\sigma(\Omega) = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \frac{\langle Dq, q \rangle_\Omega}{\langle q, q \rangle_\Omega}$$

avec $q \in L_0^2(\Omega)$ bien choisi.

Pour $\Omega = (0, \pi) \times (-\rho, \rho)$, on prend $q(x, y) = -\cos x$.

D'où $\nabla q = (\sin x, 0)^\perp$ et on calcule $\mathbf{w} = (w_x, w_y) = \Delta^{-1} \nabla q$:

$$w_x(x, y) = \sin x \left(\frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch} \rho} - 1 \right) \quad \text{et} \quad w_y = 0$$

On trouve

$$\sigma(\Omega) \leq \frac{\langle Dq, q \rangle_\Omega}{\langle q, q \rangle_\Omega} = \frac{\int_{-\rho}^{\rho} (1 - \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch} \rho}) dy}{\int_{-\rho}^{\rho} dy} = 1 - \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho \operatorname{ch} \rho}$$

avec $\rho = \frac{\varepsilon \pi}{2}$ (aspect ratio $\varepsilon = \frac{2\rho}{\pi}$).

Calculs pour le rectangle

On a

$$\langle Dq, q \rangle_{\Omega} = \langle \Delta^{-\frac{1}{2}} \nabla q, \Delta^{-\frac{1}{2}} \nabla q \rangle_{\Omega}$$

On cherche q dans E_1^{\perp} , avec E_1 l'espace propre associé à $\sigma = 1$. On a

$$E_1 = \{ \operatorname{div} \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \}$$

Comme $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ ssi $\mathbf{u} = \nabla p$ avec $p \in \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ on trouve

$$E_1^{\perp} = \{ q \in L_0^2(\Omega) : \Delta q = 0 \}$$

On discrétise par une méthode de type spectral.

- On prend une base de q harmoniques de la forme $g(x)h(y)$ où g est trigonométrique (vecteur propre Neumann) et h exponentiel, ou l'inverse. **Fréquence de coupure notée k_{max}** . Le gradient est exact.
- On approche $\Delta^{-\frac{1}{2}}$ par décomposition selon les vecteurs propres de Δ sur Ω . **Fréquence de coupure notée n_{max}** . Pratiquement on prend

$$n_{max} = 10 k_{max}$$

Résultats de calcul pour le rectangle

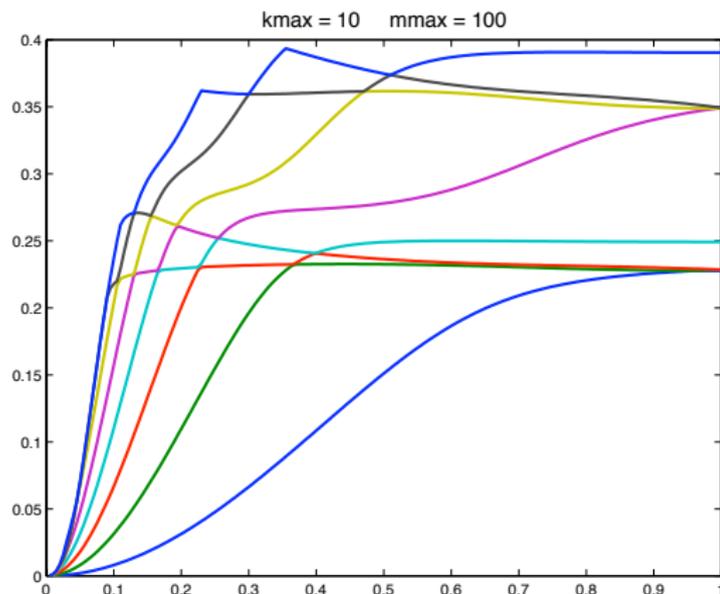


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Résultats de calcul pour le rectangle

