

Asymptotique du système de Schrödinger-Poisson pour le transport d'un gaz d'électrons dans un nanofil

N. Ben Abdallah² F. Castella¹ F. Fendt¹ F. Méhats¹

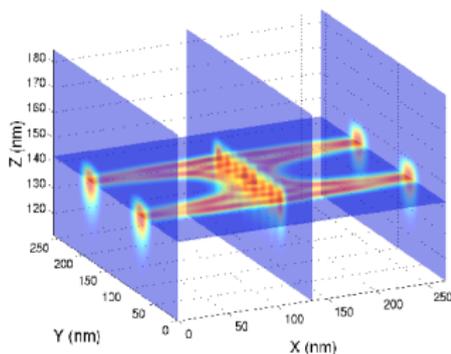
¹IRMAR
Université de Rennes

²Laboratoire MIP
Université de Toulouse

Journée d'équipe du 25 oct 2007

Motivation

Notre but dans cet exposé est de justifier par la théorie la validité de modèles qui sont apparus intéressants numériquement pour approcher des densités de répartition d'électrons dans des nano-structures, telles le coupleur quantique, étudié par E. Polizzi dans sa thèse (2001)



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problème physique et modèle associé
 - Le cadre global
- 2 Confinement sur un plan
 - Remise à l'échelle et asymptotique formelle
 - Résultat principal
 - Cadre fonctionnel
 - Outils pour la preuve
- 3 Adaptation au confinement sur un fil
 - Différence et nouvelle approche
 - Résultat principal
 - Asymptotique du noyau de Poisson
 - Quelques estimations
 - Stabilité du modèle limite
- 4 Perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problème physique et modèle associé
 - Le cadre global
- 2 Confinement sur un plan
 - Remise à l'échelle et asymptotique formelle
 - Résultat principal
 - Cadre fonctionnel
 - Outils pour la preuve
- 3 Adaptation au confinement sur un fil
 - Différence et nouvelle approche
 - Résultat principal
 - Asymptotique du noyau de Poisson
 - Quelques estimations
 - Stabilité du modèle limite
- 4 Perspectives

Problème physique et modèle associé pour le cas plan

Système de Schrödinger-Poisson perturbé par un potentiel de confinement pour le confinement sur un plan :

$$i\partial_t\Psi^\varepsilon = -\Delta\Psi^\varepsilon + \mathbb{V}^\varepsilon\Psi^\varepsilon,$$
$$\mathbb{V}^\varepsilon = \frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}} * (|\Psi^\varepsilon|^2).$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}$ sont les directions de transport et de confinement resp.

Problème physique et modèle associé pour le cas plan

Système de Schrödinger-Poisson perturbé par un potentiel de confinement pour le confinement sur un plan :

$$i\partial_t \Psi^\varepsilon = -\Delta \Psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} V_c \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \Psi^\varepsilon + \mathbb{V}^\varepsilon \Psi^\varepsilon,$$

$$\mathbb{V}^\varepsilon = \frac{1}{4\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}} * (|\Psi^\varepsilon|^2).$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}$ sont les directions de transport et de confinement resp.

$\frac{1}{\varepsilon^2} V_c \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)$ est le potentiel de confinement.

On fait dans toute la suite l'hypothèse suivante, qui détermine la force de confinement du potentiel appliqué :

Hypothèse 1 :

V_c est une fonction réelle positive de la variable z dans L^2_{loc} et il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$V_c(z) \geq C|z|^\alpha.$$

On s'attend, lorsque ε tend vers 0, à avoir l'asymptotique suivante :

$$|\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 \sim \left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi^\varepsilon(t, x, z')|^2 dz' \right) \delta(z).$$

On fait dans toute la suite l'hypothèse suivante, qui détermine la force de confinement du potentiel appliqué :

Hypothèse 1 :

V_c est une fonction réelle positive de la variable z dans L^2_{loc} et il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$V_c(z) \geq C|z|^\alpha.$$

On s'attend, lorsque ε tend vers 0, à avoir l'asymptotique suivante :

$$|\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 \sim \left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi^\varepsilon(t, x, z')|^2 dz' \right) \delta(z).$$

