

Développements asymptotiques raccordés et développement multi-échelle, quelles différences ?

G. VIAL

IRMAR, ENS de Cachan, antenne de Bretagne

avec S. Tordeux et M. Dauge

2^e journée d'équipe d'analyse numérique

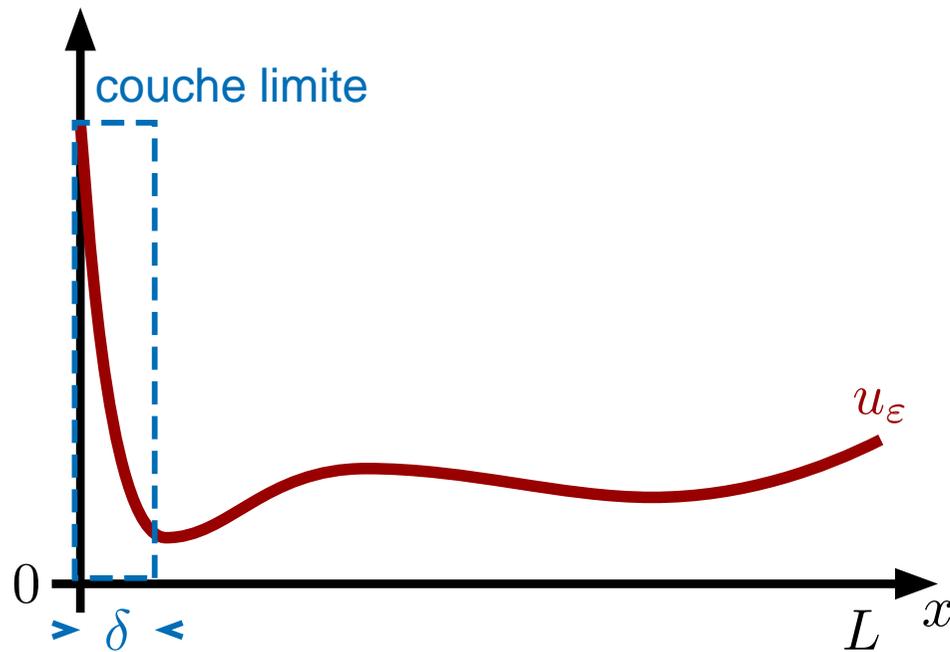


Rennes, 25 octobre 2007



Perturbations singulières

Un modèle académique



Le comportement de u_ε est

- ▶ “régulier” loin de 0 ,
- ▶ “singulier” au voisinage de 0

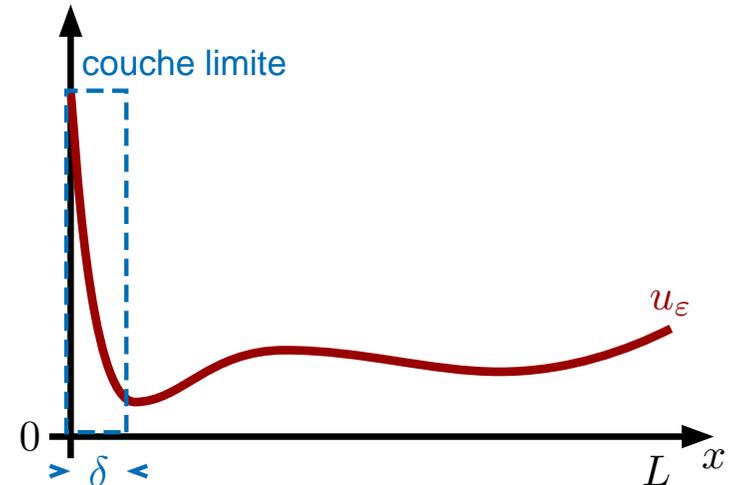
$$\delta \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Traditionnellement, 2 approches :

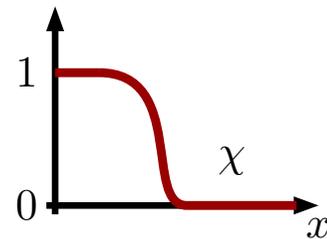
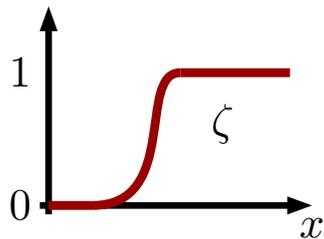
- ◇ Développement asymptotique multi-échelle (MSE),
- ◇ Développements asymptotiques raccordés (MAE).

