Influence de la dimension dans l'homogénéisation de l'effet Hall

M. Briane & G.W. Milton
& D. Manceau (cas 2d)

Journée Équipe d'Analyse Numérique
25 octobre 2007

I) L'effet Hall

Sous l'effet d'un faible champ magnétique h une densité de charges q se déplaçant dans un conducteur induit un champ électrique transversal $E_t(h) \perp$ au courant j, tel que

$$E(h) = E + E_t(h) + o(h) = \rho\, j + E_t(h) + o(h).$$

La résistivité admet le développement

$$\rho(h) = \rho + \mathcal{R} \cdot h + o(h),$$
$$E_t(h) = (\mathcal{R} \cdot h)\, j \perp j \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{R} \cdot h)^T = -(\mathcal{R} \cdot h).$$

Dans le cas isotrope

$$E_t(h) = r\,(j \times h),$$

où r est le coefficient de Hall.

En physique, le signe de r détermine le signe de q. D'où un composite isotrope constitué de phases à coefficient de Hall positif devrait avoir un coefficient de Hall positif.

C'est le cas en $2d$ mais faux en $3d$!

II) Homogénéisation & effet Hall

Extension de l'approche de Bergman (83) pour des composites périodiques.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

ε représente une suite de microstructures avec une conductivité symétrique $\alpha I_d \leq \sigma^\varepsilon \leq \beta I_d$, p.p. dans Ω, où $\alpha, \beta > 0$.

Le champ magnétique h induit une conductivité perturbée $\sigma^\varepsilon(h)$ telle que

$$\sigma^\varepsilon(h) = \sigma^\varepsilon + \mathcal{S}^\varepsilon \cdot h + o(h), \quad (\mathcal{S}^\varepsilon \cdot h)^T = -(\mathcal{S}^\varepsilon \cdot h).$$

De même la résistivité vérifie

$$\rho^\varepsilon(h) := \sigma^\varepsilon(h)^{-1} = \rho^\varepsilon + \mathcal{R}^\varepsilon \cdot h + o(h),$$
$$\text{avec} \quad (\mathcal{R}^\varepsilon \cdot h)^T = -(\mathcal{R}^\varepsilon \cdot h).$$

$\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon(h)$ H-converge au sens de Murat-Tartar (77) vers les conductivités homogénéisées $\sigma^*, \sigma^*(h)$ respectivement.

En supposant $|\sigma^\varepsilon(h)-\sigma^\varepsilon(k)|\le c\,|h-k|$, on a

$$\sigma^*(h)=\sigma^*+\mathcal{S}^*\cdot h+o(h),\ \ (\mathcal{S}^*\cdot h)^T=-(\mathcal{S}^*\cdot h).$$

Soit $P^\varepsilon := DU^\varepsilon$ le correcteur associé à σ^ε tq

$$\left\{\begin{array}{rcll}\mathrm{Div}\,(\sigma^\varepsilon DU^\varepsilon) & = & \mathrm{Div}\,(\sigma^*) & \text{in } \Omega\\ U^\varepsilon(x) & = & x & \text{on } \partial\Omega,\end{array}\right. \qquad (1)$$

qui vérifie d'après la théorie de la H-convergence

$$\left\{\begin{array}{rcl}P^\varepsilon & \rightharpoonup & I_d\\ \sigma^\varepsilon P^\varepsilon & \rightharpoonup & \sigma^*\end{array}\right. \qquad L^2(\Omega)^{d\times d}\ \text{faible.}$$

Puisque $P^\varepsilon(h)=P^\varepsilon+\mathcal{P}^\varepsilon\cdot h+o(h)$ et $\mathcal{P}^\varepsilon\cdot h\rightharpoonup 0$, on a par le lemme div-rot de Murat-Tartar,

$$\begin{aligned}&P^\varepsilon(h)^T\sigma^\varepsilon(h)P^\varepsilon(h)=(P^\varepsilon)^T\sigma^\varepsilon P^\varepsilon+(P^\varepsilon)^T(\mathcal{S}^\varepsilon\cdot h)P^\varepsilon\\ &+(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon)^T(\mathcal{P}^\varepsilon\cdot h)+(\mathcal{P}^\varepsilon\cdot h)^T\sigma^\varepsilon P^\varepsilon+o(h)\\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup}\ \sigma^*(h)\ =\sigma^*+\lim_{\mathcal{D}'(\Omega)^{d\times d}}\left[(P^\varepsilon)^T(\mathcal{S}^\varepsilon\cdot h)P^\varepsilon\right]+o(h)\\ &\qquad\qquad\qquad =\sigma^*+\mathcal{S}^*\cdot h+o(h).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$(P^\varepsilon)^T\,(\mathcal{S}^\varepsilon\cdot h)\,P^\varepsilon\ \rightharpoonup\ \mathcal{S}^*\cdot h\quad \mathcal{D}'(\Omega)^{d\times d}. \qquad (2)$$