On fait dans toute la suite l'hypothèse suivante, qui détermine la force de confinement du potentiel appliqué :

Hypothèse 1 :

V_c est une fonction réelle positive de la variable z dans L^2_{loc} et il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$V_c(z) \geq C|z|^\alpha.$$

On s'attend, lorsque ε tend vers 0, à avoir l'asymptotique suivante :

$$|\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 \sim \left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi^\varepsilon(t, x, z')|^2 dz' \right) \delta(z).$$

Le cadre global

On se place pour l'étude qui va suivre dans le cadre de l'équation de Schrödinger-Poisson à laquelle on rajoute un potentiel extérieur qui a un effet confinant sur les électrons.

- 1 Système de Schrödinger-Poisson :
Brezzi, Markowich '91, Illner, Zweifel, Lange '94, Castella '97
- 2 Système de Schrödinger-Poisson stationnaire :
Ben Abdallah '00, Nier
- 3 Système de Schrödinger -Poisson avec confinement sur le plan : Pinaud '03, Ben-Abdallah, Méhats, Pinaud '05, Stage de M2 de F.F

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problème physique et modèle associé
 - Le cadre global
- 2 Confinement sur un plan
 - Remise à l'échelle et asymptotique formelle
 - Résultat principal
 - Cadre fonctionnel
 - Outils pour la preuve
- 3 Adaptation au confinement sur un fil
 - Différence et nouvelle approche
 - Résultat principal
 - Asymptotique du noyau de Poisson
 - Quelques estimations
 - Stabilité du modèle limite
- 4 Perspectives

Le résultats pré-existants pour le plan

Résultats pour le **confinement sur un plan** ($x \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$) : On considère le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t\phi = -\frac{1}{2}\Delta_x\phi + V\phi$$

$$V(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(t, x, z)|^2 dz \right).$$

- Ben Abdallah, Méhats, Pinaud, '05 : résultat de convergence L^2 pour une donnée initiale selon un mode propre de l'opérateur $-\frac{1}{2}\partial_z^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}V_\varepsilon(\frac{z}{\varepsilon})$.
- Objet du stage de Master de F.F encadrée par F. Méhats : extension du résultat à une donnée initiale quelconque bornée indépendamment de ε dans l'espace d'énergie.

Le résultats pré-existants pour le plan

Résultats pour le **confinement sur un plan** ($x \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$) : On considère le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t\phi = -\frac{1}{2}\Delta_x\phi + V\phi$$

$$V(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(t, x, z)|^2 dz \right).$$

- 1 Ben Abdallah, Méhats, Pinaud, '05 : résultat de convergence L^2 pour une donnée initiale selon un mode propre de l'opérateur $-\frac{1}{2}\partial_z^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}V_c(\frac{z}{\varepsilon})$.
- 2 Objet du stage de Master de F.F encadrée par F. Méhats : extension du résultat à une donnée initiale quelconque bornée indépendamment de ε dans l'espace d'énergie.

Le résultats pré-existants pour le plan

Résultats pour le **confinement sur un plan** ($x \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$) : On considère le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t \phi = -\frac{1}{2}\Delta_x \phi + V\phi$$

$$V(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(t, x, z)|^2 dz \right).$$

- 1 Ben Abdallah, Méhats, Pinaud, '05 : résultat de convergence L^2 pour une donnée initiale selon un mode propre de l'opérateur $-\frac{1}{2}\partial_z^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}V_c(\frac{z}{\varepsilon})$.
- 2 Objet du stage de Master de F.F encadrée par F. Méhats : extension du résultat à une donnée initiale quelconque bornée indépendamment de ε dans l'espace d'énergie.

Remise à l'échelle et asymptotique formelle

Changement d'échelle

On opère sur l'équation de départ le changement d'échelle **invariant** L^2 suivant :

$$\Psi(t, x, z) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right)$$

ce qui amène à résoudre le système :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta_x \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + V^\varepsilon \psi^\varepsilon$$

$$V^\varepsilon = \frac{1}{4\pi r^\varepsilon} * |\psi^\varepsilon|^2, \quad r^\varepsilon(x, z) = \sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2 z^2},$$

où H_z désigne le Hamiltonien en z : $H_z = -\partial_z^2 + V_c(z)$.