Développement asymptotique multi-échelle

- ▶ approximation **globale** de u_ε sur $[0, L]$,
- ▶ **superposition** de 2 développements :
 - l'un en variable physique/lente x ,
 - l'autre en variable dilatée/rapide $y = x/\varepsilon$.
- ▶ utilisation de **fonctions de troncature**.



$$u_\varepsilon(x) \simeq \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) u^k(x) + \chi(x) \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) U^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$



$$\begin{aligned} \delta_{k+1}(\varepsilon) &= o(\delta_k(\varepsilon)) \\ \delta'_{k+1}(\varepsilon) &= o(\delta'_k(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (\text{Ex. } \varepsilon^{\lambda_k}, \lambda_k \nearrow)$$

Le développement est valide partout, les termes coexistent dans la zone

$$\text{supp}\chi \cap \text{supp}\zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

Développement asymptotique multi-échelle

$$u_\varepsilon(x) \simeq \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) u^k(x) + \chi(x) \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) U^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Avantages

- ▶ fournit une approximation de u_ε sur $[0, L]$ tout-entier,
- ▶ permet l'obtention d'estimations optimales du reste,
- ▶ méthode constructive rigoureuse.

Inconvénients

- ▶ les termes u^k et U^k ne sont pas intrinsèques, mais dépendent de ζ et χ .

Références

- ▶ Maz'ya, Nazarov, Plamenevskij 79,
- ▶ Caloz, Costabel, Dauge, Bendali, Nicaise, Vial, etc.

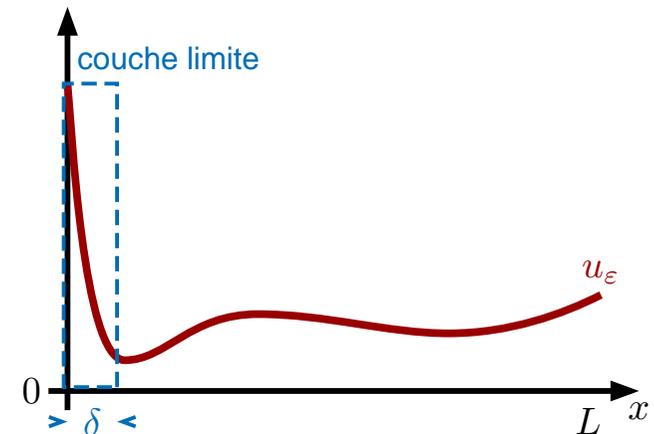
Développements asymptotiques raccordés

- ▶ Deux développements :

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) v^k(x) \text{ loin de } 0, \quad (\text{régulier, extérieur})$$

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) V^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ proche de } 0, \quad (\text{local, intérieur})$$

- ▶ Aucun des 2 n'est valide sur $[0, L]$,
- ▶ Il y a en général chevauchement dans une **région de transition**, dans laquelle ils doivent être **raccordés**.



Développements asymptotiques raccordés

$$u_\varepsilon(x) \simeq \begin{cases} \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) v^k(x) & \text{loin de } 0, \\ \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) V^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{proche de } 0. \end{cases}$$

Avantages

- ▶ construction intrinsèques des termes v^k et V^k ,
- ▶ méthode largement usitée dans les applications.

Inconvénients

- ▶ justification parfois peu convaincante des conditions de raccord,
- ▶ pas d'estimations immédiates du reste.

Références

- ▶ Van-Dyke 75, Leguillon-Sanchez-Palencia 87, Il'in 92,
- ▶ Joly-Tordeux 06.

Comparaison MSE/MAE dans un cas modèle

Plan de l'exposé

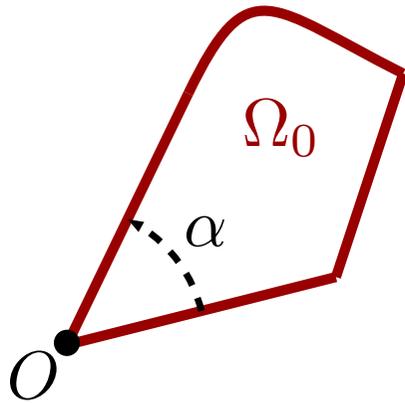
I. Le problème du “coin arrondi”

II. MSE : dérivation des termes et estimations

III. MAE : dérivation des termes et estimations

IV. Comparaison des développements

Rappel sur la théorie des coins



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

avec $\text{supp } f \subset\subset \Omega_0$.