III) Le cas bidimensionnel

Les 1ers termes du développement asymptotique de $\rho^\varepsilon(h)$, $\sigma^\varepsilon(h)$ sont

$$\begin{cases} \mathcal{R}^\varepsilon \cdot h &= -(\mathcal{R}^\varepsilon \cdot h)^T &= r_\varepsilon h\, J \\ \mathcal{S}^\varepsilon \cdot h &= -(\mathcal{S}^\varepsilon \cdot h)^T &= s_\varepsilon h\, J \end{cases} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où r_ε est le coefficient de Hall.

D'après les égalités

$$\rho^\varepsilon(h)\,\sigma^\varepsilon(h) = \rho^*(h)\,\sigma^*(h) = I_2,$$

on a

$$s_\varepsilon = -\det(\sigma^\varepsilon)\, r_\varepsilon \quad \text{et} \quad s_* = -\det(\sigma^*)\, r_*. \quad (3)$$

Alors par (2) et $(P^\varepsilon)^T J P^\varepsilon = \det(P^\varepsilon)\, J$, le coefficient de Hall homogénéisé est donné par

$$\det(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon)\, r_\varepsilon \rightharpoonup \det(\sigma^*)\, r_* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4)$$

On en déduit le résultat de positivité suivant :

Théorème. *Supposons que* r_1, r_2 *sont deux fonctions continues telles que* $r_1 \le r_\varepsilon \le r_2$ *p.p. dans* Ω. *Alors* $r_1 \le r_* \le r_2$ *p.p. dans* Ω.

La preuve repose sur la combinaison :

- toute H-limite comme $\sigma^*(h)$, s'écrit comme limite simple de H-limites périodiques ;
- d'après Alessandrini-Nesi (01) :
  en $2d$ le déterminant d'un correcteur périodique est > 0 p.p. dans $\mathbb{R}^2$.

Composite isotrope à deux phases

Soient $\rho_1, \rho_2, r_1, r_2 \in C(\mathbb{R})$ paires sur $\mathbb{R}$, et la résistivité $\rho^\varepsilon(h) := \rho^\varepsilon + r_\varepsilon(h)h\,J$, où

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(h) & := \left(\chi_\varepsilon\,\rho_1(h) + (1-\chi_\varepsilon)\,\rho_2(h)\right) I_2, \\ r_\varepsilon(h) & := \chi_\varepsilon\, r_1(h) + (1-\chi_\varepsilon)\, r_2(h). \end{cases}$$

On suppose que la symétrisée de $\sigma^\varepsilon(h) := \rho^\varepsilon(h)^{-1}$ H-converge vers $\sigma_*(h)\,I_2$.

Milton (88) a montré que $\sigma^\varepsilon(h)$ H-converge vers $\sigma^*(h) = \rho^*(h)^{-1}$, où

$$\rho^*(h) = \rho_*(h)\,I_2 + r_*(h)h\,J$$

$$\frac{r_2(h) - r_*(h)}{r_2(h) - r_1(h)} = \frac{\rho_2(h)^2 - \rho_*(h)^2 + h^2(r_2(h) - r_*(h))^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2 + h^2(r_2(h) - r_1(h))^2}$$

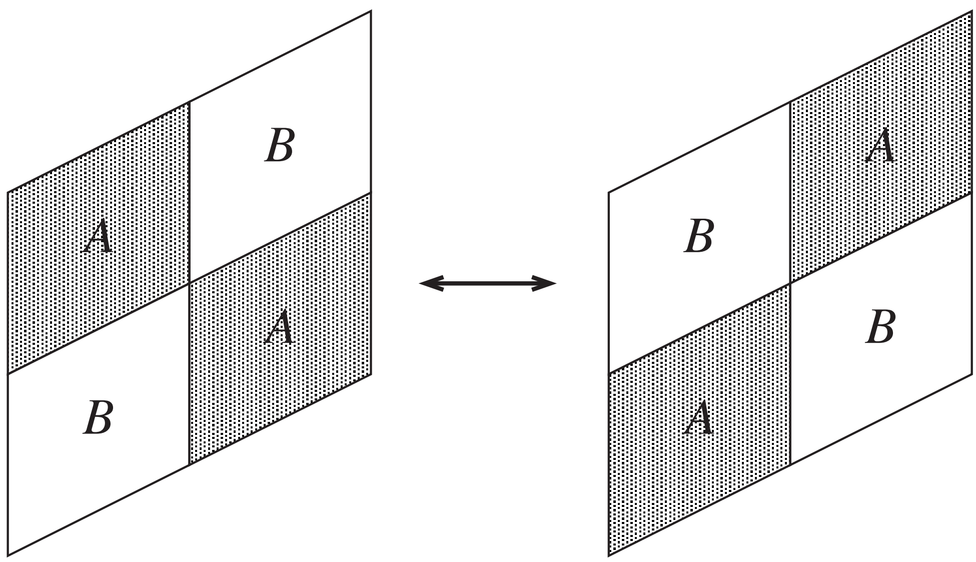
A faible champ magnétique h, cette formule se réduit à celle Shklovskii (77)

