Méthodes d'énergie pour le potentiel de double couche: Une inégalité de Poincaré oubliée.

Martin Costabel

IRMAR, Université de Rennes 1

2e Journée de l'équipe d'analyse numérique
Rennes 25 oct 2007

Théorème

Soit $\Omega^- \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien borné et $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$.

Alors il existe une constante $\mu \geq 1$ telle que pour tout

u harmonique dans $\Omega^- \cup \Omega^+$, H^1_{loc} jusqu'au bord et zéro à l'infini et

- soit $u^- = u^+$ sur $\Gamma = \partial\Omega^-$ ("potentiel de simple couche")
  et $\int_\Gamma u \, ds = 0$

- soit $\partial_n u^- = \partial_n u^+$ sur Γ ("potentiel de double couche")

on ait l'estimation

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega^+} |\nabla u|^2 \leq \mu \int_{\Omega^-} |\nabla u|^2$$

THÉORÈME. — *Soit* V *une fonction, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface donnée* (S), *ayant les propriétés de potentiel de la simple couche et satisfaisant à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et admet la transformation de M. Poincaré.*

THÉORÈME. — *Soit* V *une fonction, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface donnée* (S), *ayant les propriétés de potentiel de la simple couche et satisfaisant à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et admet la transformation de M. Poincaré.*

Nous appellerons ce théorème *théorème fondamental.*

THÉORÈME. — *Soit* V *une fonction, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface donnée* (S), *ayant les propriétés de potentiel de la simple couche et satisfaisant à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et admet la transformation de M. Poincaré.*

Nous appellerons ce théorème *théorème fondamental.*

Nous avons démontré ce théorème dans le cas où la surface (S) admet la transformation de M. Poincaré, mais il est probable qu'il existe encore dans les cas plus généraux.

Je crois que l'on peut démontrer ce théorème indépendamment de la transformation de M. Poincaré, pour toutes les surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°, bien que je n'aie pas réussi à le démontrer dans ces conditions en toute rigueur en ce moment.

THÉORÈME. — *Soit* V *une fonction, harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface donnée* (S), *ayant les propriétés de potentiel de la simple couche et satisfaisant à la condition*

$$\int \frac{\partial V_e}{\partial n} ds = 0.$$

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau'}$$

a une limite supérieure finie et une limite inférieure différente de zéro, si la surface fermée (S) *satisfait aux conditions* 1°, 2° *et* 3° *de l'Introduction et admet la transformation de M. Poincaré.*

Nous appellerons ce théorème *théorème fondamental.*

Nous verrons dans ce qui va suivre, que *la solution de tous les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique se ramène à la démonstration complète du théorème fondamental.*

Théorème

Soit $\Omega^- \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien borné et $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$.

Alors il existe une constante $\mu \geq 1$ telle que pour tout

u harmonique dans $\Omega^- \cup \Omega^+$, H^1_{loc} jusqu'au bord et zéro à l'infini et

- soit $u^- = u^+$ sur $\Gamma = \partial\Omega^-$ ("potentiel de simple couche")
  et $\int_\Gamma u \, ds = 0$

- soit $\partial_n u^- = \partial_n u^+$ sur Γ ("potentiel de double couche")

on ait l'estimation

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega^+} |\nabla u|^2 \leq \mu \int_{\Omega^-} |\nabla u|^2$$

Références, de Poincaré à nos jours

H. POINCARÉ. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
Acta Math. **20** (1896) 59–142.

W. STEKLOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
C. R. **130** (1900) 396–399.

A. KORN. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
C. R. **130** (1900) 557.

Références, de Poincaré à nos jours

H. POINCARÉ. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
Acta Math. **20** (1896) 59–142.

W. STEKLOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
C. R. **130** (1900) 396–399.

A. KORN. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.
C. R. **130** (1900) 557.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.* Note de M. **A. Korn**, présentée par M. Picard.

« Dans une Note (1) *sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*, M. W. Stekloff est arrivé à une démonstration de la méthode de la moyenne arithmétique de M. Neumann, qui est à peu près la même que celle que j'ai publiée il y a un an dans mon Cours sur la théorie du potentiel (2). Ma démonstration, comme celle de M. Stekloff, a pour base le Mémoire ingénieux (3) de M. Poincaré, et nous avons éliminé tous les deux de la même manière la restriction de M. Poincaré, que l'existence d'une solution soit préalablement établie. Pour rendre la démonstration complète, il fallait encore éliminer une autre condition de M. Poincaré, l'existence d'une certaine transformation à l'aide de laquelle on puisse transformer la surface donnée en sphère. Comme l'existence de cette transformation ne peut être facilement démontrée pour toutes les surfaces, je me suis borné à un cas très général, dans lequel on peut l'établir sans difficulté, mais il résulte clairement de ma démonstration qu'elle reste toujours rigoureuse, *pourvu que la transformation de M. Poincaré existe et que la fonction f donnée sur la surface soit continue avec ses deux premières dérivées* (4). On peut remplacer la condition 4° de M. Stekloff par cette condition, car la condition 4° de M. Stekloff en est, comme il résulte déjà du Mémoire de M. Poincaré, une simple conséquence. »

Références, de Poincaré à nos jours

H. POINCARÉ. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20** (1896) 59–142.

W. STEKLOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *C. R.* **130** (1900) 396–399.

A. KORN. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.. *C. R.* **130** (1900) 557.

W. STEKLOFF. Remarque à une note de M. A. Korn: "Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet". *C. R.* **130** (1900) 826–827.