Théorème. [cf. Kondrat'ev 67, Grisvard 85]

$$u_0 = \sum_{k=1}^n c_{k\lambda} \mathfrak{s}^{k\lambda} + u_{0,n},$$

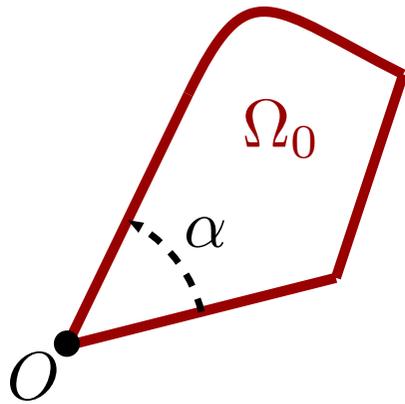
avec $\lambda = \pi/\alpha$, et

- $c_{k\lambda} \in \mathbb{R}$, coefficients de singularité,
- $\mathfrak{s}^{k\lambda} = r^{k\lambda} \sin(k\lambda\theta)$, fonction singulière,
- $u_{0,n} \in H^{(n+1)\lambda-0}$, partie régulière.

Remarque.

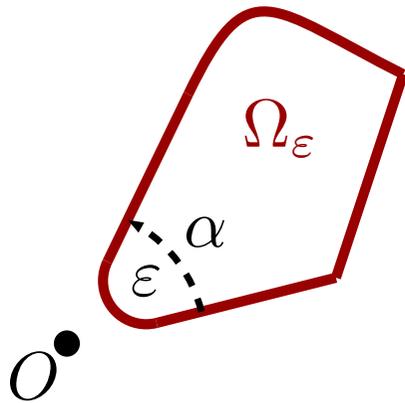
- ▶ si $\alpha = \pi$, c'est Taylor !
- ▶ Si $\alpha > \pi$, $\mathfrak{s}^\lambda \notin H^2(\Omega_0)$,
- ▶ si $\alpha < \pi$, $\mathfrak{s}^\lambda \in H^2(\Omega_0)$.

Le problème du coin arrondi



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

avec $\text{supp } f \subset\subset \Omega_0$.

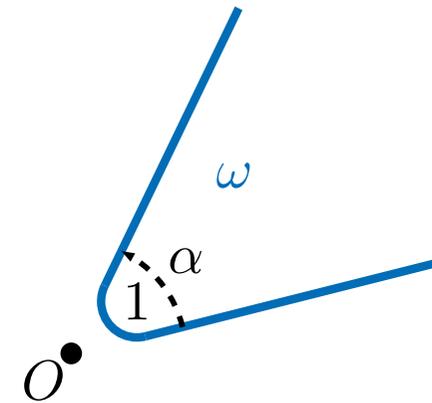
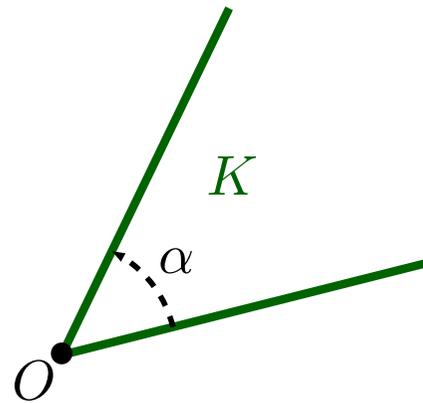
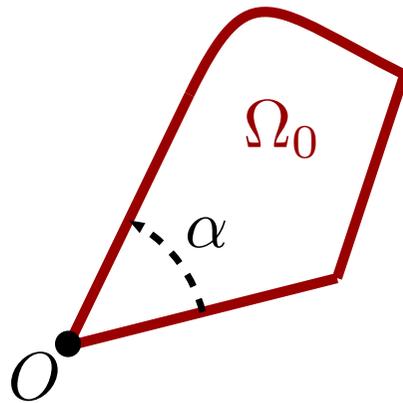


$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Question : *que se passe-t-il si on régularise le coin à l'échelle ε ?*

- ▶ u_ε est complètement régulier... mais doit être proche de u_0 ;
- ▶ comment apparaissent les singularités à la limite ?