$$\frac{r_2(0) - r_*(0)}{r_2(0) - r_1(0)} = \frac{\rho_2(0)^2 - \rho_*(0)^2}{\rho_2(0)^2 - \rho_1(0)^2},$$

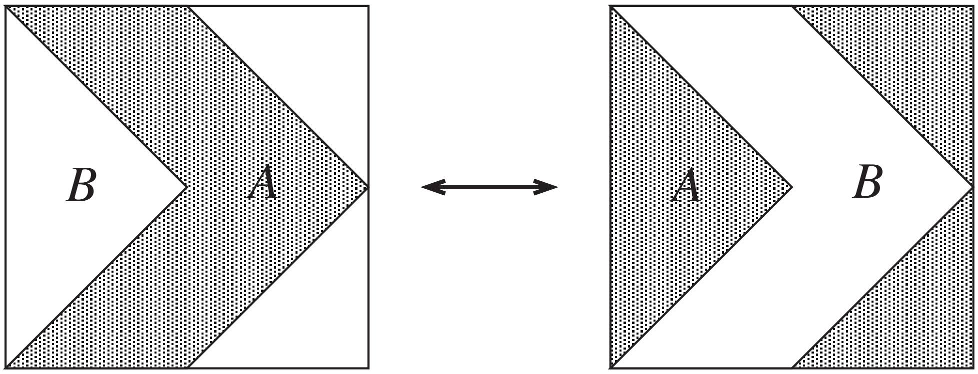
illustrant la positivité car $\rho_1(0) \le \rho_*(0) \le \rho_2(0)$.

Composite anisotrope à deux phases interchangeables

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ définies positives. Un composite est dit à phases A, B interchangeables si $A^\varepsilon := \chi_\varepsilon\, A + (1-\chi_\varepsilon)\, B$ et $\chi_\varepsilon\, B + (1-\chi_\varepsilon)\, A$ H-convergent vers la même limite.



Structure en échiquier



Structure en chevrons

Théorème. *On suppose que* $B = \lambda A + \mu J$ *avec* $A > 0$, $\lambda > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\lambda \det(A) + \frac{\mu\left(\mu + 2\lambda\,\alpha(A)\right)}{\lambda + 1} > \left(\frac{\mu + 2\lambda\,\alpha(A)}{\lambda + 1}\right)^2,$$

$$\text{où} \quad A - A^T = 2\alpha(A)\,J.$$

Alors A^ε H*-converge vers* A^* *telle que*

$$\begin{aligned} \det(A^*) &= \lambda \det(A) + \frac{\mu\left(\mu + 2\lambda\,\alpha(A)\right)}{\lambda + 1}, \\ \alpha(A^*) &= \frac{\mu + 2\lambda\,\alpha(A)}{\lambda + 1}. \end{aligned}$$

Corollaire. *Soient* $\sigma^1 \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$, $\sigma^1 > 0$, $\lambda > 0$, *et un matériau à deux phases interchangeables de conductivité*

$$\sigma^{\varepsilon} := \chi_{\varepsilon}\,\sigma^1 + (1-\chi_{\varepsilon})\lambda\,\sigma^1.$$

Soit la résistivité perturbée par h,

$$\rho^{\varepsilon}(h) := (\sigma^{\varepsilon})^{-1} + r_{\varepsilon} h\, J, \quad r_{\varepsilon} := \chi_{\varepsilon}\, r_1 + (1-\chi_{\varepsilon})\, r_2.$$

Alors le coefficient de Hall effectif r_* *est*

$$r_* = \frac{r_1 + \lambda\, r_2}{1+\lambda},$$

qui vérifie la propriété de positivité.

De plus, pour tout correcteur P^{ε} *associé à* σ^{ε},

$$\chi_{\varepsilon} \det(P^{\varepsilon}) \rightharpoonup \frac{\lambda}{\lambda+1} \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

La preuve de ces résultats reposent sur des arguments de dualité initiés par Keller (64) et la formule (4).