Changement d'échelle

On opère sur l'équation de départ le changement d'échelle **invariant** L^2 suivant :

$$\Psi(t, x, z) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right)$$

ce qui amène à résoudre le système :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta_x \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + V^\varepsilon \psi^\varepsilon$$

$$V^\varepsilon = \frac{1}{4\pi r^\varepsilon} * |\psi^\varepsilon|^2, \quad r^\varepsilon(x, z) = \sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2 z^2},$$

où H_z désigne le Hamiltonien en z : $H_z = -\partial_z^2 + V_c(z)$.

Changement d'échelle

On opère sur l'équation de départ le changement d'échelle **invariant** L^2 suivant :

$$\Psi(t, x, z) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right)$$

ce qui amène à résoudre le système :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta_x \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + V^\varepsilon \psi^\varepsilon$$

$$V^\varepsilon = \frac{1}{4\pi r^\varepsilon} * |\psi^\varepsilon|^2, \quad r^\varepsilon(x, z) = \sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2 z^2},$$

où H_z désigne le Hamiltonien en z : $H_z = -\partial_z^2 + V_c(z)$.

Remise à l'échelle et asymptotique formelle

Modèle asymptotique

Dans le cas du **confinement sur un plan**, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz \right).$$

Ce qui suggère, par passage à la limite formel le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\Delta_x \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + V \psi^\varepsilon,$$

$$V = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi^\varepsilon|^2 dz \right),$$

$$\psi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z).$$

Remise à l'échelle et asymptotique formelle

Modèle asymptotique

Dans le cas du **confinement sur un plan**, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz \right).$$

Ce qui suggère, par passage à la limite formel le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\Delta_x \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + V \psi^\varepsilon,$$

$$V = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi^\varepsilon|^2 dz \right),$$

$$\psi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z).$$

Filtrage

L'avantage de ce modèle asymptotique est que, comme V ne dépend plus de la variable de confinement z , après filtrage, on obtient un système 2d dans lequel z n'est qu'un paramètre.

Ainsi,

$$\varphi^\varepsilon(t, x, z) = e^{itH_z/\varepsilon^2} \psi^\varepsilon(t, x, z)$$

vérifie le système :

$$i\partial_t \varphi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta_x \varphi^\varepsilon + V \varphi^\varepsilon,$$

$$V = \frac{1}{4\pi|x|} *_x \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi^\varepsilon|^2 dz \right),$$

$$\varphi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z).$$

Énoncé du théorème principal

Théorème principal

Si ψ_0 est une donnée initiale dans l'espace d'énergie

$$\mathcal{H} = \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^3), \sqrt{V_c}\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)\},$$

et si $p \in \left(2, \frac{4}{\max(0, 2-\alpha)}\right)$, on a le résultat de convergence suivant :

$$\left\| \psi^\varepsilon(t, \cdot) - e^{-itH_z/\varepsilon^2} \varphi(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\varepsilon^{1-2/p}$$

localement uniformément en temps, avec $\varphi(t, x, z)$ solution de l'équation qui définit le modèle asymptotique.

Cadre fonctionnel adapté

Pour cette étude, le cadre adapté est le cadre des espaces L^p anisotropes que l'on définit comme suit :

Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, les espaces $L_x^p L_z^q$ et $L_t^r L_x^p L_z^q$ sont définis par :

$$L_x^p L_z^q = \left\{ u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \|u\|_{p,q} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|u(x, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R})}^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

et

$$L_t^r L_x^p L_z^q((0, T) \times \mathbb{R}^3) = L^r((0, T), L_x^p L_z^q(\mathbb{R}^3)).$$

Cadre fonctionnel adapté

Pour cette étude, le cadre adapté est le cadre des espaces L^p anisotropes que l'on définit comme suit :

Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, les espaces $L_x^p L_z^q$ et $L_t^r L_x^p L_z^q$ sont définis par :

$$L_x^p L_z^q = \left\{ u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \|u\|_{p,q} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|u(x, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R})}^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

et

$$L_t^r L_x^p L_z^q((0, T) \times \mathbb{R}^3) = L^r((0, T), L_x^p L_z^q(\mathbb{R}^3)).$$

Asymptotique du noyau de Poisson

Pour rendre rigoureux le passage à la limite formel, on s'intéresse à l'asymptotique du noyau de Poisson.