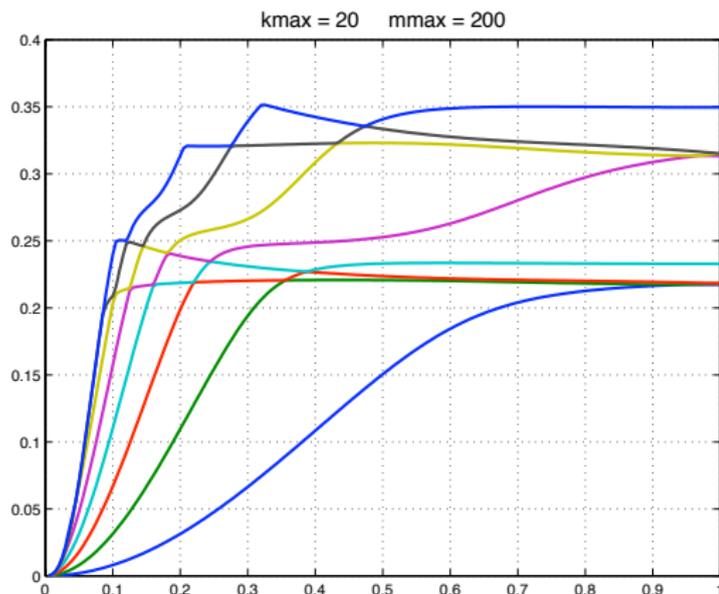


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Résultats de calcul pour le rectangle

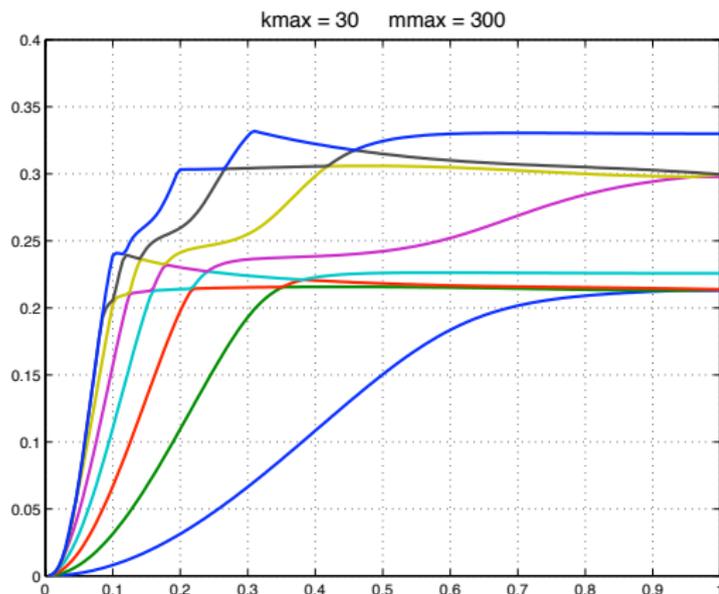


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Résultats de calcul pour le rectangle

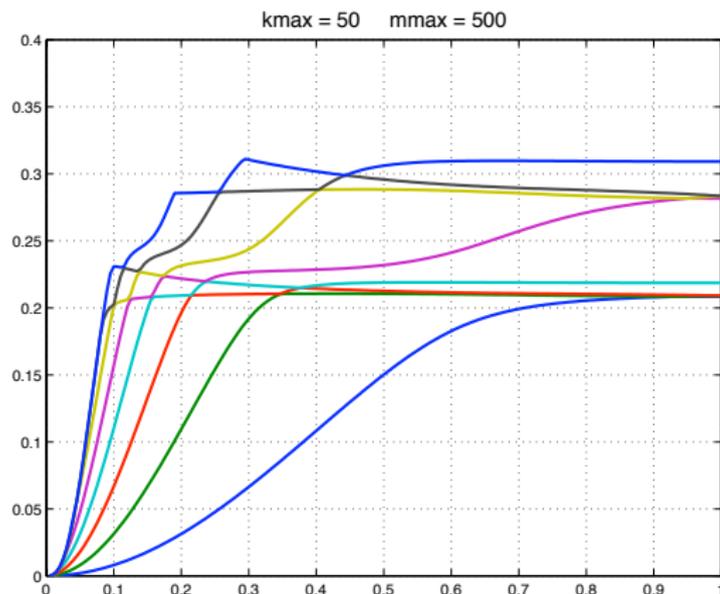


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Résultats de calcul pour le rectangle

