

Le problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique: représentation intégrale de la solution

Frédérique Le Louër

Thèse sous la direction de Martin Costabel

2008



Introduction

- Projet IRMAR-IETR : l'optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées (R. Sauleau, M. Costabel, M.Dauge, E. Darrigrand).
- Applications : la communication de proximité, les communications par satellites ou la sécurité automobile (radars d'assistance et d'aide à la conduite).

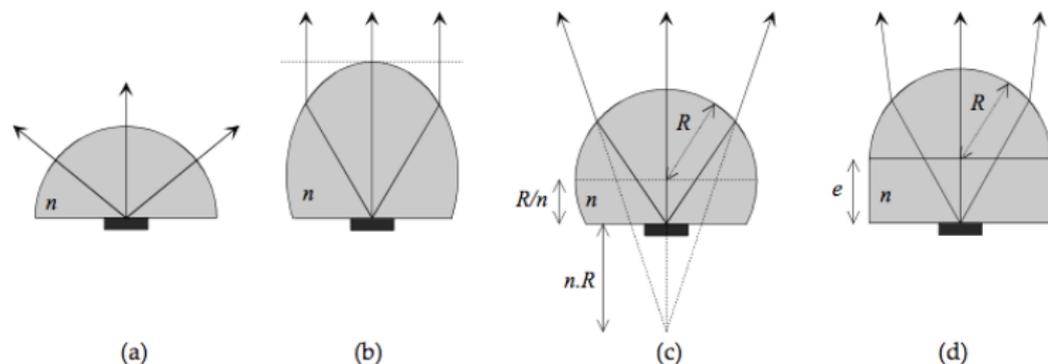


Fig. 1.7 – Configurations usuelles des lentilles substrats d'indice $n = \sqrt{\epsilon_r}$.
(a) Hémisphère. (b) Ellipse. (c) Hyperhémisphère. (d) Hémisphère étendu.

Introduction

- Projet IRMAR-IETR : l'optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées (R. Sauleau, M. Costabel, M.Dauge, E. Darrigrand).
- Applications : la communication de proximité, les communications par satellites ou la sécurité automobile (radars d'assistance et d'aide à la conduite).
- Problème à résoudre : déterminer la forme de la lentille étant donné la source primaire et le profil de rayonnement du champ électromagnétique.
- Etape à suivre :
 - a) Résoudre numériquement le problème de diffraction d'onde électromagnétique par un diélectrique.
 - b) Développer un code d'optimisation de forme en utilisant une méthode de gradient à pas optimal.

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Notation :

Soient B un domaine **borné**, G un domaine **non borné** et s réel. On pose :

$$\mathbf{H}^s(B) = (H^s(B))^3$$

$$\mathbf{H}_{loc}^s(\bar{G}) = \left\{ u \in \mathbf{H}^s(K); \text{ pour tout compact } K \subset \bar{G} \right\}.$$

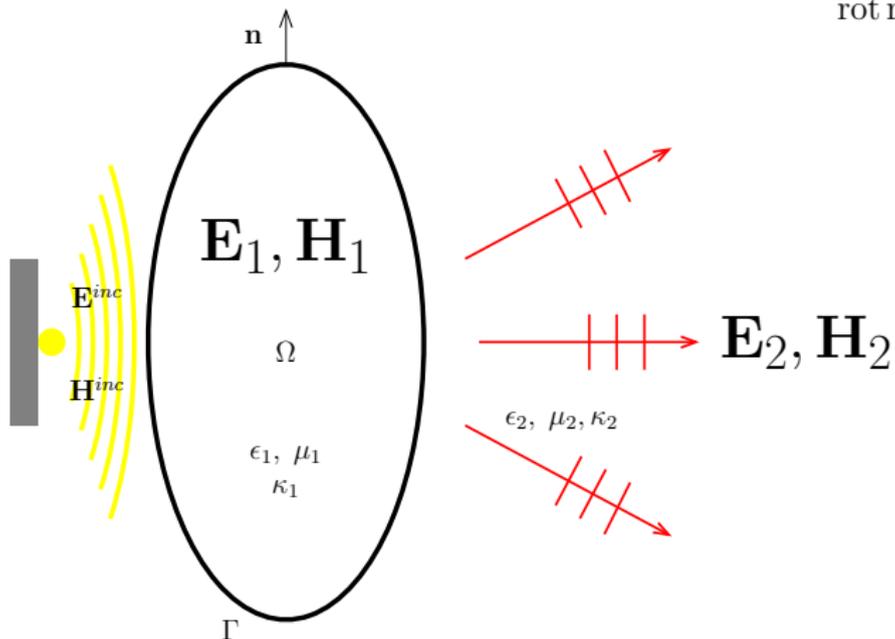
Par convention $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}^0$.

Soit D un **opérateur différentiel**. On pose :

$$\mathbf{H}(D, B) = \{ u \in \mathbf{L}^2(B); Du \in \mathbf{L}^2(B) \}$$

$$\mathbf{H}_{loc}(D, G) = \{ u \in \mathbf{L}_{loc}^2(\bar{G}); Du \in \mathbf{L}_{loc}^2(\bar{G}) \}.$$

Le problème de diffraction par un diélectrique



$$\kappa_j^2 = \left(\epsilon_j + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mu_j \omega^2$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E}^{inc} - \kappa_2^2 \mathbf{E}^{inc} = 0.$$

Le problème de diffraction par un diélectrique

On cherche une solution $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ des équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 - \kappa_1^2 \mathbf{E}_1 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 - \kappa_2^2 \mathbf{E}_2 &= 0 \text{ in } \bar{\Omega}^c \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions de transmissions :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2^{tot})$$

$$\mu_1^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_1) = \mu_2^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_2^{tot})$$

où $\mathbf{E}_2^{tot} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}^{inc}$,

et telle que \mathbf{E}_2 vérifie la condition de Silver-Müller :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_2 \times x - i\kappa|x|\mathbf{E}_2) = 0$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\kappa_1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\kappa_2} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2$$

Le problème de diffraction par un diélectrique

On cherche une solution $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ des équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 - \kappa_1^2 \mathbf{E}_1 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 - \kappa_2^2 \mathbf{E}_2 &= 0 \text{ in } \bar{\Omega}^c \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions de transmissions :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2^{tot})$$

$$\mu_1^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_1) = \mu_2^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_2^{tot})$$

où $\mathbf{E}_2^{tot} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}^{inc}$,

et telle que \mathbf{E}_2 vérifie la condition de Silver-Müller :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_2 \times x - i\kappa|x|\mathbf{E}_2) = 0$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\kappa_1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\kappa_2} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2$$