Asymptotique du noyau de Poisson

Soient $0 < \alpha < 1$ et $2 < p < \frac{4}{2-\alpha}$, soit $f \in L_x^p L_z^1$ telle que $z^\alpha f \in L_x^p L_z^1$, on a alors :

$$\left| \left(\frac{1}{r^\varepsilon} - \frac{1}{|x|} \right) * f(x, z) \right| = r_1^\varepsilon + |z|^{\alpha/2} r_2^\varepsilon$$

avec

$$\|r_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|z^\alpha f\|_{p,1}^{a_i} \|f\|_{p,1}^{1-a_i} \varepsilon^{1-2/p}.$$

Asymptotique du noyau de Poisson

Pour rendre rigoureux le passage à la limite formel, on s'intéresse à l'asymptotique du noyau de Poisson.

Asymptotique du noyau de Poisson

Soient $0 < \alpha < 1$ et $2 < p < \frac{4}{2-\alpha}$, soit $f \in L_x^p L_z^1$ telle que $z^\alpha f \in L_x^p L_z^1$, on a alors :

$$\left| \left(\frac{1}{r^\varepsilon} - \frac{1}{|x|} \right) * f(x, z) \right| = r_1^\varepsilon + |z|^{\alpha/2} r_2^\varepsilon$$

avec

$$\|r_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|z^\alpha f\|_{p,1}^{a_i} \|f\|_{p,1}^{1-a_i} \varepsilon^{1-2/p}.$$

Une adaptation de l'inégalité de Strichartz

Soit \mathbb{A} un opérateur non borné auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ de domaine $\mathcal{D}(\mathbb{A})$. On considère le système d'équations suivant :

$$i\partial_t \Psi = -\frac{1}{2}\Delta_x \Psi + \mathbb{A}\Psi + f, \quad \Psi(0, x, z) = \Psi_0(x, z)$$

où $f \in L^1((0, T), L^2(\mathbb{R}^3))$ est un terme source donné et $\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Alors, pour tout $p \in [2, \infty[$, on a :

$$\|\Psi\|_{p^*, p, 2} \leq C\|\Psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|f\|_{L^1((0, T), L^2(\mathbb{R}^3))}$$

où $p^* = \frac{2p}{p-2}$ et C est une constante indépendante de l'opérateur \mathbb{A} .

éléments de la preuve

En notant ψ^ε la solution du modèle de départ et φ la solution du modèle limite, si $\omega = \psi^\varepsilon - e^{-itH_z/\varepsilon^2}\varphi$, alors ω vérifie :

$$i\partial_t\omega = -\frac{1}{2}\Delta_x\omega + f_1 + f_2,$$

$$\omega(0, \cdot) = 0.$$

On conclut grâce à l'estimation L^2 de l'équation de Schrödinger et aux estimations de f_1 et f_2 obtenues avec les outils présentés précédemment.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problème physique et modèle associé
 - Le cadre global
- 2 Confinement sur un plan
 - Remise à l'échelle et asymptotique formelle
 - Résultat principal
 - Cadre fonctionnel
 - Outils pour la preuve
- 3 **Adaptation au confinement sur un fil**
 - Différence et nouvelle approche
 - Résultat principal
 - Asymptotique du noyau de Poisson
 - Quelques estimations
 - Stabilité du modèle limite
- 4 Perspectives

Le problème physique transposé pour le fil

Système de Schrödinger-Poisson perturbé par un potentiel de confinement pour le confinement sur un fil :

$$i\partial_t\Psi^\varepsilon = -\Delta\Psi^\varepsilon + \mathbb{V}^\varepsilon\Psi^\varepsilon,$$
$$\mathbb{V}^\varepsilon = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + z_1^2 + z_2^2}} * (|\Psi^\varepsilon|^2).$$

$x \in \mathbb{R}$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ sont les directions de transport et de confinement resp.