W. STEKLOFF. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse (2)* **2** (1900) 207–272.

O. STEINBACH, W. L. WENDLAND. On C. Neumann's method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries. *J. Math. Anal. Appl.* **262** (2001) 733–748.

M. COSTABEL. Some historical remarks on the positivity of boundary integral operators. Ch. 1 of *Boundary Element Analysis - Mathematical Aspects and Applications* (M. Schanz, O. Steinbach, Eds.) *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* Vol **29**, 1–27. Springer, Berlin 2007.

Références, de Poincaré à nos jours

H. POINCARÉ. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20** (1896) 59–142.

W. STEKLOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *C. R.* **130** (1900) 396–399.

A. KORN. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.. *C. R.* **130** (1900) 557.

W. STEKLOFF. Remarque à une note de M. A. Korn: “Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet”. *C. R.* **130** (1900) 826–827.

W. STEKLOFF. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse (2)* **2** (1900) 207–272.

O. STEINBACH, W. L. WENDLAND. On C. Neumann’s method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries. *J. Math. Anal. Appl.* **262** (2001) 733–748.

M. COSTABEL. Some historical remarks on the positivity of boundary integral operators. Ch. 1 of *Boundary Element Analysis - Mathematical Aspects and Applications* (M. Schanz, O. Steinbach, Eds.) *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* Vol **29**, 1–27. Springer, Berlin 2007.

Références, de Poincaré à nos jours

H. POINCARÉ. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20** (1896) 59–142.

W. STEKLOFF. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *C. R.* **130** (1900) 396–399.

A. KORN. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.. *C. R.* **130** (1900) 557.

W. STEKLOFF. Remarque à une note de M. A. Korn: “Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet”. *C. R.* **130** (1900) 826–827.

W. STEKLOFF. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse (2)* **2** (1900) 207–272.

O. STEINBACH, W. L. WENDLAND. On C. Neumann’s method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries. *J. Math. Anal. Appl.* **262** (2001) 733–748.

M. COSTABEL. Some historical remarks on the positivity of boundary integral operators. Ch. 1 of *Boundary Element Analysis - Mathematical Aspects and Applications* (M. Schanz, O. Steinbach, Eds.) *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* Vol **29**, 1–27. Springer, Berlin 2007.

Équation intégrale de Neumann pour le problème de Dirichlet

Potentiel de double couche dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma = \Omega^- \cup \Omega^+$:

$$u(x) = \mathscr{D}g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{n(y) \cdot (y-x)}{|x-y|^3} g(y)\, ds(y)$$

Relations de saut sur Γ:

$$\partial_n u^+ = \partial_n u^- \; ; \quad u^+ - u^- = g \; ; \qquad \text{Déf:} \quad Kg := \tfrac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Traces sur Γ: $u^\pm = (\pm\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)g$

Problème de Dirichlet intérieur: $u^- = f$ sur Γ

Équation intégrale du potentiel de double couche: $u = \mathscr{D}g$ avec

$$(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K)g = -f \qquad = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I} - 2K)g \quad = \big(\mathrm{I} - (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)\big)g$$

Équation intégrale de Neumann pour le problème de Dirichlet

Potentiel de double couche dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma = \Omega^- \cup \Omega^+$:

$$u(x) = \mathscr{D}g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{n(y) \cdot (y-x)}{|x-y|^3} g(y)\, ds(y)$$

Relations de saut sur Γ:

$$\partial_n u^+ = \partial_n u^- \; ; \quad u^+ - u^- = g \; ; \qquad \text{Déf:} \quad Kg := \tfrac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Traces sur Γ: $\quad u^\pm = (\pm \tfrac{1}{2} \mathrm{I} + K) g$

Problème de Dirichlet intérieur: $\quad u^- = f$ sur Γ

Équation intégrale du potentiel de double couche: $u = \mathscr{D}g$ avec

$$(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K)g = -f \qquad = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I} - 2K)g \qquad = \big(\mathrm{I} - (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)\big)g$$

Équation intégrale de Neumann pour le problème de Dirichlet

Potentiel de double couche dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma = \Omega^- \cup \Omega^+$:

$$u(x) = \mathscr{D}g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{n(y) \cdot (y-x)}{|x-y|^3} g(y)\, ds(y)$$

Relations de saut sur Γ:

$$\partial_n u^+ = \partial_n u^- \; ; \quad u^+ - u^- = g \; ; \qquad \text{Déf:} \quad Kg := \tfrac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Traces sur Γ: $u^\pm = (\pm\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)g$

Problème de Dirichlet intérieur: $u^- = f$ sur Γ

Équation intégrale du potentiel de double couche: $u = \mathscr{D}g$ avec

$$(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K)g = -f \qquad = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I} - 2K)g \quad = \big(\mathrm{I} - (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)\big)g$$