Le problème de diffraction par un diélectrique

On cherche une solution $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ des équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 - \kappa_1^2 \mathbf{E}_1 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 - \kappa_2^2 \mathbf{E}_2 &= 0 \text{ in } \bar{\Omega}^c \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions de transmissions :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2^{tot})$$

$$\mu_1^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_1) = \mu_2^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_2^{tot})$$

où $\mathbf{E}_2^{tot} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}^{inc}$,

et telle que \mathbf{E}_2 vérifie la condition de Silver-Müller :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{x} - i\kappa|x|\mathbf{E}_2) = 0$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\kappa_1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\kappa_2} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2$$

Le problème de diffraction par un diélectrique

On cherche une solution $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ des équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 - \kappa_1^2 \mathbf{E}_1 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 - \kappa_2^2 \mathbf{E}_2 &= 0 \text{ in } \bar{\Omega}^c \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions de transmissions :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2^{tot})$$

$$\mu_1^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_1) = \mu_2^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_2^{tot})$$

où $\mathbf{E}_2^{tot} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}^{inc}$,

et telle que \mathbf{E}_2 vérifie la condition de Silver-Müller :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_2 \times x - i\kappa|x|\mathbf{E}_2) = 0$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\kappa_1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\kappa_2} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2$$

On pose $\tilde{\rho} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Théorème : (existence et unicité)

Soit $\kappa_2 \in \mathbb{C}$ tel que :

κ_2 est un réel strictement positif ou $Im(\kappa_2) > 0$.

Soit κ_1 et $\tilde{\rho}$ tels que

$\tilde{\rho} \neq 0$ et $Im(\tilde{\rho}\kappa_2) \geq 0$ et $Im(\tilde{\rho}\bar{\kappa}_2\kappa_1^2) \geq 0$

Alors le problème de diffraction admet une et une seule solution.

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces**
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Soit t un réel positif, on pose :

$$\mathbf{H}^t(\Gamma) = (H^t(\Gamma))^3, \mathbf{H}^0(\Gamma) = \mathbf{L}^2(\Gamma)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^t(\Gamma) = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t(\Gamma) \times \mathbf{n}), \mathbf{L}_{\parallel}^2(\Gamma) = \mathbf{H}_{\parallel}^0(\Gamma)$$

$$\mathbf{H}_{\perp}^t(\Gamma) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^t(\Gamma), \mathbf{L}_{\perp}^2(\Gamma) = \mathbf{H}_{\perp}^0(\Gamma)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Gamma) = \mathbf{H}^0(\Gamma)$.

On note $\mathbf{H}_{\perp}^{-t}(\Gamma)$ l'espace dual de $\mathbf{H}_{\perp}^t(\Gamma)$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{-t}(\Gamma)$ l'espace dual de $\mathbf{H}_{\parallel}^t(\Gamma)$ par rapport au produit scalaire \mathbf{L}^2 .

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$. Le **gradient surfacique** est défini par

$$\nabla_{\Gamma} u = \mathbf{n} \times \nabla \tilde{u} \times \mathbf{n}.$$

Le **rotationnel vectoriel surfacique** est défini par

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} = -\mathbf{n} \times \nabla \tilde{u}.$$

Soit $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}^1(\Gamma))^3$. La **divergence surfacique** est définie par

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - (\operatorname{Jac}(\tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Le **rotationnel scalaire surfacique** est défini par

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{v}}.$$

Les opérateurs

$$\nabla_{\Gamma} : H^{t+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\perp}^t(\Gamma)$$

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} : H^{t+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\parallel}^t(\Gamma)$$

$$\mathbf{div}_{\Gamma} : \mathbf{H}^{t+1}(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)$$

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} : \mathbf{H}^{t+1}(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)$$

sont continus.

On a les égalités suivantes :

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} = 0 \text{ et } \mathbf{div}_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} = 0 \tag{3.1}$$

et si $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_{\perp}^t(\Gamma)$ on a,

$$\mathbf{rot}_{\Gamma}(\mathbf{n} \times \mathbf{g}) = \mathbf{div}_{\Gamma} \mathbf{g}$$

Définition

Pour $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}))^3$ on définit les traces :

$$\gamma_D \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_\Gamma \text{ et } \gamma_{N_\kappa} \mathbf{u} = \kappa^{-1} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{u})_\Gamma.$$

On note γ_D^c et $\gamma_{N_\kappa}^c$ les traces à l'extérieure.

Définition

On pose :

$$\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \{u \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \text{div}_\Gamma u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$$

$$\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = \{u \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \text{rot}_\Gamma u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$$

Définition

Pour $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}))^3$ on définit les traces :

$$\gamma_D \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_\Gamma \text{ et } \gamma_{N_\kappa} \mathbf{u} = \kappa^{-1} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{u})_\Gamma.$$

On note γ_D^c et $\gamma_{N_\kappa}^c$ les traces à l'extérieure.

Définition

On pose :

$$\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \}$$

$$\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \}$$

Théorème

Les traces

$$\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

$$\gamma_{N_{\kappa}} : \mathbf{H}(\mathbf{rot rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

sont linéaires et **continues**.On a les mêmes résultats pour les traces à l'extérieure γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa}}^c$.

Théorème

L'opérateur

$$\mathcal{N} : \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{n}$$

est un opérateur linéaire et **bicontinu**.

Théorème

Les traces

$$\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

$$\gamma_{N_{\kappa}} : \mathbf{H}(\mathbf{rot rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

sont linéaires et **continues**.On a les mêmes résultats pour les traces à l'extérieure γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa}}^c$.

Théorème

L'opérateur

$$\mathcal{N} : \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{n}$$

est un opérateur linéaire et **bicontinu**.

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques**
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives

On définit le **potentiel de simple couche** par :

$$(\psi_\kappa u)(x) = \int_\Gamma \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} u(y) d\sigma(y) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$. L'opérateur

$$\begin{aligned} \psi_\kappa &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \\ &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

est linéaire et continu.

On définit le **potentiel de simple couche** par :

$$(\psi_\kappa u)(x) = \int_\Gamma \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} u(y) d\sigma(y) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$. L'opérateur

$$\begin{aligned} \psi_\kappa &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \\ &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

est linéaire et continu.

Définition (potentiels électriques et magnétiques)

On définit les opérateurs de **potentiel électrique** Ψ_{E_κ} et de **potentiel magnétique** Ψ_{M_κ} pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par

$$\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} := \kappa \psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} \nabla \psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \text{ et } \Psi_{M_\kappa} \mathbf{j} := \text{rot } \psi_\kappa \mathbf{j}$$

Ces potentiels sont solutions des équations de Maxwell harmoniques en temps dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ et satisfont :

$$\kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{E_\kappa} = \Psi_{M_\kappa} \text{ et } \kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{M_\kappa} = \Psi_{E_\kappa}$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$. Les opérateurs

$$\begin{aligned} \Psi_{E_\kappa}, \Psi_{M_\kappa} &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \\ &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}(\text{rot}, \Omega^c) \end{aligned}$$

sont linéaires et **continus**.