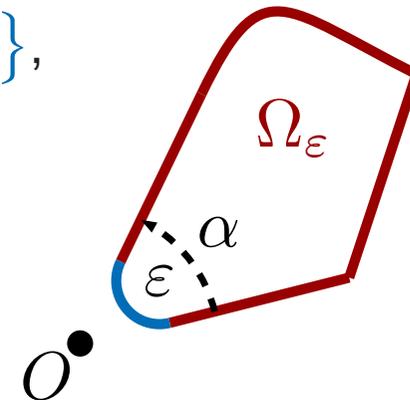
Description géométrique



Ω_0 coïncide avec K à l'origine (i.e. $|x| < r_*$).

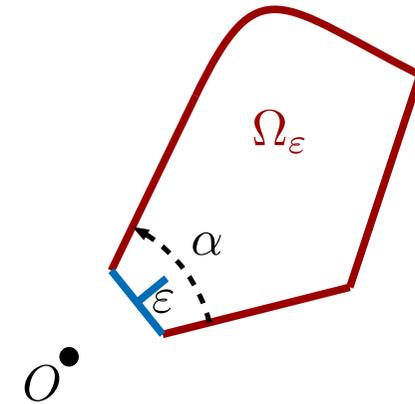
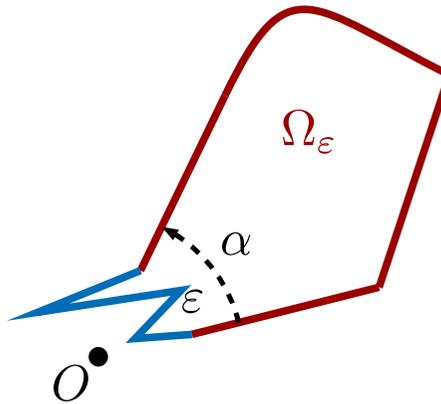
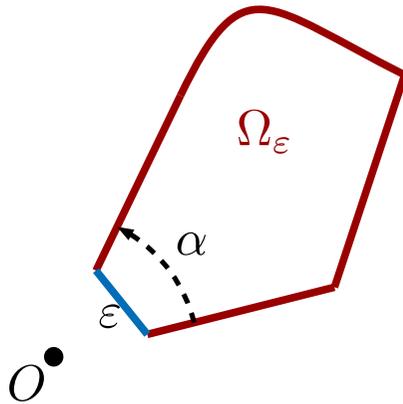
ω coïncide avec K à l'infini (i.e. $|y| > r^*$).

- ▶ $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 ; |x| > \varepsilon r_*\} \cup \{x \in \varepsilon \omega ; |x| < r^*\},$
- ▶ $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega_0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0,$
- ▶ $\frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \omega$ quand $\varepsilon \rightarrow 0,$

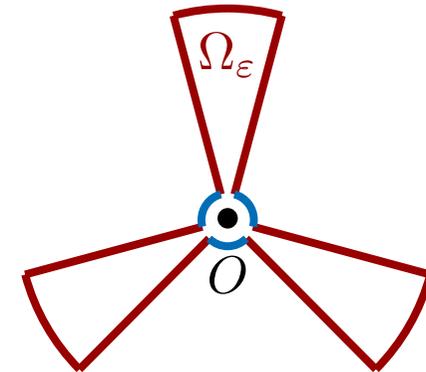
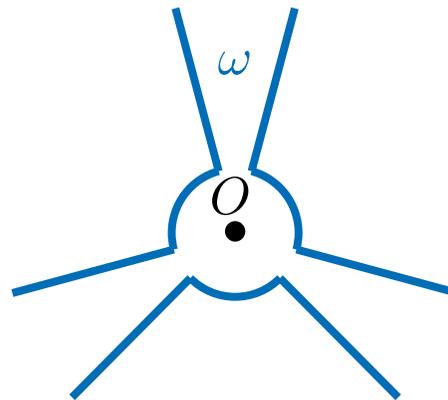
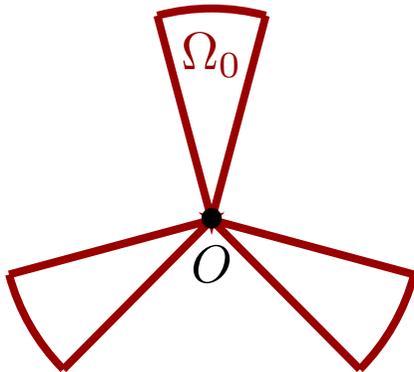


Autres géométries possibles

On peut "rognier" le coin de diverses manières...