IV) Le cas tridimensionnel

La situation est plus complexe car on doit définir une matrice de Hall $R^\varepsilon \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$\mathcal{R}^\varepsilon \cdot h = -(\mathcal{R}^\varepsilon \cdot h)^T = \mathcal{E}(R^\varepsilon h),$$

où $\mathcal{E}$ est le tenseur de Levi-Civita défini par

$$\mathcal{E}\begin{pmatrix} a_3 \\ -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix},$$

Lorsque $R^\varepsilon = r_\varepsilon I_3$ est isotrope, on a bien

$$\mathcal{E}(R^\varepsilon h) j = r_\varepsilon (j \times h), \quad \forall\, h, j \in \mathbb{R}^3.$$

La conductivité et son homogénéisée vérifient

$$\begin{cases} \sigma^\varepsilon(h) & = \sigma^\varepsilon + \mathcal{E}(S^\varepsilon h) + o(h) \\ \sigma^*(h) & = \sigma^* + \mathcal{E}(S^* h) + o(h), \end{cases}$$

D'après $\rho^\varepsilon(h)\, \sigma^\varepsilon(h) = \rho^*(h)\, \sigma^*(h) = I_3$, on a

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(h) & = \rho^\varepsilon + \mathcal{E}(R^\varepsilon h) + o(h) \\ \rho^*(h) & = \rho^* + \mathcal{E}(R^* h) + o(h), \end{cases}$$

d'où les relations

$$S_\varepsilon = -\mathrm{Cof}(\sigma^\varepsilon)\,R^\varepsilon, \qquad S^* = -\mathrm{Cof}(\sigma^*)\,R^*, \quad (5)$$

D'après (2) et la formule algébrique

$$(P^\varepsilon)^T\,\mathcal{E}(S^\varepsilon h)\,P^\varepsilon = \mathcal{E}\left(\mathrm{Cof}(P^\varepsilon)^T S^\varepsilon h\right),$$

la matrice homognéisée S^* s'obtient par

$$\mathrm{Cof}(P^\varepsilon)^T S^\varepsilon \rightharpoonup S^*, \quad \mathcal{D}'(\Omega)^9. \qquad (6)$$

Donc d'après les égalités (5) la matrice de Hall effective R^* est donnée par

$$\mathrm{Cof}(\sigma^\varepsilon P^\varepsilon)^T R^\varepsilon \rightharpoonup \mathrm{Cof}(\sigma^*)^T R^*, \;\; \mathcal{D}'(\Omega)^9. \;\; (7)$$

Contrairement au cas $2d$ on a :

Changement de signe en $3d$

Théorème. *Il existe une conductivité σ^ε associée à une matrice de Hall isotrope $R^\varepsilon = r_\varepsilon I_3$ telle que $R^* = r_* I_3$ soit constante, isotrope et*

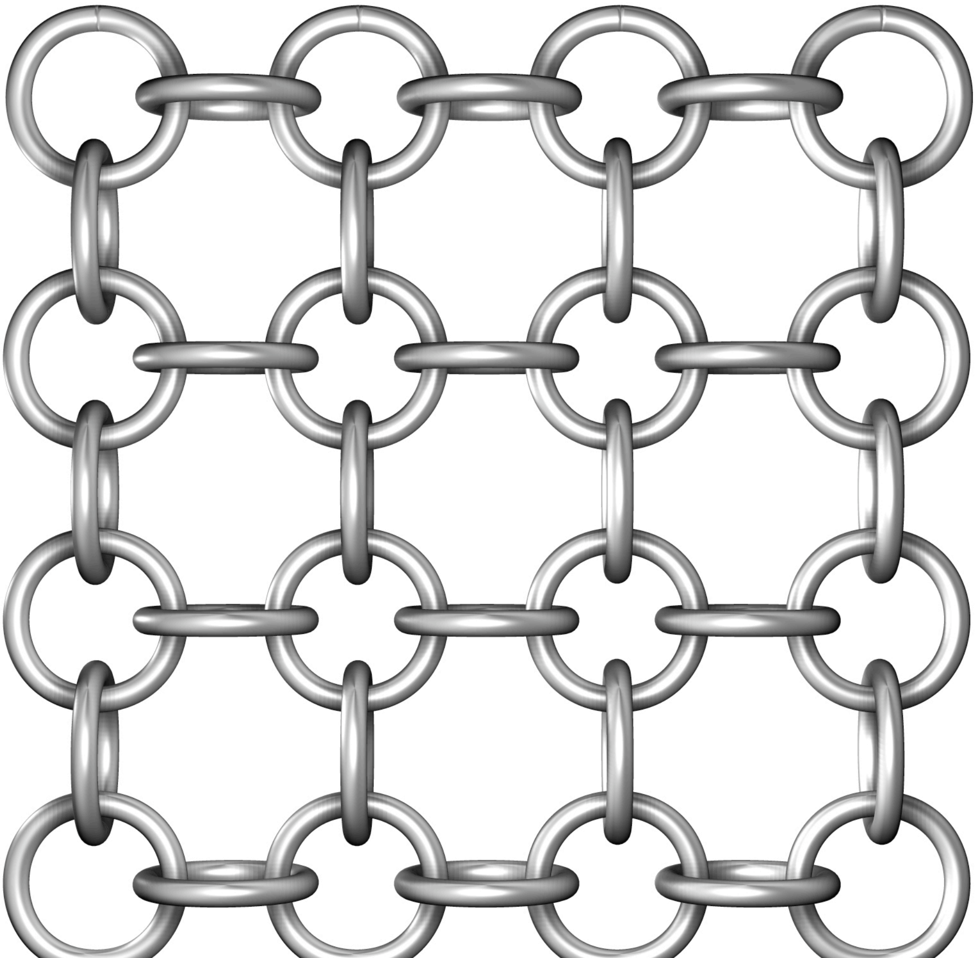
$$r_\varepsilon > 0 \text{ p.p. dans } \Omega \quad \textit{mais} \quad r_* < 0.$$