Définition (potentiels électriques et magnétiques)

On définit les opérateurs de **potentiel électrique** Ψ_{E_κ} et de **potentiel magnétique** Ψ_{M_κ} pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par

$$\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} := \kappa \psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} \nabla \psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \text{ et } \Psi_{M_\kappa} \mathbf{j} := \text{rot } \psi_\kappa \mathbf{j}$$

Ces potentiels sont solutions des équations de Maxwell harmoniques en temps dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ et satisfont :

$$\kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{E_\kappa} = \Psi_{M_\kappa} \text{ et } \kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{M_\kappa} = \Psi_{E_\kappa}$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$. Les opérateurs

$$\begin{aligned} \Psi_{E_\kappa}, \Psi_{M_\kappa} &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \\ &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \Omega^c) \end{aligned}$$

sont linéaires et **continus**.

Définition (potentiels électriques et magnétiques)

On définit les opérateurs de **potentiel électrique** Ψ_{E_κ} et de **potentiel magnétique** Ψ_{M_κ} pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par

$$\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} := \kappa \psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} \nabla \psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \text{ et } \Psi_{M_\kappa} \mathbf{j} := \text{rot } \psi_\kappa \mathbf{j}$$

Ces potentiels sont solutions des équations de Maxwell harmoniques en temps dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ et satisfont :

$$\kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{E_\kappa} = \Psi_{M_\kappa} \text{ et } \kappa^{-1} \text{rot } \Psi_{M_\kappa} = \Psi_{E_\kappa}$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$. Les opérateurs

$$\begin{aligned} \Psi_{E_\kappa}, \Psi_{M_\kappa} &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \\ &: \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}(\text{rot}, \Omega^c) \end{aligned}$$

sont linéaires et **continus**.

$$\gamma_D \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_\Gamma \text{ et } \gamma_{N_\kappa} \mathbf{u} = \kappa^{-1} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{u})_\Gamma.$$

Relations de saut

On a les égalités suivantes :

$$(\gamma_D - \gamma_D^c) \Psi_{E_\kappa} = [\gamma_D] \Psi_{E_\kappa} = 0$$

$$(\gamma_{N_\kappa} - \gamma_{N_\kappa}^c) \Psi_{E_\kappa} = [\gamma_{N_\kappa}] \Psi_{E_\kappa} = -I$$

$$(\gamma_D - \gamma_D^c) \Psi_{M_\kappa} = [\gamma_D] \Psi_{M_\kappa} = -I$$

$$(\gamma_{N_\kappa} - \gamma_{N_\kappa}^c) \Psi_{M_\kappa} = [\gamma_{N_\kappa}] \Psi_{M_\kappa} = 0$$

Maintenant, considérons l'équation :

$$(ME) \quad \mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0$$

Supposons que :

- $\mathbf{E}|_{\Omega} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ est solution de (ME) dans Ω
- $\mathbf{E}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ est solution de (ME) dans $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ et satisfait la condition de Silver-Müller.

Alors, en posant :

$$\mathbf{j} = [\gamma_{N_\kappa}] \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = [\gamma_D] \mathbf{E},$$

on obtient sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$:

$$\mathbf{E}(x) = -(\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})(x) - (\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})(x)$$

Définition

On introduit les opérateurs intégraux de frontières suivants :

$$C_\kappa = -\frac{1}{2}(\gamma_D + \gamma_D^c)\Psi_{E_\kappa} = -\frac{1}{2}(\gamma_{N_\kappa} + \gamma_{N_\kappa}^c)\Psi_{M_\kappa}$$

$$M_\kappa = -\frac{1}{2}(\gamma_D + \gamma_D^c)\Psi_{M_\kappa} = -\frac{1}{2}(\gamma_{N_\kappa} + \gamma_{N_\kappa}^c)\Psi_{E_\kappa}$$

NB : $C_\kappa \mathbf{j} = \kappa \mathbf{n} \times \Psi_{\kappa|\Gamma} \mathbf{j} - \kappa^{-1} \mathbf{rot}_\Gamma \Psi_{\kappa|\Gamma} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}$.

Définition (Olaf Steinbach, Markus Windisch)

On définit l'opérateur C_0^* pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ par :

$$C_0^* \mathbf{j} = \mathbf{n} \times \Psi_{0|\Gamma} \mathbf{j} + \mathbf{rot}_\Gamma \Psi_{0|\Gamma} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}$$

Définition

On introduit les opérateurs intégraux de frontières suivants :

$$C_{\kappa} = -\frac{1}{2}(\gamma_D + \gamma_D^c)\Psi_{E_{\kappa}} = -\frac{1}{2}(\gamma_{N_{\kappa}} + \gamma_{N_{\kappa}}^c)\Psi_{M_{\kappa}}$$

$$M_{\kappa} = -\frac{1}{2}(\gamma_D + \gamma_D^c)\Psi_{M_{\kappa}} = -\frac{1}{2}(\gamma_{N_{\kappa}} + \gamma_{N_{\kappa}}^c)\Psi_{E_{\kappa}}$$

NB : $C_{\kappa}\mathbf{j} = \kappa\mathbf{n} \times \Psi_{\kappa|\Gamma}\mathbf{j} - \kappa^{-1}\mathbf{rot}_{\Gamma}\Psi_{\kappa|\Gamma}\operatorname{div}_{\Gamma}\mathbf{j}$.

Définition (Olaf Steinbach, Markus Windisch)

On définit l'opérateur C_0^* pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$C_0^*\mathbf{j} = \mathbf{n} \times \Psi_{0|\Gamma}\mathbf{j} + \mathbf{rot}_{\Gamma}\Psi_{0|\Gamma}\operatorname{div}_{\Gamma}\mathbf{j}$$

Théorème

On suppose que $\text{Im}(\kappa) \geq 0$.

Alors les opérateurs C_κ et M_κ sont **continus** de $\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans lui-même. De plus M_κ est **compact**.

Théorème (Olaf Steinbach, Markus Windish)

L'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{N}C_0^* : \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{j} &\mapsto (C_0^* \mathbf{j}) \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

est auto-adjoint, **elliptique** et **inversible**.

Théorème

On suppose que $Im(\kappa) \geq 0$.

Alors les opérateurs C_κ et M_κ sont **continus** de $\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans lui-même. De plus M_κ est **compact**.

Théorème (Olaf Steinbach, Markus Windish)

L'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{N}C_0^* : \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{j} &\mapsto (C_0^*\mathbf{j}) \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

est auto-adjoint, **elliptique** et **inversible**.