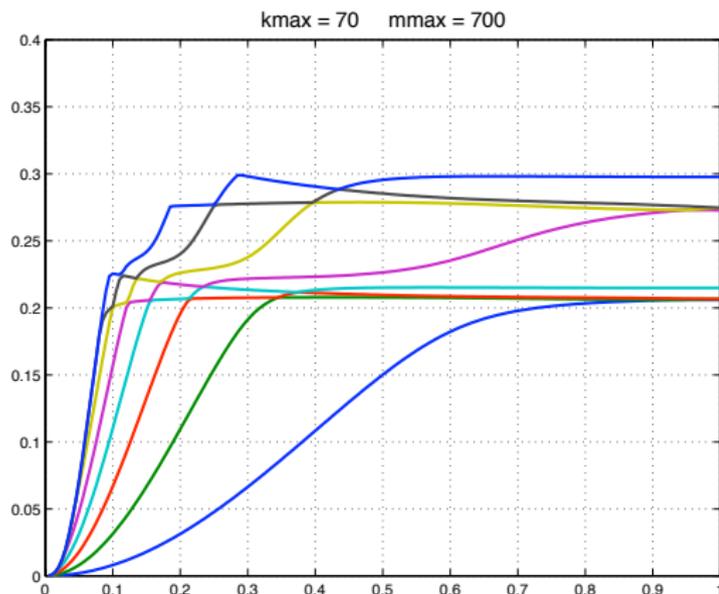


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Résultats de calcul pour le rectangle

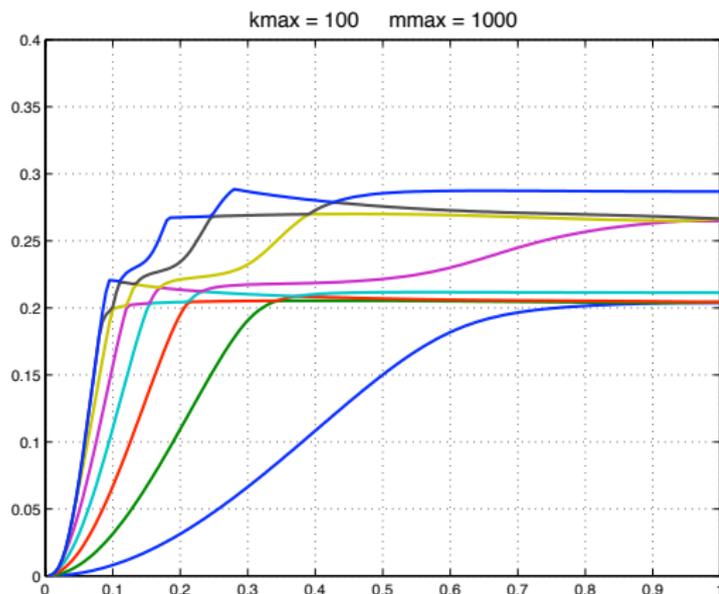


Figure: 8 premières valeurs propres σ_ℓ du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Comparaison avec les minorants et majorants