Le problème physique transposé pour le fil

Système de Schrödinger-Poisson perturbé par un potentiel de confinement pour le confinement sur un fil :

$$i\partial_t \Psi^\varepsilon = -\Delta \Psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} V_c \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \Psi^\varepsilon + \mathbb{V}^\varepsilon \Psi^\varepsilon,$$

$$\mathbb{V}^\varepsilon = \frac{1}{4\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}} * (|\Psi^\varepsilon|^2).$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}$ sont les directions de transport et de confinement resp.

$\frac{1}{\varepsilon^2} V_c \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)$ est le potentiel de confinement.

Remise à l'échelle pour le confinement sur fil

Dans le cas du confinement sur un fil, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz.$$

On est alors amené à faire l'hypothèse d'une densité petite, c'est à dire que l'on suppose que $\|\psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ est de l'ordre de $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$.
D'où la remise à l'échelle et le changement d'inconnue :

$$\Psi^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} \psi^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right),$$

Suit alors le changement correspondant pour le potentiel de Poisson :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} V^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right).$$

Remise à l'échelle pour le confinement sur fil

Dans le cas du confinement sur un fil, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz.$$

On est alors amené à faire l'hypothèse d'une densité petite, c'est à dire que l'on suppose que $\|\psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ est de l'ordre de $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$.

D'où la remise à l'échelle et le changement d'inconnue :

$$\Psi^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} \psi^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right),$$

Suit alors le changement correspondant pour le potentiel de Poisson :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} V^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right).$$

Remise à l'échelle pour le confinement sur fil

Dans le cas du confinement sur un fil, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz.$$

On est alors amené à faire l'hypothèse d'une densité petite, c'est à dire que l'on suppose que $\|\psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ est de l'ordre de $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$.
D'où la remise à l'échelle et le changement d'inconnue :

$$\Psi^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} \psi^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right),$$

Suit alors le changement correspondant pour le potentiel de Poisson :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} V^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right).$$

Remise à l'échelle pour le confinement sur fil

Dans le cas du confinement sur un fil, une étude asymptotique de la solution de l'équation de Poisson donne :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\Psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz.$$

On est alors amené à faire l'hypothèse d'une densité petite, c'est à dire que l'on suppose que $\|\psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ est de l'ordre de $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$.
D'où la remise à l'échelle et le changement d'inconnue :

$$\Psi^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} \psi^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right),$$

Suit alors le changement correspondant pour le potentiel de Poisson :

$$\mathbb{V}^\varepsilon(t, x, z) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \mathbb{V}^\varepsilon \left(t, x, \frac{z}{\varepsilon} \right).$$

Nouveau système

Dans les nouvelles variables, notre système devient :

$$i\partial_t\psi^\varepsilon = -\partial_x^2\psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}H_z\psi^\varepsilon + \frac{1}{|\log\varepsilon|}V^\varepsilon\psi^\varepsilon,$$

$$V^\varepsilon = -\frac{1}{4\pi r^\varepsilon} * |\psi^\varepsilon|^2, \quad r^\varepsilon(x, z) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2|z|^2},$$

$$\psi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z),$$

où H_z désigne le Hamiltonien en z : $H_z = -\Delta_z + V_c(z)$.

Modèle asymptotique

L'asymptotique obtenue pour la solution de l'équation de Poisson quand ε tend vers 0 donne alors :

$$V(t, x, z) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz$$

Ce qui suggère, par passage à la limite formel, le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\partial_x^2 \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\psi^\varepsilon|^2 dz \right) \psi^\varepsilon,$$

$$\psi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z).$$

Modèle asymptotique

L'asymptotique obtenue pour la solution de l'équation de Poisson quand ε tend vers 0 donne alors :

$$V(t, x, z) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi^\varepsilon(t, x, z)|^2 dz$$

Ce qui suggère, par passage à la limite formel, le modèle asymptotique suivant :

$$i\partial_t \psi^\varepsilon = -\partial_x^2 \psi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} H_z \psi^\varepsilon + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\psi^\varepsilon|^2 dz \right) \psi^\varepsilon,$$

$$\psi^\varepsilon(0, x, z) = \psi_0(x, z).$$

Donnée initiale

On introduit ici la plus petite valeur propre de l'opérateur H_z que l'on note E_1 et on considère χ_1 un vecteur propre associé à E_1 . On fait l'hypothèse suivante pour la donnée initiale ψ_0 :

Hypothèse 2

On suppose que la donnée initiale ψ_0 est selon le 1er mode propre de H_z au sens où il existe $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi_0(x, z) = \varphi_0(x)\chi_1(z)$.