Considérons le **projecteur de Calderón**

$$P = \frac{1}{2}I + A_\kappa \quad \text{et} \quad P^c = \frac{1}{2}I - A_\kappa$$

avec

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} M_\kappa & C_\kappa \\ C_\kappa & M_\kappa \end{pmatrix}.$$

On a $P \circ P^c \equiv 0$. Ainsi

$$C_\kappa^2 = \frac{1}{4}I - M_\kappa^2 \quad \text{et} \quad C_\kappa M_\kappa + M_\kappa C_\kappa = 0.$$

l'opérateur C_κ est **Fredholm d'indice zéro**.

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière**
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives



R. E. KLEINMAN AND P. A. MARTIN. *On single integral equations for the transmission problem of acoustics*. SIAM J. Appl. Math., 48(2), 307-325, 1988.



OLAF STEINBACH AND MARKUS WINDISCH. *Modified combined field integral equations for electromagnetic scattering*, TU Graz, 2007/6.

Réprésentation intégrale de Kleinman and Martin

On suppose que \mathbf{E}_2 admet la représentation intégrale suivante :

$$\mathbf{E}_2^{tot}(x) = \mathbf{E}_2^{inc}(x) + \mathbf{E}_2(x) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

avec

$$\mathbf{E}_2(x) = -(\Psi_{E_{\kappa_2}} \mathbf{j})(x) - i\eta(\Psi_{M_{\kappa_2}} C_0^* \mathbf{j})(x)$$

où η est un réel et la densité \mathbf{j} appartient à $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$.

Réprésentation intégrale de Kleinman et Martin

On pose $\rho = \frac{\kappa_1 \mu_2}{\kappa_2 \mu_1}$. En utilisant les conditions de transmissions, on a :

$$\mathbf{E}_1(x) = -\frac{1}{\rho}(\Psi_{E_1} \gamma_{N_2}^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) - (\Psi_{M_1} \gamma_D^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) \text{ dans } \Omega.$$

En appliquant les traces γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_1}}^c$ à \mathbf{E}_1 , on obtient deux équations intégrales de frontières d'inconnues \mathbf{j}

$$\mathbf{Sj} = f(\mathbf{E}^{inc})$$

$$\mathbf{Tj} = g(\mathbf{E}^{inc}).$$

Théorème

Si $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ est solution de l'une des équations intégrales de frontières, les champs \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_1 donnés par les représentations intégrales ci-dessus sont solutions du problème de transmission.

Réprésentation intégrale de Kleinman et Martin

On pose $\rho = \frac{\kappa_1 \mu_2}{\kappa_2 \mu_1}$. En utilisant les conditions de transmissions, on a :

$$\mathbf{E}_1(x) = -\frac{1}{\rho}(\Psi_{E_1} \gamma_{N_2}^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) - (\Psi_{M_1} \gamma_D^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) \text{ dans } \Omega.$$

En appliquant les traces γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_1}}^c$ à \mathbf{E}_1 , on obtient deux équations intégrales de frontières d'inconnues \mathbf{j}

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_1}\right) \left(\left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_2}\right) + i\eta C_{\kappa_2} C_0^*\right) + \rho C_{\kappa_1} \left(C_{\kappa_2} + i\eta\left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_2}\right)C_0^*\right)$$

$$g(\mathbf{E}^{inc}) = -\left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_1}\right)\gamma_{N_{\kappa_2}} \mathbf{E}^{inc} - \rho C_{\kappa_1} \gamma_D \mathbf{E}^{inc}$$

Théorème

Si $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ est solution de l'une des équations intégrales de frontières, les champs \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_1 donnés par les représentations intégrales ci-dessus sont solutions du problème de transmission.

Réprésentation intégrale de Kleinman et Martin

On pose $\rho = \frac{\kappa_1 \mu_2}{\kappa_2 \mu_1}$. En utilisant les conditions de transmissions, on a :

$$\mathbf{E}_1(x) = -\frac{1}{\rho} (\Psi_{E_1} \gamma_{N_2}^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) - (\Psi_{M_1} \gamma_D^c \mathbf{E}_2^{tot})(x) \text{ dans } \Omega.$$

En appliquant les traces γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_1}}^c$ à \mathbf{E}_1 , on obtient deux équations intégrales de frontières d'inconnues \mathbf{j}

$$\mathbf{Sj} = f(\mathbf{E}^{inc})$$

$$\mathbf{Tj} = g(\mathbf{E}^{inc}).$$

Théorème

Si $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ est solution de l'une des équations intégrales de frontières, les champs \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_1 donnés par les représentations intégrales ci-dessus sont solutions du problème de transmission.

Problème intérieur associé :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } u - \kappa_2^2 u &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \gamma_D u - i\eta C_0^* \gamma_{N_{\kappa_2}} u &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

Théorème

Les équations intégrales de frontière homogènes

$$\mathbf{Sj} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Tj} = 0$$

admettent seulement la solution nulle si et seulement si κ_2^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur associé.

Lemme

Si $\eta \neq 0$ alors le problème intérieur ci-dessus n'admet **pas de valeur propre réelle**.

Problème intérieur associé :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } u - \kappa_2^2 u &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \gamma_D u - i\eta C_0^* \gamma_{N_{\kappa_2}} u &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

Théorème

Les équations intégrales de frontière homogènes

$$\mathbf{S}\mathbf{j} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{T}\mathbf{j} = 0$$

admettent seulement la solution nulle si et seulement si κ_2^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur associé.

Lemme

Si $\eta \neq 0$ alors le problème intérieur ci-dessus n'admet **pas de valeur propre réelle**.

Problème intérieur associé :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } u - \kappa_2^2 u &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \gamma_D u - i\eta C_0^* \gamma_{N_{\kappa_2}} u &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

Théorème

Les équations intégrales de frontière homogènes

$$\mathbf{Sj} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Tj} = 0$$

admettent seulement la solution nulle si et seulement si κ_2^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur associé.

Lemme

Si $\eta \neq 0$ alors le problème intérieur ci-dessus n'admet **pas de valeur propre réelle**.

Théorème

On suppose que :

- $\eta \neq 0$ (pour l'injectivité).
- $\mu_1^{-1} \mu_2 \neq -1, \mu_1^{-1} \mu_2 \neq \kappa_1^{-2} \kappa_2^2$ (pour l'ellipticité).

Alors les équations intégrales admettent exactement une solution dans $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ et les représentations de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 donnent la solution du problème de transmission.

Champ lointain

Définition

La quantité qui nous intéresse à terme est le profil de rayonnement du champ électrique diffracté :

$$\mathbf{E}^\infty(\theta, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_2(x)}{(4\pi\rho)^{-1} e^{i\kappa\rho}}$$

où ρ , θ , ϕ sont les coordonnées sphériques de x .