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

„Wenn nun *erstlich* der idioelektrische Körper *ausserhalb* „der Fläche σ liegt, so findet nach einem bekannten *Green*-„schen Satz für jeden Punct des von σ umschlossenen Raumes „die Formel statt:

$$F = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial F}{\partial \nu}\,\frac{d\sigma}{r} + F',$$

„wo F' den Werth hat:

$$F' = +\frac{1}{4\pi}\int F\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,d\sigma .$$

„Die Function F' ist offenbar selbst wiederum eine Potential-„function, und der Ausdruck $\Delta F'$ verschwindet allenthalben „im Innern von σ. Dabei leuchtet ein, dass F' — welches „innerhalb σ zwischen dem grössten und kleinsten Werthe „liegt, den die Function F auf der Fläche σ selbst an-„nimmt*) — im Allgemeinen *gleichförmiger* als F verläuft“**).

„Wenden wir auf F' den Satz (1.) an, so kommt:

$$F' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial F'}{\partial \nu}\,\frac{d\sigma}{r} + F'',$$

*) Diese von *Beer* hier ohne Beweis aufgestellte Behauptung ist *nicht* allgemein richtig. In der That ist es leicht, bestimmte Beispiele anzugeben, in denen sie *unrichtig* ist. *Beer* hat wahrscheinlich stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass der in der letzten Formel unter dem Integralzeichen enthaltene Ausdruck $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}$ für alle Elemente *do einerlei* Vorzeichen habe, — was offenbar im Allgemeinen *nicht* der Fall ist.

**) Die Hinfälligkeit der vorhergehenden Behauptung überträgt sich auf diese Behauptung der grössern Gleichförmigkeit.

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

- Poincaré 1896: $u = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathscr{D}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\Gamma \in C^{1+\alpha}$

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

- Poincaré 1896: $u = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathscr{D}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\Gamma \in C^{1+\alpha}$

§ 2. *Méthode de Neumann.*

Soit Φ une fonction donnée en tous les points de la surface S; soit λ un paramètre auquel je me réserve de donner différentes valeurs.

Proposons-nous de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition suivante:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi; \tag{1}$$

c'est ce que j'appellerai le *problème de Neumann.*

Le problème de DIRICHLET, soit pour un domaine intérieur à S, soit pour un domaine extérieur à S n'est donc qu'un cas particulier du problème de NEUMANN.

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

- Poincaré 1896: $u = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathscr{D}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\Gamma \in C^{1+\alpha}$

- Steinbach-Wendland 2001: $g = -\sum_{\ell=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\mathrm{I} + K)^{\ell} f$

Convergence dans $H^{1/2}(\Gamma)$ si Γ lipschitzien; syst. ell. d'ordre 2 ds $\mathbb{R}^n$

- Ouvert: Convergence dans $L^2(\Gamma)$; ordre > 2; $\partial_t - \Delta$; Maxwell...

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

- Poincaré 1896: $u = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathscr{D}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\Gamma \in C^{1+\alpha}$

- Steinbach-Wendland 2001: $g = -\sum_{\ell=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\mathrm{I} + K)^{\ell} f$

Convergence dans $H^{1/2}(\Gamma)$ si Γ lipschitzien; syst. ell. d'ordre 2 ds $\mathbb{R}^n$

- Ouvert: Convergence dans $L^2(\Gamma)$; ordre > 2; $\partial_t - \Delta$; Maxwell...

La série de Neumann

- C. Neumann 1877: $g = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $C^0(\Gamma)/\mathbb{R}$ si Γ est convexe:

$$d\theta_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{n(y)\cdot(y-x)}{|x-y|^3}ds(y)$$

est une mesure de masse 1, positive si Γ convexe

- Poincaré 1896: $u = -2\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathscr{D}(2K)^{\ell} f$

Convergence dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\Gamma \in C^{1+\alpha}$

- Steinbach-Wendland 2001: $g = -\sum_{\ell=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\mathrm{I} + K)^{\ell} f$

Convergence dans $H^{1/2}(\Gamma)$ si Γ lipschitzien; syst. ell. d'ordre 2 ds $\mathbb{R}^n$

- Ouvert: Convergence dans $L^2(\Gamma)$; ordre > 2; $\partial_t - \Delta$; Maxwell...

Le Grand Bouleversement

D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Jb. DMV* **8** (1900) 184–188.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.* **59** (1904) 161–184.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *J. R. A. Math.* **129** (1905) 63–67.

I. FREDHOLM. Sur une classe d'équations fonctionnelles.
Acta Math. **27** (1903), no. 1, 365–390.

A. KORN. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig 1910.
A. KNESER. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vieweg, Braunschweig 1911.
H. B. HEYWOOD, M. R. FRÉCHET, J. HADAMARD. L'équation de *Fredholm* et ses applications à la physique mathématique. Hermann, Paris 1912.
T. LALESCO. Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de *É. Picard*. Hermann, Paris 1912.
V. VOLTERRA. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Gauthier-Villars, Paris 1913.
M. BÔCHER. An introduction to the study of integral equations.
Cambridge University Press 1914.
H. POINCARÉ. Remarques diverses sur l'équation de *Fredholm*.
Acta Math. **33** (1909) 57–86.
D. HILBERT. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig 1912.