Preuve. On considère un réseau cubique de chaînes $Q_\sharp$ à la façon d'une cotte de mailles :

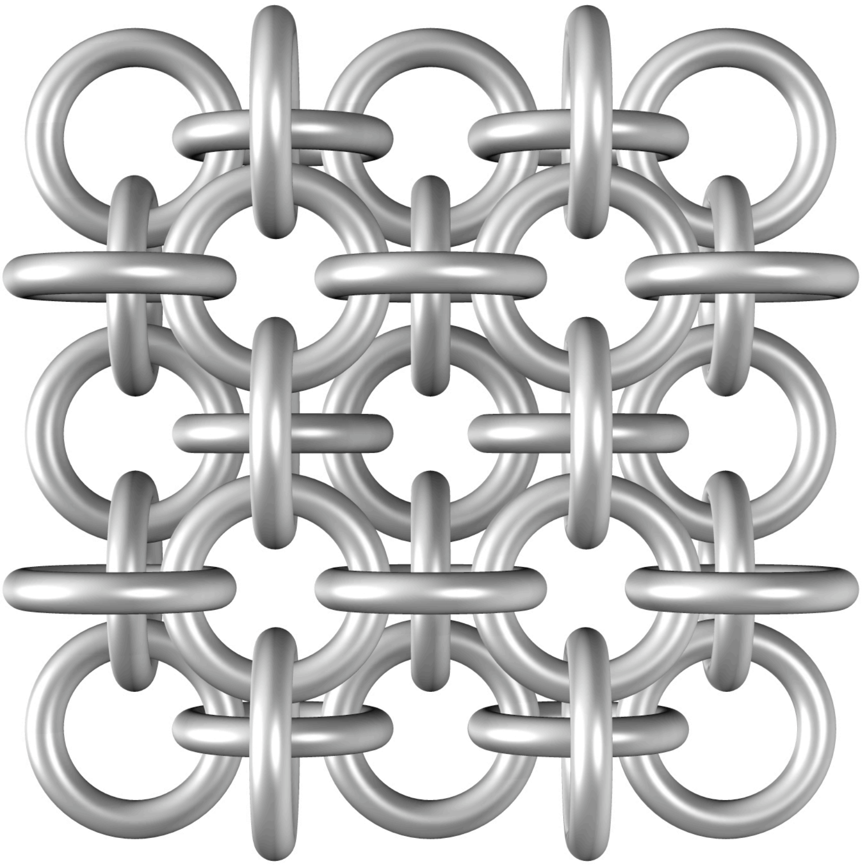
- $Q_\sharp$ a une symétrie cubique,
- $Q_\sharp$ est périodique de période $Y :=]-1,1[^3$,
- chaque maillon de $Q_\sharp$ est un tore de rayons $\frac{1}{2} < r < R < 1$, de conductivité $\kappa \gg 1$,
- deux maillons voisins ne se rencontrent pas mais sont très proches, i.e. $r \approx \frac{1}{2}$.