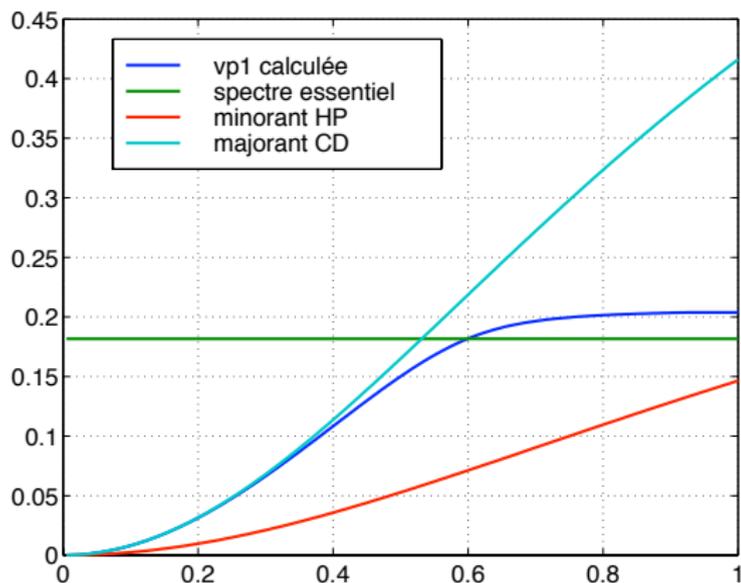


Figure: Première valeur propre σ_1 du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε

Comparaison avec les minorants et majorants

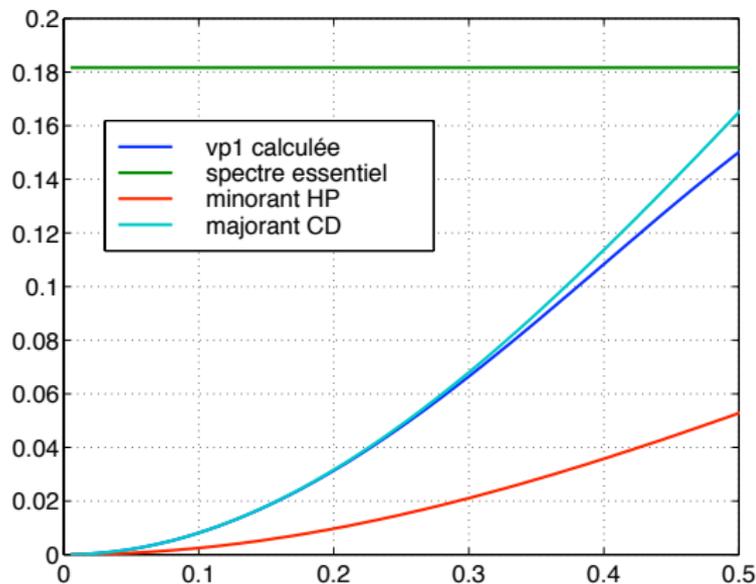


Figure: Première valeur propre σ_1 du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε
(zoom)

Comparaison avec les minorants et majorants

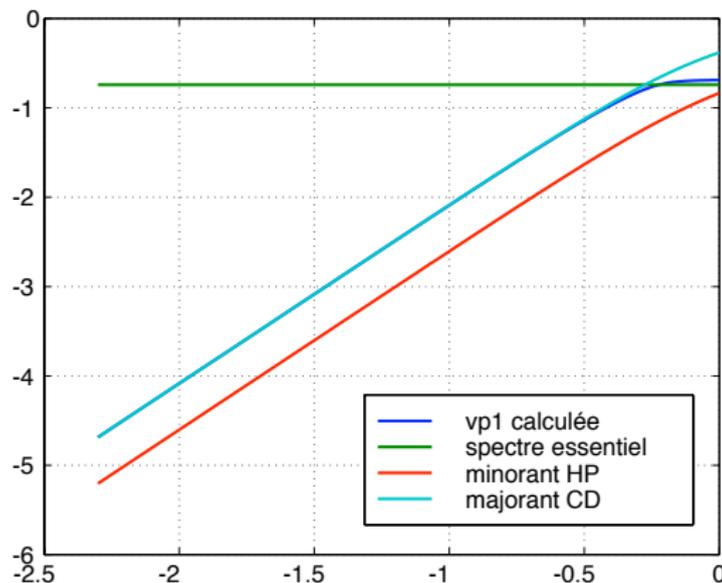


Figure: Première valeur propre σ_1 du rectangle en fonction de l'aspect ratio ε (échelle \log_{10})

Conclusion: et le carré?

Assez sûrement, il n'y a pas de spectre discret pour le carré et

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}.$$

Mais le calcul est un défi redoutable parce que la convergence est de plus en plus faible à mesure que l'on s'approche du spectre essentiel, *...pour disparaître complètement lorsqu'on y entre.*