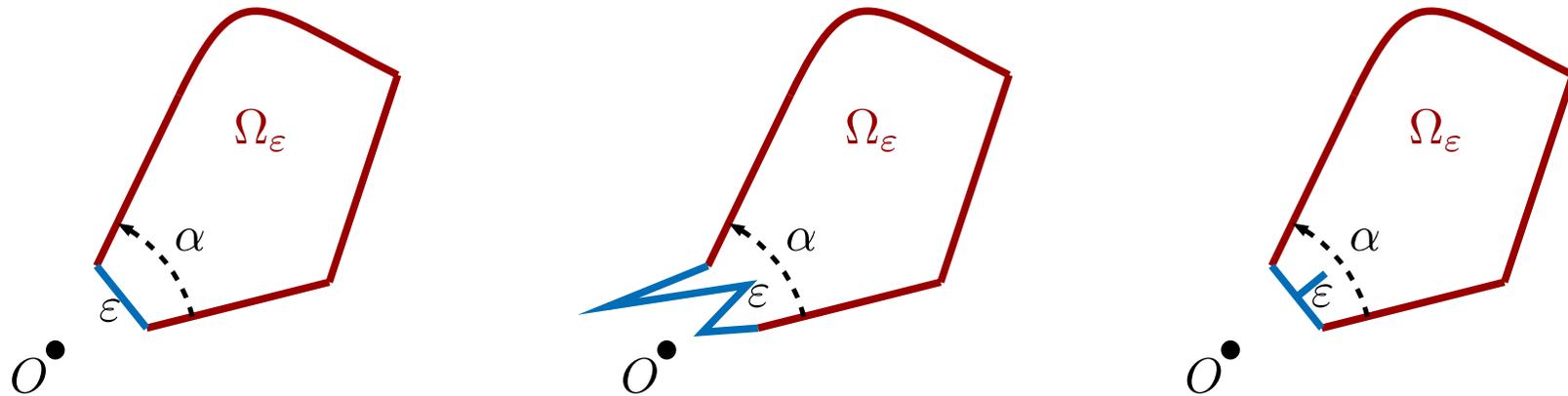


On peut prendre autre chose qu'un secteur pour K ...



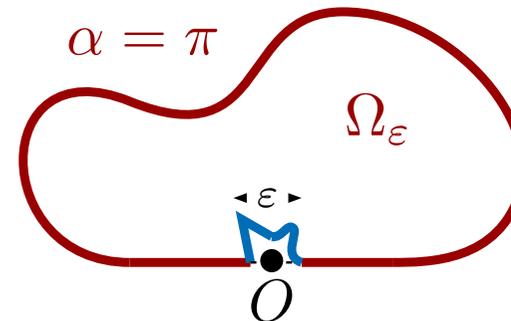
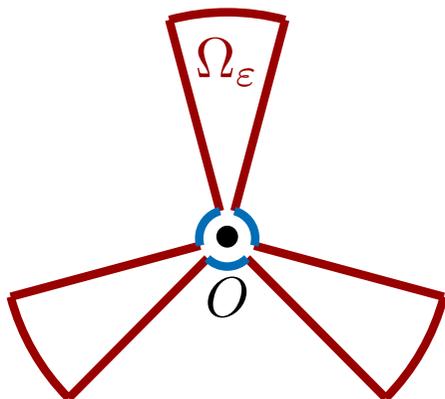
Autres géométries possibles

On peut “rogné” le coin de diverses manières...



On peut changer K ...

Qui peut le plus, peut le moins...



Limitation : les motifs considérés sont **autosimilaires**.