On verra par la suite, grâce aux estimations d'énergie que cette hypothèse garantit que ψ^ε reste concentrée sur le 1er mode propre principalement. La projection sur ce mode conduit à l'équation :

$$i\partial_t\varphi = -\partial_x^2\varphi + \frac{E_1}{\varepsilon^2}\varphi + \frac{1}{2\pi}|\varphi|^2\varphi$$

Donnée initiale

On introduit ici la plus petite valeur propre de l'opérateur H_z que l'on note E_1 et on considère χ_1 un vecteur propre associé à E_1 . On fait l'hypothèse suivante pour la donnée initiale ψ_0 :

Hypothèse 2

On suppose que la donnée initiale ψ_0 est selon le 1er mode propre de H_z au sens où il existe $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi_0(x, z) = \varphi_0(x)\chi_1(z)$.

On verra par la suite, grâce aux estimations d'énergie que cette hypothèse garantit que ψ^ε reste concentrée sur le 1er mode propre principalement. La projection sur ce mode conduit à l'équation :

$$i\partial_t\varphi = -\partial_x^2\varphi + \frac{E_1}{\varepsilon^2}\varphi + \frac{1}{2\pi}|\varphi|^2\varphi$$

Énoncé du théorème principal

Théorème principal

Sous les 2 hypothèses précédentes, on a le résultat de convergence suivant :

$$\left\| \psi^\varepsilon(t, x, z) - e^{-itE_1/\varepsilon^2} \varphi(t, x) \chi_1(z) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

localement uniformément en temps, avec $\varphi(t, x)$ solution de l'équation de NLS cubique

$$i\partial_t \varphi = -\partial_x^2 \varphi + \frac{1}{2\pi} |\varphi|^2 \varphi$$

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x).$$

Pour rendre rigoureux le passage à la limite formel dans le modèle on démontre le résultat suivant qui donne un développement asymptotique pour le noyau de Poisson dans les nouvelles variables.

Asymptotique du noyau de Poisson

Soit ψ dans l'espace d'énergie

$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3), \sqrt{V_c} u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$. Alors

$$V^\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\psi(x', z')|^2}{\sqrt{(x - x')^2 + \varepsilon^2 |z - z'|^2}} dx' dz'$$

admet le développement asymptotique suivant :

$$V^\varepsilon(\psi) = -2 \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(x, z)|^2 dz + R^\varepsilon(\psi), \quad (1)$$

avec, pour tout u dans \mathcal{H} :

$$\|R^\varepsilon(\psi)u\|_{L^2} \leq C \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

Les estimations "gratuites" et les problèmes

Estimation L^2 : pour tout $t \in (0, T)$

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Estimation d'énergie après changement d'échelle : pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = cste. \end{aligned}$$

où la constante est bornée indépendamment de ε .

Cette deuxième estimation fournit une borne indépendante de ε

pour $\|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ et $\|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

mais pas pour $\|\partial_x \psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Les estimations "gratuites" et les problèmes

Estimation L^2 : pour tout $t \in (0, T)$

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Estimation d'énergie après changement d'échelle : pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = cste. \end{aligned}$$

où la constante est bornée indépendamment de ε .

Cette deuxième estimation fournit une borne indépendante de ε

pour $\|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ et $\|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

mais pas pour $\|\partial_x \psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Les estimations "gratuites" et les problèmes

Estimation L^2 : pour tout $t \in (0, T)$

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Estimation d'énergie après changement d'échelle : pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = cste. \end{aligned}$$

où la constante est bornée indépendamment de ε .