La conductivité εY-périodique associée est définie par

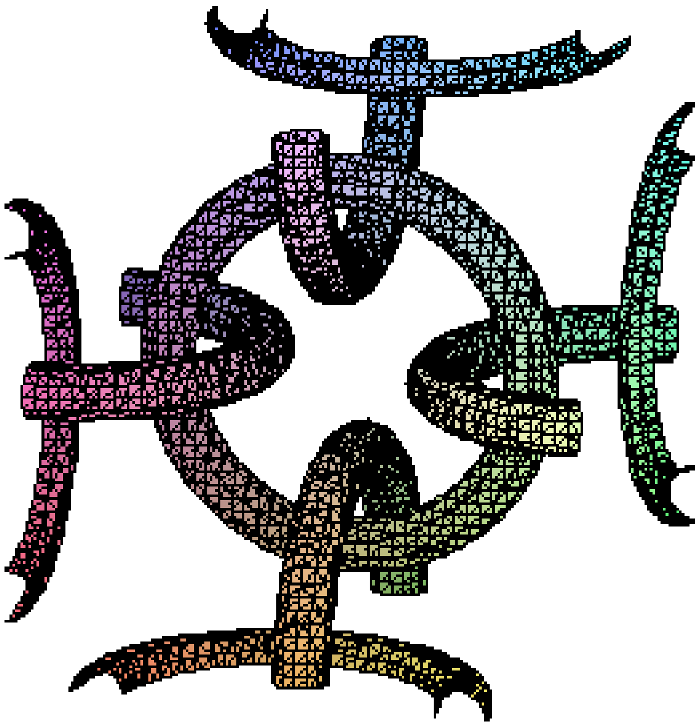
$$\sigma^\varepsilon := \begin{cases} \kappa\, I_3 & \text{dans } \varepsilon Q_\sharp \\ I_3 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus (\varepsilon Q_\sharp). \end{cases}$$



Une couche de cotte de maille
Avec l'aimable permission de Dylon Whyte,
http ://artofchainmail.com/patterns/japanese/hitoye_gusari.html



Deux couches de cotte de maille à symétrie cubique
Avec l'aimable permission de Dylon Whyte,
http ://artofchainmail.com/patterns/japanese/hitoye_gusari.html



L'isotropie de la conductivité σ^ε et la symétrie cubique de $\varepsilon Q_\sharp$ impliquent que la conductivité homogénéisée σ^* est aussi isotrope.

Compte tenu des relations (5) entre les matrices R, S, il suffit donc d'obtenir une matrice S^ε isotrope et positive de sorte que S^* soit isotrope mais négative.

Le correcteur associé à la conductivité εY-périodique σ^ε est $P^\varepsilon(x) := DU^\kappa(\frac{x}{\varepsilon})$, où U^κ est solution de

$$\begin{cases} \mathrm{Div}\left[\left(1+(\kappa-1)\,1_{Q_\sharp}\right)DU^\kappa\right] = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ U^\kappa(y) - y & \in H^1_\sharp(Y)^3. \end{cases}$$

Pour $\tau \in]1-r, r[$, on considère les 6 points :

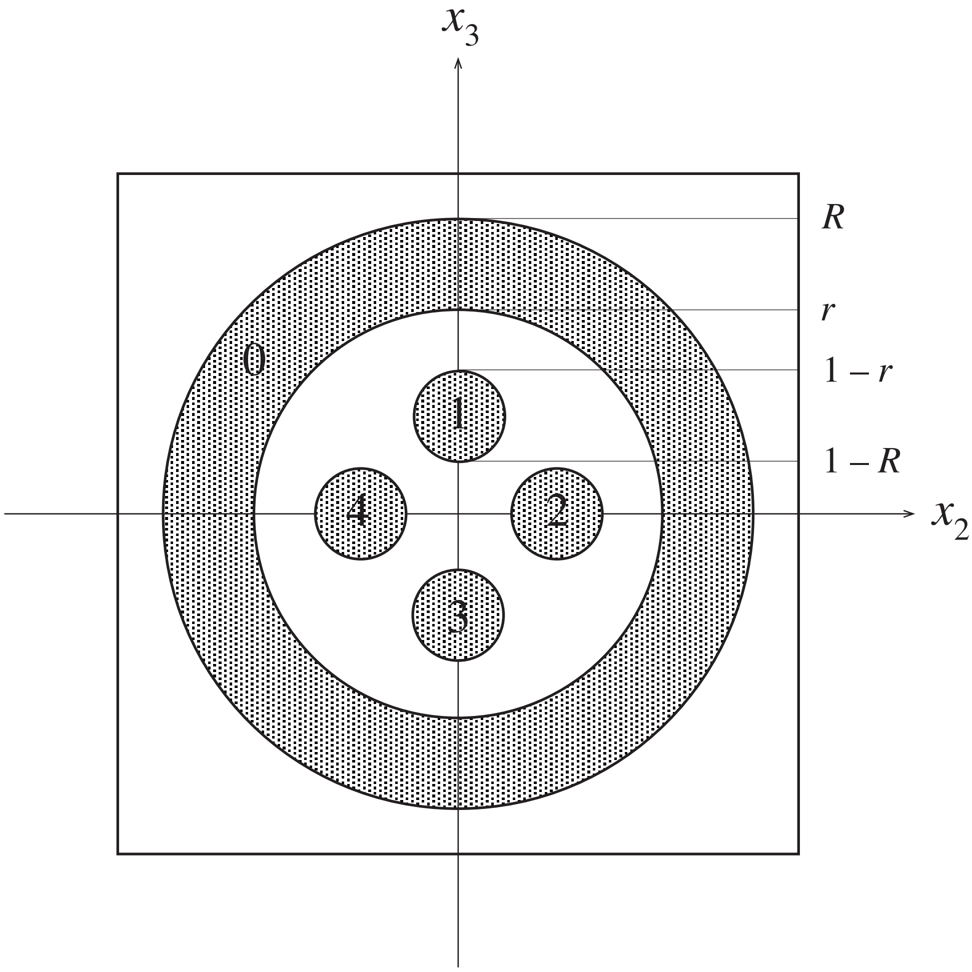
$$\begin{array}{lll} \widehat{x} = (0,0,\tau), & \widehat{y} = (0,1+\tau,0), & \widehat{z} = (1+\tau,1,0) \\ \widehat{x}' = (0,0,-\tau), & \widehat{y}' = (0,1-\tau,0), & \widehat{z}' = (1-\tau,1,0). \end{array}$$