Développement multi-échelle (MSE)

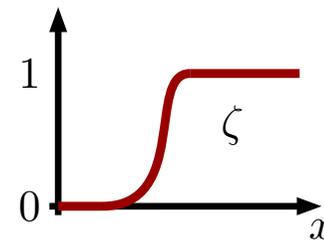
Construction des premiers termes (1/4)

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 ; |x| > \varepsilon r_*\} \cup \{x \in \varepsilon \omega ; |x| < r^*\},$$

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

- ▶ Un bon début de développement semble être u_0 , solution de (P_0) ,
- ▶ mais u_0 n'est pas définie sur Ω_ε !
- ▶ on tronque avec ζ : $\zeta(y) = 0$ si $|y| < r_*$ et 1 si $|y| > 2r_*$.

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_0(x) + r_\varepsilon^0(x).$$



- ▶ il faut évaluer le reste r_ε^0 ...

Développement multi-échelle (MSE)

Construction des premiers termes (2/4)

Par construction, r_ε^0 vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^0 &= \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ r_\varepsilon^0 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^0(x) &= f(x) - \Delta_x \left[\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) \right] \\ &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_0(x). \end{aligned}$$

- ▶ $\text{supp}(\varphi_\varepsilon^0)$ est contenu dans la couronne $\varepsilon r_* < |x| < 2\varepsilon r_*$.
- ▶ On va exploiter le scaling $y = \frac{x}{\varepsilon}$ en développant u_0 en fonctions homogènes :

$$u_0(x) = b_\lambda^0 \mathbf{s}^\lambda(x) + b_{2\lambda}^0 \mathbf{s}^{2\lambda} + \dots$$

Développement multi-échelle (MSE)

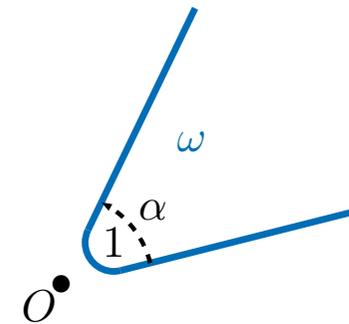
Construction des premiers termes (3/4)

En utilisant $u_0(x) = b_\lambda^0 \mathfrak{s}^\lambda(x) + b_{2\lambda}^0 \mathfrak{s}^{2\lambda} + \dots$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^0(x) &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_0(x) \\ &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta(y) u_0(\varepsilon y) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \zeta(y) \cdot \nabla_x u_0(\varepsilon y) \\ &= -\varepsilon^{\lambda-2} b_\lambda^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^\lambda(y) - \varepsilon^{2\lambda-2} b_{2\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{2\lambda}(y) + \dots \end{aligned}$$

- ▶ le **terme dominant** ne fait intervenir que la variable y ,
- ▶ on introduit donc le **profil** U^λ , solution de

$$\begin{cases} -\Delta U^\lambda &= b_\lambda^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^\lambda & \text{dans } \omega, \\ U^\lambda &= 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$



Lemme. Un tel U^λ existe, est unique et on a le développement à l'infini

$$U^\lambda(y) = B_\lambda^\lambda \mathfrak{s}^{-\lambda}(y) + B_{2\lambda}^\lambda \mathfrak{s}^{-2\lambda}(y) + \dots$$

Développement multi-échelle (MSE)

Construction des premiers termes (4/4)

- ▶ Un nouveau début de développement s'écrit

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_0(x) + \chi(x)\varepsilon^\lambda U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^\lambda,$$

avec $\chi(x) = 1$ si $|x| < r^*$ et 0 si $|x| > 2r^*$.

- ▶ A-t-on avancé ? Oui, car

$$\Delta r_\varepsilon^\lambda = [\Delta_x, \zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})]u_0(x) - \underbrace{\varepsilon^{\lambda-2} \chi(x) b_\lambda^0}_{=1} [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^\lambda [\Delta, \chi] U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\diamond [\Delta_x, \zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})]u_0(x) = \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{p\lambda-2} b_{p\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{p\lambda}(y) + \dots,$$

$$\diamond \varepsilon^\lambda [\Delta, \chi] U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{2\lambda} B_\lambda^\lambda \varphi^\lambda(x) + \dots,$$

$$\text{donc } \Delta r_\varepsilon^\lambda = \varepsilon^{2\lambda-2} b_{2\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{2\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{2\lambda} B_\lambda^\lambda \varphi^\lambda(x) + \dots$$

Développement multi-échelle (MSE)

Le développement complet

Théorème. u_ε admet le développement

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{\ell=1}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} U^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}(x),$$

avec

- ▶ $\|\zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})u^{\ell\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ et $\|\chi U^{\ell\lambda}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$,
- ▶ et l'estimation optimale du reste $\|r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda}$.