Cette deuxième estimation fournit une borne indépendante de ε

pour $\|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ et $\|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

mais pas pour $\|\partial_x \psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Les estimations "gratuites" et les problèmes

Estimation L^2 : pour tout $t \in (0, T)$

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Estimation d'énergie après changement d'échelle : pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = cste. \end{aligned}$$

où la constante est bornée indépendamment de ε .

Cette deuxième estimation fournit une borne indépendante de ε

pour $\|\partial_z \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ et $\|\sqrt{V_c} \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

mais pas pour $\|\partial_x \psi^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Estimation d'énergie pour une donnée sur le 1er mode

On écrit :

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = \varphi^\varepsilon(t, x)\chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \text{ avec } r^\varepsilon = \sum_{p \geq 2} \varphi_p^\varepsilon \chi_p \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_p \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation L^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) &= E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_1 \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(0) |\psi_0|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie pour une donnée sur le 1er mode

On écrit :

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = \varphi^\varepsilon(t, x)\chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \text{ avec } r^\varepsilon = \sum_{p \geq 2} \varphi_p^\varepsilon \chi_p \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_p \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation L^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) = E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_1 \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(0) |\psi_0|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie pour une donnée sur le 1er mode

On écrit :

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = \varphi^\varepsilon(t, x)\chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \text{ avec } r^\varepsilon = \sum_{p \geq 2} \varphi_p^\varepsilon \chi_p \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_p \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation L^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) = E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_1 \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(0) |\psi_0|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie pour une donnée sur le 1er mode

On écrit :

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = \varphi^\varepsilon(t, x)\chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \text{ avec } r^\varepsilon = \sum_{p \geq 2} \varphi_p^\varepsilon \chi_p \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_p \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation L^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) = & E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_1 \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(0) |\psi_0|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie pour une donnée sur le 1er mode

On écrit :

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = \varphi^\varepsilon(t, x)\chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \text{ avec } r^\varepsilon = \sum_{p \geq 2} \varphi_p^\varepsilon \chi_p \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp.$$

L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_p \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(t) |\psi^\varepsilon(t)|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation L^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) &= E_1 \|\varphi^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \sum_{p \geq 2} E_1 \|\varphi_p^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|\partial_x \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{|\log \varepsilon|} \|V^\varepsilon(0) |\psi_0|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

En notant à présent que par hypothèse sur E_1 , on a :

$$\forall p \geq 2, E_p \geq E_2 > E_1,$$

on obtient les deux estimations suivantes :

- ① $\|r^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\varepsilon^2$, ce qui prouve qu'asymptotiquement ψ^ε est concentrée sur le 1er mode propre et justifie a posteriori la projection du modèle limite sur ce mode.
- ② $\|\partial_x \psi^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C$ où C est indépendante de ε .

En notant à présent que par hypothèse sur E_1 , on a :

$$\forall p \geq 2, E_p \geq E_2 > E_1,$$

on obtient les deux estimations suivantes :

- ① $\|r^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\varepsilon^2$, ce qui prouve qu'asymptotiquement ψ^ε est concentrée sur le 1er mode propre et justifie a posteriori la projection du modèle limite sur ce mode.
- ② $\|\partial_x \psi^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C$ où C est indépendante de ε .

Preuve du théorème : un argument de stabilité de NLS cubique

On écrit

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = e^{-itE_1/\varepsilon^2} \varphi^\varepsilon(t, x) \chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \quad r^\varepsilon \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp$$

et on projette l'équation de départ sur le 1er mode propre.

On obtient :

$$i\partial_t \varphi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \varphi^\varepsilon + 2|\varphi^\varepsilon|^2 \varphi^\varepsilon + f^\varepsilon$$

avec

$$f^\varepsilon = \|r^\varepsilon(t, x, \cdot)\|_{L_x^2}^2 \varphi^\varepsilon + \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{\mathbb{R}^2} R^\varepsilon(\psi^\varepsilon) \psi^\varepsilon \overline{\chi_1} dz.$$

Le théorème principal découle alors de la stabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique et des estimations indépendantes de ε que nous avons exposées.