Champ lointain

On note $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ les opérateurs définis respectivement pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par :

$$(\Psi_{E_\kappa}^\infty \mathbf{j})(\theta, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})(\mathbf{x})}{(4\pi\rho)^{-1} e^{i\kappa\rho}} \quad \text{et} \quad (\Psi_{M_\kappa}^\infty \mathbf{j})(\theta, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{M_\kappa} \mathbf{j})(\mathbf{x})}{(4\pi\rho)^{-1} e^{i\kappa\rho}}$$

Profil de rayonnement des potentiels électriques et magnétiques

Les opérateurs

$$\Psi_{E_\kappa}^\infty : \begin{array}{l} \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^2) \\ \mathbf{j} \mapsto \{ \hat{\mathbf{x}} \mapsto \kappa \hat{\mathbf{x}} \times \int_\Gamma e^{-i\kappa \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \times \hat{\mathbf{x}} \} \end{array}$$

$$\Psi_{M_\kappa}^\infty : \begin{array}{l} \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^2) \\ \mathbf{j} \mapsto \{ \hat{\mathbf{x}} \mapsto i\kappa \hat{\mathbf{x}} \times \int_\Gamma e^{-i\kappa \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \} \end{array}$$

sont linéaires et continus

Champ lointain

On note $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ les opérateurs définis respectivement pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par :

$$(\Psi_{E_\kappa}^\infty \mathbf{j})(\theta, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})(\mathbf{x})}{(4\pi\rho)^{-1} e^{i\kappa\rho}} \quad \text{et} \quad (\Psi_{M_\kappa}^\infty \mathbf{j})(\theta, \phi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_{M_\kappa} \mathbf{j})(\mathbf{x})}{(4\pi\rho)^{-1} e^{i\kappa\rho}}$$

Profil de rayonnement des potentiels électriques et magnétiques

Les opérateurs

$$\Psi_{E_\kappa}^\infty : \begin{array}{l} \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^2) \\ \mathbf{j} \mapsto \{ \hat{\mathbf{x}} \mapsto \kappa \hat{\mathbf{x}} \times \int_\Gamma e^{-i\kappa \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \times \hat{\mathbf{x}} \} \end{array}$$

$$\Psi_{M_\kappa}^\infty : \begin{array}{l} \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^2) \\ \mathbf{j} \mapsto \{ \hat{\mathbf{x}} \mapsto i\kappa \hat{\mathbf{x}} \times \int_\Gamma e^{-i\kappa \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \} \end{array}$$

sont linéaires et continus

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux**
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Maillage de la surface Γ

Triangulation :

On approche la surface Γ par un ensemble fini \mathcal{T}_h de triangles tels que :

- Les sommets des triangles sont sur la surface Γ ,
- Soient T et T' deux triangles distincts de \mathcal{T}_h . On a :

$$T \cap T' = \begin{cases} \text{vide} \\ \text{un sommet} \\ \text{une arête,} \end{cases}$$

- Le diamètre d'un triangle appartenant à \mathcal{T}_h est inférieure ou égale à h .
- $\Gamma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ et $\Gamma_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Gamma$.

Notation : On note $\mathcal{P}^k(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur Γ_h et polynômiales de degré k sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Maillage de la surface Γ

Triangulation :

On approche la surface Γ par un ensemble fini \mathcal{T}_h de triangles tels que :

- Les sommets des triangles sont sur la surface Γ ,
- Soient T et T' deux triangles distincts de \mathcal{T}_h . On a :

$$T \cap T' = \begin{cases} \text{vide} \\ \text{un sommet} \\ \text{une arête,} \end{cases}$$

- Le diamètre d'un triangle appartenant à \mathcal{T}_h est inférieure ou égale à h .
- $\Gamma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ et $\Gamma_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Gamma$.

Notation : On note $\mathcal{P}^k(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur Γ_h et polynômiales de degré k sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Discretisation de l'équation intégrale

- On veut résoudre l'équation intégrale dans $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$.
- On approche le champ lointain par des constantes par morceaux.

Rappels : On doit discrétiser les opérateurs suivants définis pour

$\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$M_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$C_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \left\{ \kappa \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) + \kappa^{-1} \nabla_{\Gamma}^x \left(\nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) \right\} d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\psi_{\kappa}^{\infty} \mathbf{j}(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-i\kappa \langle \hat{x}, y \rangle} \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

- On utilise la méthode de Nyström pour discrétiser M_{κ} , Ψ_{κ}^{∞} et la partie principale de C_{κ} .
- On approche d'abord la solution fondamentale par des fonctions de $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ pour discrétiser la partie hypersingulière de C_{κ} .

Discretisation de l'équation intégrale

- On veut résoudre l'équation intégrale dans $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$.
- On approche le champ lointain par des constantes par morceaux.

Rappels : On doit discrétiser les opérateurs suivants définis pour

$\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$M_k \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$C_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \left\{ \kappa \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) + \kappa^{-1} \nabla_{\Gamma}^x \left(\nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) \right\} d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\psi_{\kappa}^{\infty} \mathbf{j}(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-i\kappa \langle \hat{x}, y \rangle} \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

- On utilise la méthode de Nyström pour discrétiser M_k , Ψ_k^{∞} et la partie principale de C_{κ} .
- On approche d'abord la solution fondamentale par des fonctions de $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ pour discrétiser la partie hypersingulière de C_{κ} .

Discretisation de l'équation intégrale

- On veut résoudre l'équation intégrale dans $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$.
- On approche le champ lointain par des constantes par morceaux.

Rappels : On doit discrétiser les opérateurs suivants définis pour

$\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$M_k \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$C_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \left\{ \kappa \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) + \kappa^{-1} \nabla_{\Gamma}^x \left(\nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) \right\} d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\psi_{\kappa}^{\infty} \mathbf{j}(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-i\kappa \langle \hat{x}, y \rangle} \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

- On utilise la méthode de Nyström pour discrétiser M_k , ψ_{κ}^{∞} et la partie principale de C_{κ} .
- On approche d'abord la solution fondamentale par des fonctions de $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ pour discrétiser la partie hypersingulière de C_{κ} .

Discretisation de l'équation intégrale

- On veut résoudre l'équation intégrale dans $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$.
- On approche le champ lointain par des constantes par morceaux.

Rappels : On doit discrétiser les opérateurs suivants définis pour

$\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$M_k \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$C_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \left\{ \kappa \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) + \kappa^{-1} \nabla_{\Gamma}^x \left(\nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) \right\} d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\psi_{\kappa}^{\infty} \mathbf{j}(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-i\kappa \langle \hat{x}, y \rangle} \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

- On utilise la méthode de Nyström pour discrétiser M_k , Ψ_k^{∞} et la partie principale de C_{κ} .
- On approche d'abord la solution fondamentale par des fonctions de $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ pour discrétiser la partie hypersingulière de C_{κ} .

Discretisation de l'équation intégrale

- On veut résoudre l'équation intégrale dans $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$.
- On approche le champ lointain par des constantes par morceaux.