D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Jb. DMV* **8** (1900) 184–188.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.* **59** (1904) 161–184.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *J. R. A. Math.* **129** (1905) 63–67.

I. FREDHOLM. Sur une classe d'équations fonctionnelles.
Acta Math. **27** (1903), no. 1, 365–390.

A. KORN. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig 1910.
A. KNESER. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vieweg, Braunschweig 1911.
H. B. HEYWOOD, M. R. FRÉCHET, J. HADAMARD. L'équation de *Fredholm* et ses applications à la physique mathématique. Hermann, Paris 1912.
T. LALESCO. Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de *É. Picard*. Hermann, Paris 1912.
V. VOLTERRA. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Gauthier-Villars, Paris 1913.
M. BÔCHER. An introduction to the study of integral equations. Cambridge University Press 1914.
H. POINCARÉ. Remarques diverses sur l'équation de *Fredholm*. *Acta Math.* **33** (1909) 57–86.
D. HILBERT. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig 1912.

Le Grand Bouleversement

D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Jb. DMV* **8** (1900) 184–188.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.* **59** (1904) 161–184.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *J. R. A. Math.* **129** (1905) 63–67.

I. FREDHOLM. Sur une classe d'équations fonctionnelles.
Acta Math. **27** (1903), no. 1, 365–390.

A. KORN. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig 1910.
A. KNESER. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vieweg, Braunschweig 1911.
H. B. HEYWOOD, M. R. FRÉCHET, J. HADAMARD. L'équation de ***Fredholm*** et ses applications à la physique mathématique. Hermann, Paris 1912.
T. LALESCO. Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de ***É. Picard***. Hermann, Paris 1912.
V. VOLTERRA. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Gauthier-Villars, Paris 1913.
M. BÔCHER. An introduction to the study of integral equations.
Cambridge University Press 1914.
H. POINCARÉ. Remarques diverses sur l'équation de ***Fredholm***.
Acta Math. **33** (1909) 57–86.
D. HILBERT. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig 1912.

Le Grand Bouleversement

D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Jb. DMV* **8** (1900) 184–188.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.* **59** (1904) 161–184.
D. HILBERT. Über das Dirichletsche Prinzip. *J. R. A. Math.* **129** (1905) 63–67.

I. FREDHOLM. Sur une classe d'équations fonctionnelles.
Acta Math. **27** (1903), no. 1, 365–390.

A. KORN. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig 1910.
A. KNESER. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vieweg, Braunschweig 1911.
H. B. HEYWOOD, M. R. FRÉCHET, J. HADAMARD. L'équation de ***Fredholm*** et ses applications à la physique mathématique. Hermann, Paris 1912.
T. LALESCO. Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de ***É. Picard***. Hermann, Paris 1912.
V. VOLTERRA. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Gauthier-Villars, Paris 1913.
M. BÔCHER. An introduction to the study of integral equations.
Cambridge University Press 1914.
H. POINCARÉ. Remarques diverses sur l'équation de ***Fredholm***.
Acta Math. **33** (1909) 57–86.
D. HILBERT. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig 1912.

Et maintenant des maths pour...

... The Bilaplacian

... The Bilaplacian

Green formulas for Δ^2

$\Omega = \Omega^-$: Smooth bounded domain in $\mathbb{R}^2$; boundary Γ; exterior domain Ω^+

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v = \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v - \Delta u\, \partial_n v\right) ds$$

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v - \partial_\tau \partial_n u\, \partial_\tau v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\right) ds$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v + \partial_s \partial_\tau \partial_n u\, v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\right) ds$$

Green formulas for Δ^2

$\Omega = \Omega^-$: Smooth bounded domain in $\mathbb{R}^2$; boundary Γ; exterior domain Ω^+

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v = \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v - \Delta u\, \partial_n v\right) ds$$

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v - \partial_\tau \partial_n u\, \partial_\tau v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\right) ds$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \left(\partial_n \Delta u\, v + \partial_s \partial_\tau \partial_n u\, v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\right) ds$$

Green formulas for Δ^2

$\Omega = \Omega^-$: Smooth bounded domain in $\mathbb{R}^2$; boundary Γ; exterior domain Ω^+

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta^2 u\, v &= \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v - \Delta u\, \partial_n v\big)\, ds \\
\int_\Omega \Delta^2 u\, v &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v - \partial_\tau \partial_n u\, \partial_\tau v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\big)\, ds \\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v + \partial_s \partial_\tau \partial_n u\, v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\big)\, ds
\end{aligned}$$

$0 \le \sigma \le 1$: $\displaystyle\int_\Omega \Delta^2 u\, v = a_\sigma(u,v) + \int_\Gamma \big(N_\sigma u\, v - M_\sigma u\, \partial_n v\big)\, ds$

$$\begin{aligned}
a_\sigma(u,v) &= \sigma \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\sigma) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v \\
M_\sigma &= \sigma \Delta u + (1-\sigma)\partial_n^2 u && : \text{bending moment} \\
N_\sigma &= \partial_n \Delta u + (1-\sigma)\partial_s \partial_\tau \partial_n u && : \text{twisting moment}
\end{aligned}$$