Preuve du théorème : un argument de stabilité de NLS cubique

On écrit

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = e^{-itE_1/\varepsilon^2} \varphi^\varepsilon(t, x) \chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \quad r^\varepsilon \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp$$

et on projette l'équation de départ sur le 1er mode propre.

On obtient :

$$i\partial_t \varphi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \varphi^\varepsilon + 2|\varphi^\varepsilon|^2 \varphi^\varepsilon + f^\varepsilon$$

avec

$$f^\varepsilon = \|r^\varepsilon(t, x, \cdot)\|_{L_z^2}^2 \varphi^\varepsilon + \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{\mathbb{R}^2} R^\varepsilon(\psi^\varepsilon) \psi^\varepsilon \overline{\chi_1} dz.$$

Le théorème principal découle alors de la stabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique et des estimations indépendantes de ε que nous avons exposées.

Preuve du théorème : un argument de stabilité de NLS cubique

On écrit

$$\psi^\varepsilon(t, x, z) = e^{-itE_1/\varepsilon^2} \varphi^\varepsilon(t, x) \chi_1(z) + r^\varepsilon(t, x, z) \quad r^\varepsilon \in \text{Vect}(\chi_1)^\perp$$

et on projette l'équation de départ sur le 1er mode propre.

On obtient :

$$i\partial_t \varphi^\varepsilon = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \varphi^\varepsilon + 2|\varphi^\varepsilon|^2 \varphi^\varepsilon + f^\varepsilon$$

avec

$$f^\varepsilon = \|r^\varepsilon(t, x, \cdot)\|_{L_z^2}^2 \varphi^\varepsilon + \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{\mathbb{R}^2} R^\varepsilon(\psi^\varepsilon) \psi^\varepsilon \overline{\chi_1} dz.$$

Le théorème principal découle alors de **la stabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique** et des estimations indépendantes de ε que nous avons exposées.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Problème physique et modèle associé
 - Le cadre global
- 2 Confinement sur un plan
 - Remise à l'échelle et asymptotique formelle
 - Résultat principal
 - Cadre fonctionnel
 - Outils pour la preuve
- 3 Adaptation au confinement sur un fil
 - Différence et nouvelle approche
 - Résultat principal
 - Asymptotique du noyau de Poisson
 - Quelques estimations
 - Stabilité du modèle limite
- 4 Perspectives

Perspectives

- 1 **S'affranchir de l'hypothèse 2**; idéalement on voudrait se contenter de ψ_0^ε bornée indépendamment de ε dans \mathcal{H} . Le problème principal est d'obtenir une borne L^2 de $\partial_x \psi^\varepsilon$ indépendante de ε .
- 2 **Améliorer la convergence** vers le modèle asymptotique : on a présenté un résultat de convergence en $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$. En fait a trouvé une écriture de R^ε de la forme :

$$R^\varepsilon(x, z) = R_1(x, z) + \varepsilon^\beta R_2^\varepsilon(x, z).$$

où R_1 est obtenu explicitement. En incluant le terme $\frac{R_1}{|\log \varepsilon|}$ dans le modèle asymptotique, on s'attend à trouver un modèle intermédiaire avec une erreur en $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^\beta}{|\log \varepsilon|}\right)$.

Perspectives

- 1 **S'affranchir de l'hypothèse 2** ; idéalement on voudrait se contenter de ψ_0^ε bornée indépendamment de ε dans \mathcal{H} . Le problème principal est d'obtenir une borne L^2 de $\partial_x \psi^\varepsilon$ indépendante de ε .
- 2 **Améliorer la convergence** vers le modèle asymptotique : on a présenté un résultat de convergence en $\frac{1}{|\log \varepsilon|}$. En fait a trouvé une écriture de R^ε de la forme :

$$R^\varepsilon(x, z) = R_1(x, z) + \varepsilon^\beta R_2^\varepsilon(x, z).$$

où R_1 est obtenu explicitement. En incluant le terme $\frac{R_1}{|\log \varepsilon|}$ dans le modèle asymptotique, on s'attend à trouver un modèle intermédiaire avec une erreur en $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^\beta}{|\log \varepsilon|}\right)$.