Preuve. Par construction, $\|\Delta r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda-1}$.

À l'aide d'une estimation *a priori* sur (P_ε) **indépendante de** ε , on obtient

$$\|r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda-1},$$

qu'on améliore en écrivant $r_\varepsilon^{(n-1)\lambda} = r_\varepsilon^{(n+1)\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n\lambda})$. □

Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

Construction des termes

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{l \geq 0} \varepsilon^{l\lambda} v^{l\lambda}(x) \text{ loin de } 0,$$

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{l \geq 0} \varepsilon^{l\lambda} V^{l\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ proche de } 0,$$

- ▶ On injecte les développements dans (P_ε) , à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v^{l\lambda} = f \delta_\ell^0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ v^{l\lambda} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta V^{l\lambda} = 0 \quad \text{dans } \omega, \\ V^{l\lambda} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right.$$

- ▶ On ne peut imposer à $v^{l\lambda}$ et $V^{l\lambda}$ d'être variationnels, sinon ils seraient nuls !
on doit permettre à $v^{l\lambda}$ d'exploser en 0 et $V^{l\lambda}$ à l'infini.
- ▶ Les 2 développements doivent être **raccordés**...

Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

Conditions de raccord (1/2)

- ▶ Les différents termes se développent en fonctions singulières

$$v^{\ell\lambda} = \sum_{p \geq 1} \left[a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda} + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda} \right],$$

$$V^{\ell\lambda} = \sum_{p \geq 1} \left[A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda} + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda} \right].$$

- ▶ On souhaite faire coïncider les deux développements dans une zone où

$$|x| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{x}{\varepsilon} \right| \gg 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda}(x) \right] \\ \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \end{array} \right.$$

Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

Conditions de raccord (2/2)

- ▶ On égale les deux expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda}(x) \right] \\ \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \end{array} \right.$$

en utilisant l'homogénéité des fonctions singulières : $\mathfrak{s}^{\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-\mu} \mathfrak{s}^{\mu}(x)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} = B_{p\lambda}^{(\ell-p)\lambda} \quad (0 \text{ si } \ell < p), \\ A_{p\lambda}^{\ell\lambda} = b_{p\lambda}^{(\ell-p)\lambda} \quad (0 \text{ si } \ell < p). \end{array} \right.$$

- ▶ Principe de raccord de Van-Dyke : *“the m-term inner expansion of (the n-term outer expansion) = the n-term outer expansion of (the m-term inner expansion).”*

Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

Estimation d'erreur

- Pour obtenir une estimation d'erreur, il faut une **approximation globale**...

- soit η_ε telle que $\eta_\varepsilon \rightarrow 0$ et $\frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$, ψ une troncature et

$$\hat{u}_\varepsilon^{n\lambda}(x) = \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^n \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell=0}^n \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- **Theorème.** $\|u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon^{n\lambda}(x)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\left(\eta_\varepsilon^{(n+1)\lambda} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_\varepsilon}\right)^{(n+1)\lambda}\right).$
- l'estimation est optimale pour $\eta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, l'erreur est alors en $\varepsilon^{(n+1)\lambda/2}$.
- on peut retrouver les erreurs optimales en $\varepsilon^{(n+1)\lambda}$ localement dans chaque zone (proche de 0 et loin de 0).

Comparaison des développements (1/2)

$$\text{(MSE)} \quad u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{\ell=1}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} U^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}(x)$$

$$\text{(MAE)} \quad u_\varepsilon(x) \underset{0}{\simeq} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(x) \underset{\infty}{\simeq} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- À l'aide des estimations locales optimales,