Green formulas for Δ^2

$\Omega = \Omega^-$: Smooth bounded domain in $\mathbb{R}^2$; boundary Γ; exterior domain Ω^+

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta^2 u\, v &= \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v - \Delta u\, \partial_n v\big)\, ds \\
\int_\Omega \Delta^2 u\, v &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v - \partial_\tau \partial_n u\, \partial_\tau v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\big)\, ds \\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v + \int_\Gamma \big(\partial_n \Delta u\, v + \partial_s \partial_\tau \partial_n u\, v - \partial_n^2 u\, \partial_n v\big)\, ds
\end{aligned}$$

$0 \le \sigma \le 1$: $$\int_\Omega \Delta^2 u\, v = a_\sigma(u,v) + \int_\Gamma \big(N_\sigma u\, v - M_\sigma u\, \partial_n v\big)\, ds$$

$$\begin{aligned}
a_\sigma(u,v) &= \sigma \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\sigma) \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v \\
M_\sigma &= \sigma \Delta u + (1-\sigma)\partial_n^2 u && : \text{bending moment} \\
N_\sigma &= \partial_n \Delta u + (1-\sigma)\partial_s \partial_\tau \partial_n u && : \text{twisting moment}
\end{aligned}$$

Traces (smooth domain)

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v \;=\; a(u,v) + \int_\Gamma \left(Nu\, v - Mu\, \partial_n v \right) ds$$

Cauchy data: $(\gamma_0 u, \gamma_1 u) := (u, \partial_n u, -Nu, Mu)$ on Γ

Traces: $(\gamma_0, \gamma_1) : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{7}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{5}{2}}(\Gamma)$

Energy norm ($s = 2$): $X := H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0 H^2(\Omega)$

$$(\gamma_0, \gamma_1) : H^2(\Delta^2; \Omega) \to X \times X'$$

First Green formula

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta^2 u\, v + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle$$

Second Green formula

$$\int_\Omega \left(\Delta^2 u\, v - u\, \Delta^2 v \right) = -\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle$$

Traces (smooth domain)

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v \;=\; a(u,v) + \int_\Gamma \big(Nu\, v - Mu\, \partial_n v\big)\, ds$$

Cauchy data: $(\gamma_0 u, \gamma_1 u) := (u, \partial_n u, -Nu, Mu)$ on Γ

Traces: $(\gamma_0, \gamma_1) : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{7}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{5}{2}}(\Gamma)$

Energy norm ($s = 2$): $X := H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0 H^2(\Omega)$

$$(\gamma_0, \gamma_1) : H^2(\Delta^2; \Omega) \to X \times X'$$

First Green formula

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta^2 u\, v + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle$$

Second Green formula

$$\int_\Omega \big(\Delta^2 u\, v - u\, \Delta^2 v\big) = -\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle$$

Traces (smooth domain)

$$\int_\Omega \Delta^2 u\, v \;=\; a(u,v) + \int_\Gamma \left(Nu\, v - Mu\, \partial_n v \right) ds$$

Cauchy data: $(\gamma_0 u, \gamma_1 u) := (u, \partial_n u, -Nu, Mu)$ on Γ

Traces: $(\gamma_0, \gamma_1) : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{7}{2}}(\Gamma) \times H^{s-\frac{5}{2}}(\Gamma)$

Energy norm ($s = 2$): $X := H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0 H^2(\Omega)$

$$(\gamma_0, \gamma_1) : H^2(\Delta^2; \Omega) \to X \times X'$$

First Green formula

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta^2 u\, v + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle$$

Second Green formula

$$\int_\Omega \left(\Delta^2 u\, v - u\, \Delta^2 v \right) = -\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle$$

Representation Formula, Single and Double Layer

Fundamental solution: $G(x) = \frac{1}{8\pi}|x|^2 \log|x|$

$(\Rightarrow \Delta G = \frac{1}{2\pi}(\log|x| + 1))$

Representation in Ω^-

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \Delta^2 u(y)\, G(x-y)\, dy \\ &\quad + \int_\Gamma \left(-Nu(y)\, G(x-y) + Mu(y)\, \partial_{n(y)} G(x-y)\right) ds(y) \\ &\quad - \int_\Gamma \left(\partial_n u(y) M(y)\, G(x-y) - u(y) N(y)\, G(x-y)\right) ds(y) \\ &= \mathscr{N} f(x) + \mathscr{S} \gamma_1 u(x) - \mathscr{D} \gamma_0 u(x) \end{aligned}$$

Distributional definitions

$$\begin{aligned} \mathscr{N} f &= G * f \\ \mathscr{S} \phi &= G * \gamma_0^* \phi \\ \mathscr{D} g &= G * \gamma_1^* g \end{aligned}$$