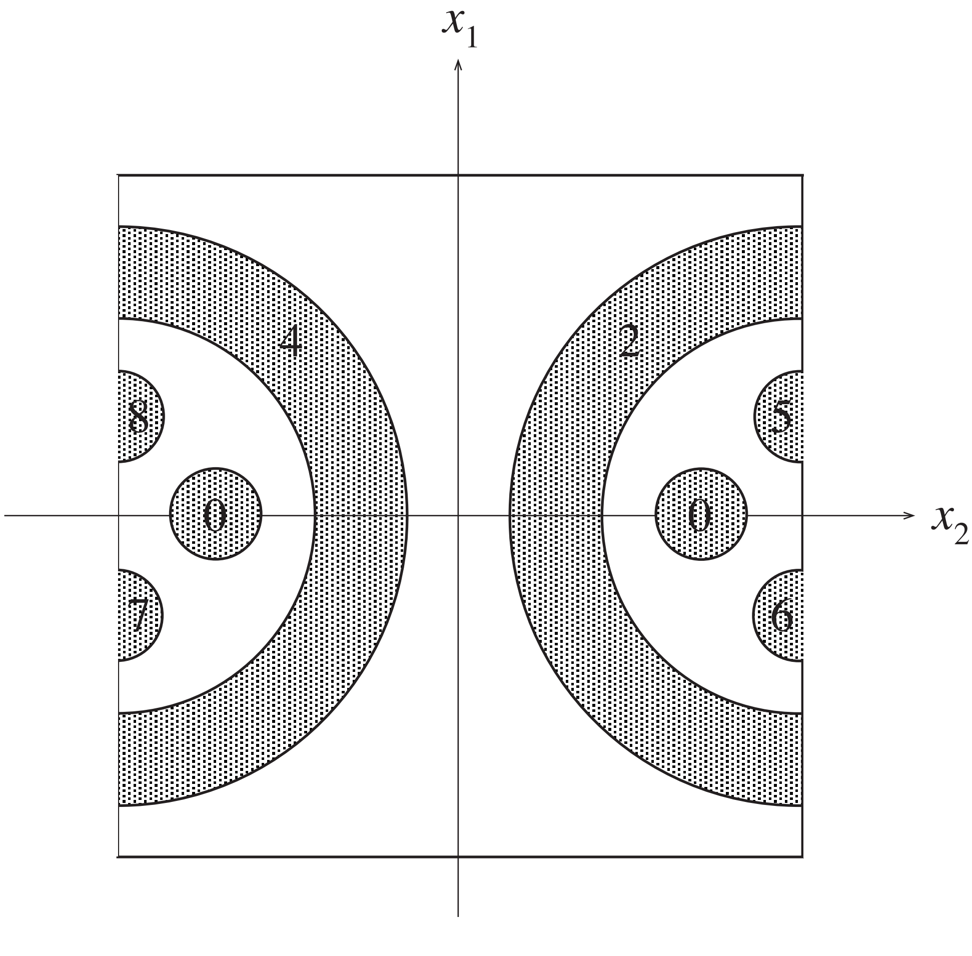
Pour $\gamma > 0$ et $\delta \in]0,1[$, on définit la matrice