Rappels : On doit discrétiser les opérateurs suivants définis pour

$\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$M_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$C_{\kappa} \mathbf{j}(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times \left\{ \kappa \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathbf{j}(y) + \kappa^{-1} \nabla_{\Gamma}^x \left(\nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) \right\} d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\psi_{\kappa}^{\infty} \mathbf{j}(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-i\kappa \langle \hat{x}, y \rangle} \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

- On utilise la méthode de Nyström pour discrétiser M_{κ} , ψ_{κ}^{∞} et la partie principale de C_{κ} .
- On approche d'abord la solution fondamentale par des fonctions de $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ pour discrétiser la partie hypersingulière de C_{κ} .

La méthode de Nyström

Considérons

$$A: \begin{array}{l} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ j \mapsto \left\{ x \mapsto \int_{\Gamma} K(x, y) j(y) d\sigma(y) \right\} \end{array}$$

où K est infiniment différentiable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \neq y\}$ et se comporte comme $|x - y|^{\alpha-2}$ lorsque $|x - y| \rightarrow 0$.

1) On approche le noyau K par la fonction K_h définie par

$$K_h(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{si } |x - y| \geq \frac{h}{2} \\ \left(\frac{|x - y|}{h/2}\right)^{2-\alpha} K(x, y) & \text{si } |x - y| < \frac{h}{2} \end{cases}$$

L'opérateur intégrale de noyau K_h est alors continu de $\mathcal{C}(\Gamma_h, \mathbb{R}^3)$ dans lui-même et on peut lui appliquer la méthode Nyström.

La méthode de Nyström

On pose $N_t = \text{card}(\mathcal{T}_h)$. Numérotons T_1, T_2, \dots, T_{N_t} l'ensemble des triangles appartenant à \mathcal{T}_h . On a $\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{N_t} T_i$.

Points de quadrature : les centres c_1, \dots, c_{N_t} des triangles T_1, \dots, T_{N_t} .

Poids de quadrature : les aires $\omega_1, \dots, \omega_{N_t}$ des triangles T_1, \dots, T_{N_t} .

Base de $\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$: La famille de fonctions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_t}\}$ définies pour tout $1 \leq i, j \leq N_t$ par $\varphi_i(c_j) = \delta_i^j$.

L'opérateur A est alors discrétisé dans la base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_t}\}$ en la matrice $A_h = (a_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq N_t}$ définie par :

$$a_{ij}^h = w_j * K_h(c_i, c_j)$$

Discretisation de l'opérateur C_κ

La partie hypersingulière de C_κ est définie par :

$$(B_\kappa \mathbf{j})(x) = \mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x \left(\nabla_\Gamma^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y)$$

1) On ne peut pas utiliser la méthode précédente pour les opérateurs à noyaux hypersinguliers.

2) On approche la solution fondamentale par la fonction ϕ_h définie par

$$\phi_h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} & \text{si } |x-y| \geq \frac{h}{2} \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi(h/2)} & \text{si } |x-y| < \frac{h}{2} \end{cases}$$

3) On approche ϕ_h par une fonction linéaire sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Discretisation de l'opérateur C_κ

La partie hypersingulière de C_κ est définie par :

$$(B_\kappa \mathbf{j})(x) = \mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x \left(\nabla_\Gamma^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y)$$

1) On ne peut pas utiliser la méthode précédente pour les opérateurs à noyaux hypersinguliers.

2) On approche la solution fondamentale par la fonction ϕ_h définie par

$$\phi_h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} & \text{si } |x-y| \geq \frac{h}{2} \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa(h/2)} & \text{si } |x-y| < \frac{h}{2} \end{cases}$$

3) On approche ϕ_h par une fonction linéaire sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Discretisation de l'opérateur C_κ

La partie hypersingulière de C_κ est définie par :

$$(B_\kappa \mathbf{j})(x) = \mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x \left(\nabla_\Gamma^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y)$$

1) On ne peut pas utiliser la méthode précédente pour les opérateurs à noyaux hypersinguliers.

2) On approche la solution fondamentale par la fonction ϕ_h définie par

$$\phi_h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{si } |x-y| \geq \frac{h}{2} \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi(h/2)} & \text{si } |x-y| < \frac{h}{2} \end{cases}$$

3) On approche ϕ_h par une fonction linéaire sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Discretisation de l'opérateur C_κ

La partie hypersingulière de C_κ est définie par :

$$(B_\kappa \mathbf{j})(x) = \mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x \left(\nabla_\Gamma^y \left(\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\kappa|x-y|} \right) \cdot \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y)$$

1) On ne peut pas utiliser la méthode précédente pour les opérateurs à noyaux hypersinguliers.

2) On approche la solution fondamentale par la fonction ϕ_h définie par

$$\phi_h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{si } |x-y| \geq \frac{h}{2} \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi(h/2)} & \text{si } |x-y| < \frac{h}{2} \end{cases}$$

3) On approche ϕ_h par une fonction linéaire sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

discrétisation de l'opérateur C_K

Numérotons p_1, p_2, \dots, p_{N_s} l'ensemble des sommets des triangles appartenant à \mathcal{T}_h . Une base de l'ensemble des fonctions linéaires sur chaque triangle est la famille des fonctions $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_s}\}$ définies par :

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \psi_i(p_j) = \delta_i^j.$$

$$\phi_h(x, y) \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \psi_i(x) \psi_j(y).$$

$$\nabla_T^x \langle \nabla_T^y (\phi_h(x, y)), \mathbf{j}_h(y) \rangle \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(x) \langle \nabla_T^y \psi_j(y), \mathbf{j}_h(y) \rangle.$$

L'opérateur B_K est alors discrétisé en la matrice $B_h = (b_{kl})_{1 \leq k, l \leq N_t}$ où b_{kl} est une matrice bloc 3×3 telle que

$$b_{kl} \mathbf{j}_h(c_l) = \text{aire}(T_l) * \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(c_k) \langle \nabla_T^y \psi_j(c_l), \mathbf{j}_h(c_l) \rangle.$$

discrétisation de l'opérateur C_K

Numérotons p_1, p_2, \dots, p_{N_s} l'ensemble des sommets des triangles appartenant à \mathcal{T}_h . Une base de l'ensemble des fonctions linéaires sur chaque triangle est la famille des fonctions $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_s}\}$ définies par :

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \psi_i(p_j) = \delta_i^j.$$

$$\phi_h(x, y) \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \psi_i(x) \psi_j(y).$$

$$\nabla_T^x \langle \nabla_T^y (\phi_h(x, y)), \mathbf{j}_h(y) \rangle \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(x) \langle \nabla_T^y \psi_j(y), \mathbf{j}_h(y) \rangle.$$