Representation Formula, Single and Double Layer

Fundamental solution: $G(x) = \frac{1}{8\pi}|x|^2 \log|x|$

$(\Rightarrow \Delta G = \frac{1}{2\pi}(\log|x| + 1))$

Representation in Ω^-

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \Delta^2 u(y)\, G(x-y)\, dy \\ &\quad + \int_\Gamma \big(-Nu(y) G(x-y) + Mu(y)\partial_{n(y)} G(x-y)\big) ds(y) \\ &\quad - \int_\Gamma \big(\partial_n u(y) M(y) G(x-y) - u(y) N(y) G(x-y)\big) ds(y) \\ &= \mathscr{N} f(x) + \mathscr{S}\gamma_1 u(x) - \mathscr{D}\gamma_0 u(x) \end{aligned}$$

Distributional definitions

$$\begin{aligned} \mathscr{N} f &= G * f \\ \mathscr{S}\phi &= G * \gamma_0^* \phi \\ \mathscr{D} g &= G * \gamma_1^* g \end{aligned}$$

Representation Formula, Single and Double Layer

Fundamental solution: $G(x) = \frac{1}{8\pi}|x|^2 \log|x|$

$(\Rightarrow \Delta G = \frac{1}{2\pi}(\log|x| + 1))$

Representation in Ω^-

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \Delta^2 u(y)\, G(x-y)\, dy \\ &\quad + \int_\Gamma \big(-Nu(y) G(x-y) + Mu(y)\partial_{n(y)} G(x-y)\big) ds(y) \\ &\quad - \int_\Gamma \big(\partial_n u(y) M(y) G(x-y) - u(y) N(y) G(x-y)\big) ds(y) \\ &= \mathscr{N} f(x) + \mathscr{S}\gamma_1 u(x) - \mathscr{D}\gamma_0 u(x) \end{aligned}$$

Distributional definitions

$$\begin{aligned} \mathscr{N} f &= G * f \\ \mathscr{S}\phi &= G * \gamma_0^* \phi \\ \mathscr{D} g &= G * \gamma_1^* g \end{aligned}$$

The double layer potential

$$\mathscr{D}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(x) = \int_\Gamma \big(-N(y)G(x-y)g_0(y) + M(y)G(x-y)g_1(y)\big)\,ds(y)$$

Jump relations: $[\gamma_0 \mathscr{D} g] = g\,; \quad [\gamma_1 \mathscr{D} g] = 0$

One-sided traces: $\gamma_0^{\pm}\mathscr{D} g = \pm\frac{1}{2}g + Kg\,; \quad \gamma_1^{\pm}\mathscr{D} g = -Wg$

$$Kg(x) = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -N(y)G(x-y) & M(y)G(x-y) \\ -\partial_{n(x)}N(y)G(x-y) & \partial_{n(x)}M(y)G(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(y)\,ds(y)$$

Integral equation for the interior Dirichlet problem

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K\right)g = f$$

Orders: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$: Not a classical Fredholm second kind integral equation!

The double layer potential

$$\mathscr{D}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(x) = \int_\Gamma \big(-N(y)G(x-y)g_0(y) + M(y)G(x-y)g_1(y)\big)\,ds(y)$$

Jump relations: $[\gamma_0 \mathscr{D} g] = g\,; \quad [\gamma_1 \mathscr{D} g] = 0$

One-sided traces: $\gamma_0^{\pm}\mathscr{D} g = \pm\frac{1}{2}g + Kg\,; \quad \gamma_1^{\pm}\mathscr{D} g = -Wg$

$$Kg(x) = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -N(y)G(x-y) & M(y)G(x-y) \\ -\partial_{n(x)}N(y)G(x-y) & \partial_{n(x)}M(y)G(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(y)\,ds(y)$$

Integral equation for the interior Dirichlet problem

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K\right)g = f$$

Orders: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$: Not a classical Fredholm second kind integral equation!

The double layer potential

$$\mathscr{D}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(x) = \int_\Gamma \big(-N(y)G(x-y)g_0(y) + M(y)G(x-y)g_1(y)\big)\,ds(y)$$

Jump relations: $\quad [\gamma_0 \mathscr{D} g] = g\,; \quad [\gamma_1 \mathscr{D} g] = 0$

One-sided traces: $\quad \gamma_0^{\pm}\mathscr{D} g = \pm\frac{1}{2}g + Kg\,; \quad \gamma_1^{\pm}\mathscr{D} g = -Wg$

$$Kg(x) = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -N(y)G(x-y) & M(y)G(x-y) \\ -\partial_{n(x)}N(y)G(x-y) & \partial_{n(x)}M(y)G(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(y)\,ds(y)$$

Integral equation for the interior Dirichlet problem

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K\right)g = f$$

Orders: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$: Not a classical Fredholm second kind integral equation!

The double layer potential

$$\mathscr{D}\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(x) = \int_\Gamma \big(-N(y)G(x-y)g_0(y) + M(y)G(x-y)g_1(y)\big)\,ds(y)$$

Jump relations: $\quad [\gamma_0 \mathscr{D} g] = g\,; \quad [\gamma_1 \mathscr{D} g] = 0$

One-sided traces: $\quad \gamma_0^{\pm}\mathscr{D} g = \pm\frac{1}{2}g + Kg\,; \quad \gamma_1^{\pm}\mathscr{D} g = -Wg$

$$Kg(x) = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -N(y)G(x-y) & M(y)G(x-y) \\ -\partial_{n(x)}N(y)G(x-y) & \partial_{n(x)}M(y)G(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(y)\,ds(y)$$

Integral equation for the interior Dirichlet problem

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K\right)g = f$$

Orders: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$: Not a classical Fredholm second kind integral equation!