$$S^\varepsilon(x) = s_\varepsilon(x)\, I_3 := s_\sharp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\, I_3,$$

$$\begin{aligned} s_\sharp := \gamma \quad & +(1-\gamma)\left[1^\sharp_{B(\widehat{x},\delta)} + 1^\sharp_{B(\widehat{y},\delta)} + 1^\sharp_{B(\widehat{z},\delta)}\right] \\ & +(1-\gamma)\left[1^\sharp_{B(\widehat{x}',\delta)} + 1^\sharp_{B(\widehat{y}',\delta)} + 1^\sharp_{B(\widehat{z}',\delta)}\right], \end{aligned}$$

où $1^\sharp_E$ est la fonction caractéristique de E étendue par Y-périodicité à $\mathbb{R}^3$.


x_3
R
r
$1-r$
$1-R$
x_2
0
1
2
3
4


x_1
x_2
4
2
8
5
0
0
7
6

Par Y-périodicité on a dans $L^1(\Omega)^{3\times 3}$ faible

$$\mathrm{Cof}(P^\varepsilon)^T S^\varepsilon \rightharpoonup S^* = \fint_Y s_\sharp(x)\,\mathrm{Cof}(DU^\kappa)^T(x)\,dx.$$

Par symétrie S^* est isotrope. Par linéarité de la trace, $S^* = s_*\, I_3$ satisfait

$$s_* = \gamma + \frac{(1-\gamma)}{3|Y|}\int_{B(\hat{x},\delta)\cup B(\hat{y},\delta)\cup B(\hat{z},\delta)} \mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU^\kappa)\Big) + \frac{(1-\gamma)}{3|Y|}\int_{B(\hat{x}',\delta)\cup B(\hat{y}',\delta)\cup B(\hat{z}',\delta)} \mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU^\kappa)\Big).$$

En faisant successivement $\kappa \to +\infty$ et $\delta \to 0$ et à nouveau par un argument de symétrie, on obtient

$$s_* = \gamma + \frac{\pi}{3}(1-\gamma)\,\delta^3\left[\mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU)\Big)(\hat{x}) + o_\delta(1)\right] + o_\kappa(1).$$

où $U^\kappa \underset{\kappa\to+\infty}{\longrightarrow} U = (u_1, u_2, u_3)$ dans $H^1(Y)^3$ fort.

Il reste à montrer que l'on peut choisir tous les paramètres de sorte que $\mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU)\Big)(\hat{x}) < 0$.

La fonction U est harmonique dans $\mathbb{R}^3 \setminus Q_\sharp$ et constante dans chaque maillon de $Q_\sharp$, d'où

- par le principe du maximum de Hopf

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\widehat{x}) > 0, \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

- par le principe du maximum faible

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\widehat{x}) \leq \frac{1}{1-R}, \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

- puisque $u_3(0,0,r) = 0$ et $u_3(0,0,1-r) = 1$,

$$\exists\, \tau_r \in]1-r, r[, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(0,0,\tau_r) = \frac{1}{1-2r} \ll -1.$$

Donc il existe R, r, τ_r, $r \approx \frac{1}{2}$, tel que $\widehat{x} = (0, 0, \tau_r)$ vérifie

$$\begin{aligned} 0 &< \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\widehat{x}) \right)^{-1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\widehat{x}) \right)^{-1} \right]^{-1} \\ &\leq \frac{1}{2\,(1-R)} < -\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(\widehat{x}). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU)\Big)(\widehat{x}) \\ &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] (\widehat{x}) < 0. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$s_* = \gamma + \frac{\pi}{3}\,(1-\gamma)\,\delta^3 \left[\mathrm{tr}\Big(\mathrm{Cof}(DU)\Big)(\widehat{x}) + o_\delta(1) \right] + o_\kappa(1).$$

On obtient donc $r_* < 0$ en choisissant successivement

$$r \approx \frac{1}{2}, \quad \delta \ll 1, \quad \gamma \ll \delta^3, \quad \kappa \gg 1.$$

Conclusion

En $2d$ l'homogénéisation préserve le signe du coefficient de Hall alors qu'en $3d$ elle peut le modifier.

Ce paradoxe rappelle un résultat de thermo-élasticité : Lakes et Sigmund-Torquato (1996) ont conçu un composite qui se contracte quand il est chauffé alors que ses constituants pris séparément se dilatent.

Ces deux exemples illustrent le fait que le processus d'homogénéisation peut inverser les propriétés physiques des matériaux.