L'opérateur B_K est alors discrétisé en la matrice $B_h = (b_{kl})_{1 \leq k, l \leq N_t}$ où b_{kl} est une matrice bloc 3×3 telle que

$$b_{kl} \mathbf{j}_h(c_l) = \text{aire}(T_l) * \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(c_k) \langle \nabla_T^y \psi_j(c_l), \mathbf{j}_h(c_l) \rangle.$$

discrétisation de l'opérateur C_K

Numérotons p_1, p_2, \dots, p_{N_s} l'ensemble des sommets des triangles appartenant à \mathcal{T}_h . Une base de l'ensemble des fonctions linéaires sur chaque triangle est la famille des fonctions $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_s}\}$ définies par :

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \psi_i(p_j) = \delta_i^j.$$

$$\phi_h(x, y) \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \psi_i(x) \psi_j(y).$$

$$\nabla_T^x \langle \nabla_T^y (\phi_h(x, y)), \mathbf{j}_h(y) \rangle \simeq \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(x) \langle \nabla_T^y \psi_j(y), \mathbf{j}_h(y) \rangle.$$

L'opérateur B_K est alors discrétisé en la matrice $B_h = (b_{kl})_{1 \leq k, l \leq N_t}$ où b_{kl} est une matrice bloc 3×3 telle que

$$b_{kl} \mathbf{j}_h(c_l) = \text{aire}(T_l) * \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \phi_h(p_i, p_j) \nabla_T^x \psi_i(c_k) \langle \nabla_T^y \psi_j(c_l), \mathbf{j}_h(c_l) \rangle.$$

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques**
- 7 Conclusion et perspectives

Le cas de la sphère

- Fonctions propres :

$$M_n^m(x) = j_n(\kappa|x|) \nabla_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x}) \times \hat{x}$$

- Valeurs propres :

$$\{\kappa^{nm} ; j_n(\kappa^{nm}) = 0\}$$

κ^{11}	4,49340945
κ^{12}	7.72525183
κ^{13}	10.90412166

- Champ lointain :

$$\mathbf{E}_2^\infty(\hat{x}) = 4\pi(-i)^{n+1} \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} j_n(\kappa_2) (j_n(\kappa_1) + \kappa_1 j_n'(\kappa_1)) - j_n(\kappa_1) (j_n(\kappa_2) + \kappa_2 j_n'(\kappa_2))}{\frac{\mu_2}{\mu_1} h_n^{(1)}(\kappa_2) (j_n(\kappa_1) + \kappa_1 j_n'(\kappa_1)) - j_n(\kappa_1) (h_n^{(1)}(\kappa_2) + \kappa_2 h_n^{(1)'}(\kappa_2))} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m \times \hat{x}$$

$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(M_n^m) \quad \text{si } \eta = 0$$

$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(M_n^m) - i\Psi_{M_{\kappa_2}}^\infty C_0^* \mathbf{T}^{-1} g(M_n^m) \quad \text{si } \eta = 1$$

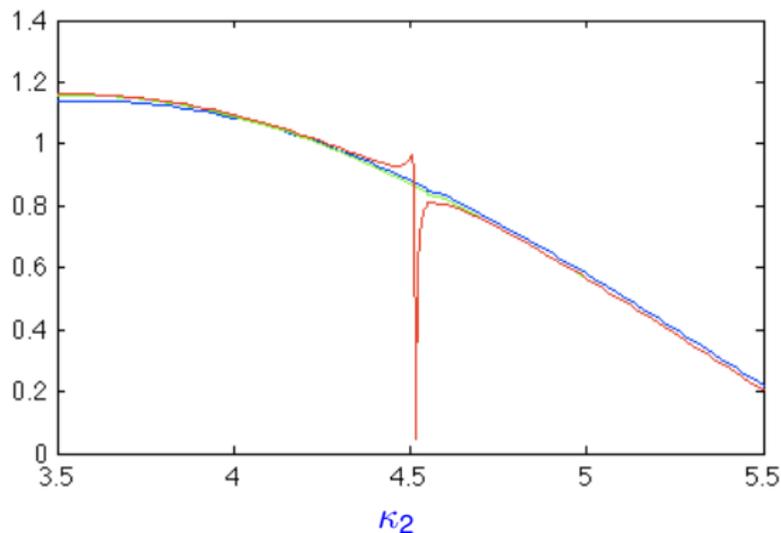
Le cas de la sphère

valeur propre théorique : $\kappa_2 = 4.49340645$, $\mu_1 = \mu_2 = \kappa_1 = 1$

valeur propre discrète : $4.495 < \kappa_d < 4.516$.

Module du champ lointain au point $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|E^\infty(\hat{x})|$



— Mie
— $\eta = 0$
— $\eta = 1$

Le cas de la sphère

- Fonctions propres :

$$N_n^m(x) = \frac{n(n+1)}{i\kappa|x|^2} x j_n(\kappa|x|) Y_n^m(\hat{x}) + \frac{1}{i\kappa|x|} (j_n(\kappa|x|) + \kappa|x|j_n'(\kappa|x|)) \nabla_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x})$$

- Valeurs propres :

$$\{\kappa^{nm}; j_n(\kappa^{nm}) + \kappa j_n'(\kappa^{nm}) = 0\}$$

κ^{11}	2.74370727
κ^{12}	6.116764265
κ^{13}	9.316615629

- Champ lointain :

$$\mathbf{E}_2^\infty = 4\pi(-i)^{n+1} \frac{\frac{\mu_2 \kappa_1^2}{\mu_1 \kappa_2^2} j_n(\kappa_2) (j_n(\kappa_1) + \kappa_1 j_n'(\kappa_1)) - j_n(\kappa_1) (j_n(\kappa_2) + \kappa_2 j_n'(\kappa_2))}{\frac{\mu_2 \kappa_1^2}{\mu_1 \kappa_2^2} h_n^{(1)}(\kappa_2) (j_n(\kappa_1) + \kappa_1 j_n'(\kappa_1)) - j_n(\kappa_1) (h_n^{(1)}(\kappa_2) + \kappa_2 h_n^{(1)'}(\kappa_2))} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m$$

$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(N_n^m) \quad \text{si } \eta = 0$$

$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(N_n^m) - i\Psi_{M_{\kappa_2}}^\infty C_0^* \mathbf{T}^{-1} g(N_n^m) \quad \text{si } \eta = 1$$

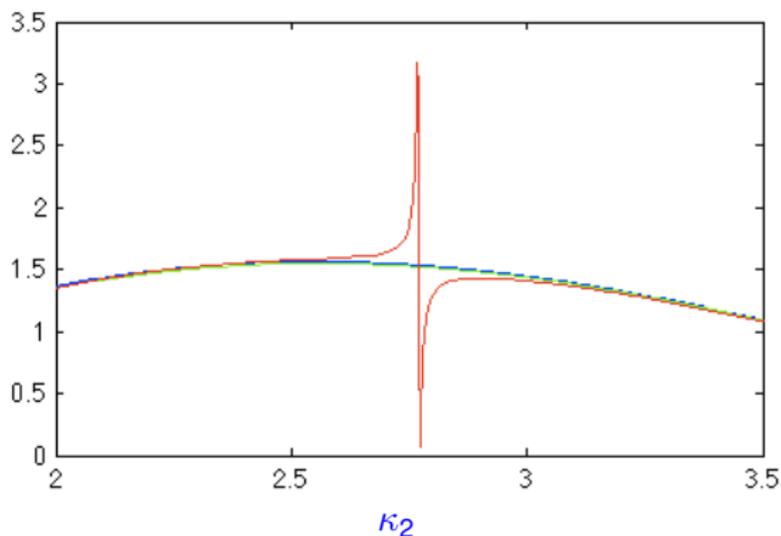
Le cas de la sphère

valeur propre théorique : $\kappa_2 = 2.74370727$, $\mu_1 = \mu_2 = \kappa_1 = 1$

valeur propre discrète : $2.768 < \kappa_d < 2.774$.