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2; \Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u, v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D}g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H^2_0(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H^2_0(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H^2_0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H^{-2}_\Gamma(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Continuity

$$\mathscr{S} : X' \to H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \quad ; \qquad \mathscr{D} : X \to H^2(\Delta^2;\Omega)$$

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Representation formula in Ω

$$\forall u \in H^2(\Delta^2;\Omega) : \qquad u = G * \Delta^2 u + \mathscr{S}\gamma_1 u - \mathscr{D}\gamma_0 u$$

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Jump relations

$[\gamma_0 \mathscr{S}\phi] = 0$; $[\gamma_1 \mathscr{S}\phi] = -\phi$; $[\gamma_0 \mathscr{D} g] = g$; $[\gamma_1 \mathscr{D}] = 0$

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D}g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Definition of boundary integral operators

$$\begin{array}{lcll} V\phi & = & \{\gamma_0 \mathscr{S}\phi\} & , \quad K'\phi = \{\gamma_1 \mathscr{S}\phi\} \quad \text{on } X' \\ Kg & = & \{\gamma_0 \mathscr{D}g\} & , \quad Wg = -\{\gamma_1 \mathscr{D}g\} \quad \text{on } X \end{array}$$

Lipschitz boundaries: Spaces, traces and potentials

Dirichlet trace:
$X = H^2(\Omega^-)/H_0^2(\Omega^-) = H^2(\Omega^+)/H_0^2(\Omega^+) = H^2(\mathbb{R}^2)/H_0^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$
$\gamma_0 : H^2(\Omega) \to X$: Canonical projection

Neumann trace: $\gamma_1 = \gamma_{1,\sigma} : H^2(\Delta^2;\Omega) \to X' \subset H_\Gamma^{-2}(\mathbb{R}^2)$
defined by the first Green formula: $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle := \int_\Omega \Delta^2 u\, v - a(u,v)$

Definition

Single layer potential: $\mathscr{S}\phi = G * \gamma_0^* \phi$ Double layer potential : $\mathscr{D} g = G * \gamma_1^* g$

With these definitions, many things work and look the same as for the Laplace operator or other second order operators:

Etc...

$K' = K^*$, $KV = VK'$, $K'W = WK$, $VW = \frac{1}{4}\mathrm{I} - K^2$...
Calderón projector, Poincaré-Steklov operator, Boundary integral equations...

And finally: The Energy

Removal of zero-energy fields in Ω^-

$X_0' = \{g \in X' \mid \forall p \in \mathbb{P}_1 : \langle g, \gamma_0 p \rangle = 0\}; \quad X_0 = X/\gamma_0\mathbb{P}_1; \quad X_0' = (X_0)'$

The Neumann problem $u \in H^2(\Omega) : \Delta^2 u = 0, \gamma_1 u = g$ is solvable $\iff g \in X_0'$

Finiteness of energy in Ω^+

For $u = \mathscr{S}\phi, \phi \in X' : \ a^+(u,u) < \infty \Leftrightarrow \phi \in X_0'$ and $a^+(u,u) = 0 \Rightarrow \phi = 0$

For $u = \mathscr{D}g, g \in X : \ a^+(u,u) < \infty$ and $a^+(u,u) = 0 \Leftrightarrow g \in \gamma_0\mathbb{P}_1$

Lemma

The total energy $a^-(u,u) + a^+(u,u)$ defines positive quadratic forms
on X_0' via single layer potentials $u = \mathscr{S}\phi$
on X_0 via double layer potentials $u = \mathscr{D}g$

And finally: The Energy

Removal of zero-energy fields in Ω^-

$X_0' = \{g \in X' \mid \forall p \in \mathbb{P}_1 : \langle g, \gamma_0 p \rangle = 0\}; \quad X_0 = X/\gamma_0\mathbb{P}_1; \quad X_0' = (X_0)'$

The Neumann problem $u \in H^2(\Omega) : \Delta^2 u = 0, \gamma_1 u = g$ is solvable
$\iff g \in X_0'$

Finiteness of energy in Ω^+

For $u = \mathscr{S}\phi, \phi \in X' : \ a^+(u,u) < \infty \Leftrightarrow \phi \in X_0'$ and
$a^+(u,u) = 0 \Rightarrow \phi = 0$
For $u = \mathscr{D}g, g \in X : \ a^+(u,u) < \infty$ and $a^+(u,u) = 0 \Leftrightarrow g \in \gamma_0\mathbb{P}_1$

Lemma

The total energy $a^-(u,u) + a^+(u,u)$ defines positive quadratic forms
on X_0' via single layer potentials $u = \mathscr{S}\phi$
on X_0 via double layer potentials $u = \mathscr{D}g$