$$u^{\ell\lambda} = v^{\ell\lambda} \quad \text{loin de } 0,$$

$$U^{\ell\lambda} = V^{\ell\lambda} \quad \text{près de } 0.$$

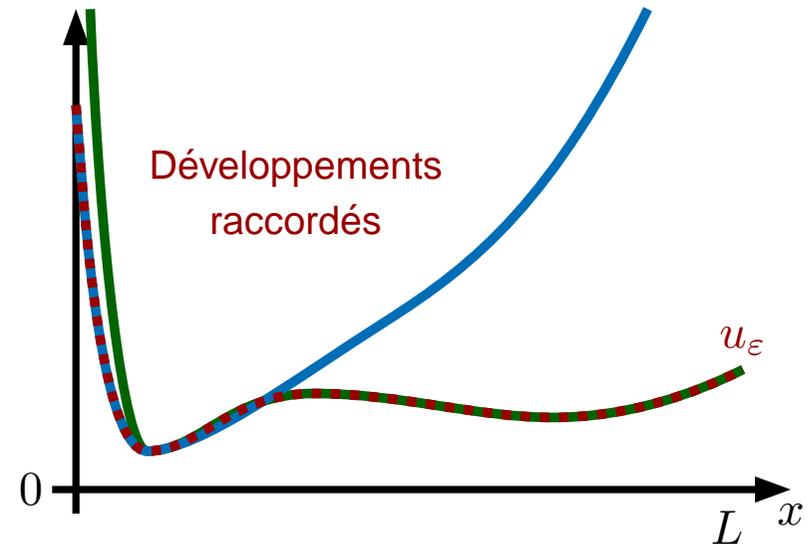
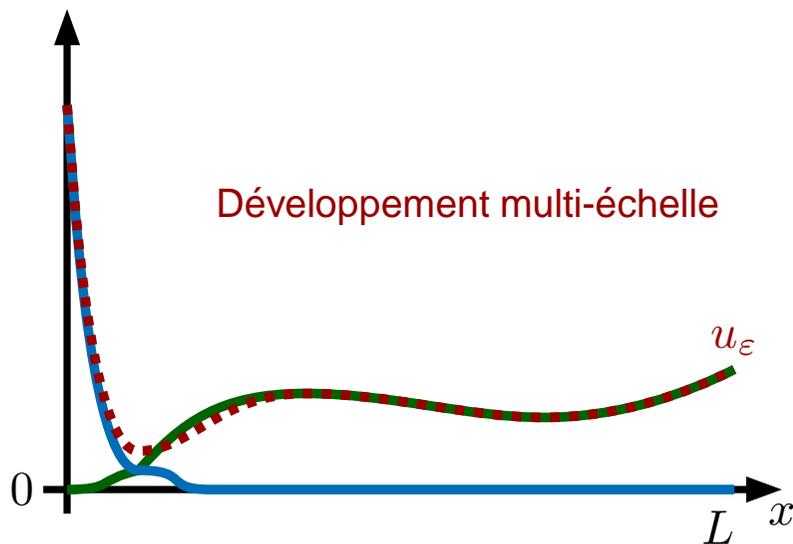
- En fait, on peut montrer les relations

$$u^{\ell\lambda}(x) = v^{\ell\lambda}(x) - \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x),$$

$$U^{\ell\lambda}(y) = V^{\ell\lambda} - \zeta(y) \sum_{p=1}^{\ell} A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}(y).$$

Comparaison des développements (2/2)

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\ell\lambda}(x) = v^{\ell\lambda}(x) - \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x), \\ U^{\ell\lambda}(y) = V^{\ell\lambda} - \zeta(y) \sum_{p=1}^{\ell} A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}(y). \end{array} \right.$$



Conclusions

- ▶ Les deux développements fournissent les mêmes informations **locales**,
- ▶ l'obtention d'estimations pour **MAE** est une technique **MSE**...!
- ▶ on peut passer d'un développement à l'autre en ajoutant/retranchant des fonctions singulières,
- ▶ le choix est une question de goût. . .

Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{\ell \geq 0} \sum_{p=1}^{\ell-1} \varepsilon^{\lambda\ell} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) \end{aligned}$$

Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{\ell \geq 0} \sum_{p=1}^{\ell-1} \varepsilon^{\lambda(\ell-p)} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$,

$$\text{d'où } \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x)$$

$$= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{j \geq 0} \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{\lambda j} a_{p\lambda}^{(j+p)\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{j \geq 0} \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{\lambda j} \underbrace{a_{p\lambda}^{(j+p)\lambda}}_{=B_{p\lambda}^{\ell\lambda}} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

soit une contribution en variable rapide y .