Module du champ lointain au point $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{E}^\infty(\hat{x})|$



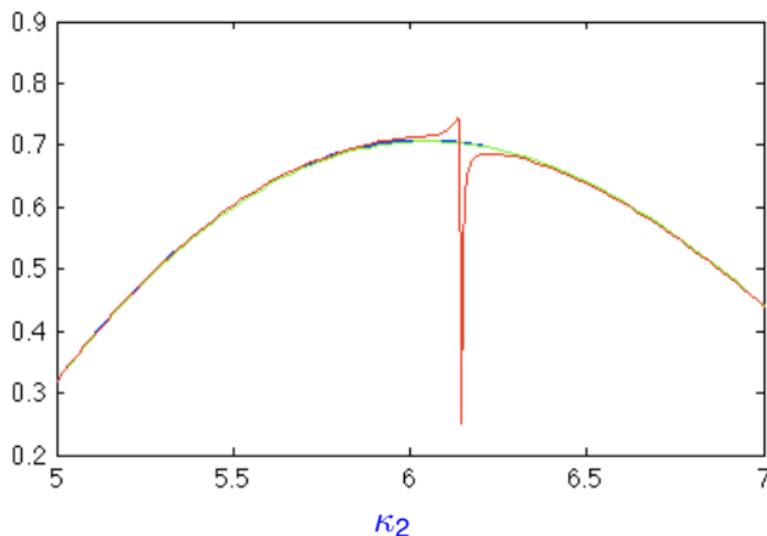
Le cas de la sphère

valeur propre : $\kappa_2 = 6.116764265$, $\mu_1 = \mu_2 = \kappa_1 = 1$

valeur propre discrète : $6.135 < \kappa_d < 6.145$.

Module du champ lointain au point $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{E}^\infty(\hat{x})|$



Cas du cube unité

On considère un parallélépipède de dimension (a_1, a_2, a_3) .

- Fonctions propres :

$$\left(\begin{array}{l} (C_3 \frac{\lambda_2}{a_2} - C_2 \frac{\lambda_3}{a_3}) \cos(\frac{\lambda_1}{a_1} \pi x) \sin(\frac{\lambda_2}{a_2} \pi x) \sin(\frac{\lambda_3}{a_3} \pi x) \\ (C_1 \frac{\lambda_3}{a_3} - C_3 \frac{\lambda_1}{a_1}) \sin(\frac{\lambda_1}{a_1} \pi x) \cos(\frac{\lambda_2}{a_2} \pi x) \sin(\frac{\lambda_3}{a_3} \pi x) \\ (C_2 \frac{\lambda_1}{a_1} - C_1 \frac{\lambda_2}{a_2}) \sin(\frac{\lambda_1}{a_1} \pi x) \sin(\frac{\lambda_2}{a_2} \pi x) \cos(\frac{\lambda_3}{a_3} \pi x) \end{array} \right)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda_1}{a_1} C_1 + \frac{\lambda_2}{a_2} C_2 + \frac{\lambda_3}{a_3} C_3 = 0$ et
 $\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 > 0$.

- Valeurs propres :

$$\kappa^2 = \left(\frac{\lambda_1}{a_1} \pi \right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{a_2} \pi \right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{a_3} \pi \right)^2.$$

- Champ lointain :

$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(\mathbf{E}^{inc}) \quad \text{si } \eta = 0$$

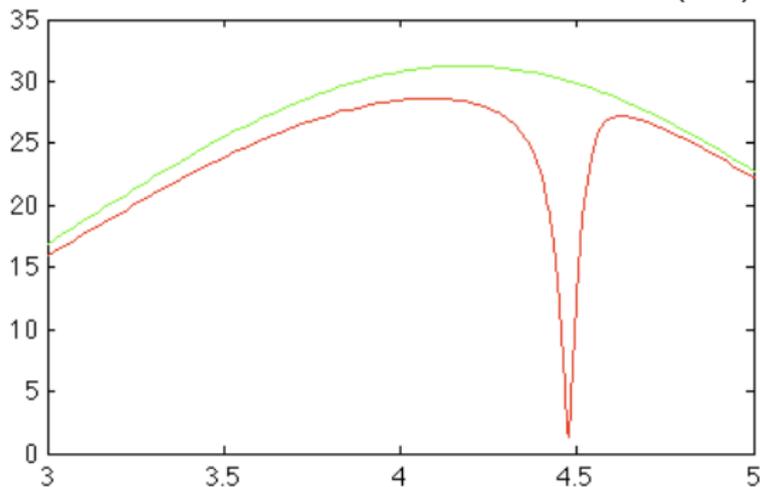
$$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_2}}^\infty \mathbf{T}^{-1} g(\mathbf{E}^{inc}) - i\Psi_{M_{\kappa_2}}^\infty C_0^* \mathbf{T}^{-1} g(\mathbf{E}^{inc}) \quad \text{si } \eta = 1$$

Cas du cube unité

1ère valeur propre théorique : $\kappa_2 = \sqrt{2}\pi \simeq 4.4428829$,
 valeur propre discrète : $\kappa_d \simeq 4.476$.

Module du champ lointain au point $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{E}^\infty(\hat{x})|$



— $\eta = 0$
 — $\eta = 1$

κ_2

Plan

- 1 Le problème de diffraction
- 2 Théorie des traces
- 3 Potentiels électromagnétiques
- 4 Equation intégrale de frontière
- 5 Discrétisations des opérateurs intégraux
- 6 Quelques résultats numériques
- 7 Conclusion et perspectives**

- Limite de Matlab : 3500 triangles maximum pour 16 Go de mémoires vives.
- Etudier de la convergence de la méthode.
- Etudier le cas d'une surface Lipschitzienne.
- Développer des méthodes rapides.

Dans le cadre du projet avec l'IETR :

- Validation du code par l'IETR.
- Utiliser la représentation intégrale du champ lointain pour résoudre le problème d'optimisation de forme.

Merci de votre attention !