And finally: The Energy

Removal of zero-energy fields in Ω^-

$X_0' = \{g \in X' \mid \forall p \in \mathbb{P}_1 : \langle g, \gamma_0 p \rangle = 0\}; \quad X_0 = X/\gamma_0\mathbb{P}_1; \quad X_0' = (X_0)'$

The Neumann problem $u \in H^2(\Omega) : \Delta^2 u = 0, \gamma_1 u = g$ is solvable
$\iff g \in X_0'$

Finiteness of energy in Ω^+

For $u = \mathscr{S}\phi, \phi \in X' : \ a^+(u,u) < \infty \Leftrightarrow \phi \in X_0'$ and
$a^+(u,u) = 0 \Rightarrow \phi = 0$
For $u = \mathscr{D}g, g \in X : \ a^+(u,u) < \infty$ and $a^+(u,u) = 0 \Leftrightarrow g \in \gamma_0\mathbb{P}_1$

Lemma

The total energy $a^-(u,u) + a^+(u,u)$ defines positive quadratic forms
on X_0' via single layer potentials $u = \mathscr{S}\phi$
on X_0 via double layer potentials $u = \mathscr{D}g$

Lemma

There exists $\mu = \mu(\Gamma) \geq 1$ such that
if $u = \mathscr{S}\phi$, $\phi \in X_0'$, or $u = \mathscr{D}g$, $g \in X$, then

$$\frac{1}{\mu} a^-(u,u) \leq a^+(u,u) \leq \mu a^-(u,u)$$

Proof of the Corollary:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\leq (\mu+1)a^-(u,u) \\
a(u,u) &\leq (1+\mu)a^+(u,u) \\
a^+(u,u) &= a(u,u) - a^-(u,u) \leq \tfrac{\mu}{\mu+1} a(u,u) \\
a^-(u,u) &= a(u,u) - a^+(u,u) \leq \tfrac{\mu}{\mu+1} a(u,u) \\
|a^+(u,u) - a^-(u,u)| &\leq \tfrac{\mu-1}{\mu+1} a(u,u)
\end{aligned}$$

Lemma

There exists $\mu = \mu(\Gamma) \geq 1$ such that
if $u = \mathscr{S}\phi$, $\phi \in X_0'$, or $u = \mathscr{D}g$, $g \in X$, then

$$\frac{1}{\mu} a^-(u,u) \leq a^+(u,u) \leq \mu a^-(u,u)$$

Corollary

On the Hilbert space X_0 with the norm of the total energy

$$\|g\|_a^2 = a(u,u) = a^-(u,u) + a^+(u,u)\ ; \quad (u = \mathscr{D}g)$$

the operators A^+ and A^- defined by the bilinear forms a^+ and a^- are positive definite, selfadjoint bounded operators satisfying
$A^+ + A^- = \mathrm{I}$.
The 3 operators A^+, A^- and $A^+ - A^-$ are contractions:

$$\|A^+\|_a \leq \frac{\mu}{\mu+1}\ ; \quad \|A^-\|_a \leq \frac{\mu}{\mu+1}\ ; \quad \|A^+ - A^-\|_a \leq \frac{\mu-1}{\mu+1}$$

Lemma

There exists $\mu = \mu(\Gamma) \geq 1$ such that
if $u = \mathscr{S}\phi$, $\phi \in X_0'$, or $u = \mathscr{D}g$, $g \in X$, then

$$\frac{1}{\mu} a^-(u,u) \leq a^+(u,u) \leq \mu a^-(u,u)$$

Proof of the Corollary:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\leq (\mu+1)a^-(u,u) \\
a(u,u) &\leq (1+\mu)a^+(u,u) \\
a^+(u,u) &= a(u,u) - a^-(u,u) \leq \tfrac{\mu}{\mu+1} a(u,u) \\
a^-(u,u) &= a(u,u) - a^+(u,u) \leq \tfrac{\mu}{\mu+1} a(u,u) \\
|a^+(u,u) - a^-(u,u)| &\leq \tfrac{\mu-1}{\mu+1} a(u,u)
\end{aligned}$$

The biharmonic double layer potential operator

From the first Green formulas and the jump relations,
one has the expressions for the total and partial energies

$$\forall u = \mathscr{D} g, g \in X_0 \ : \qquad a^{\pm}(u,u) = \langle Wg, (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} \pm K) g \rangle \ ; \quad a(u,u) = \langle Wg, g \rangle$$

Hence we can identify:

$$\|g\|_a^2 = \langle Wg, g \rangle \ ; \quad A^{\pm} = \tfrac{1}{2}\mathrm{I} \pm K \ ; \quad A^{+} - A^{-} = 2K$$

Theorem

The operators $\frac{1}{2}\mathrm{I} \pm K$ are positive definite selfadjoint operators on X_0 with the energy norm.
The operators $\frac{1}{2}\mathrm{I} \pm K$ and $2K$ are contractions.
The Dirichlet problem in Ω: $\Delta^2 u = 0, \gamma_0 u = f \in X$ can be solved by a double layer potential $u = \mathscr{D} g$, where g is given by the convergent Neumann series

$$g = (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K)^{-1} f = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)^{\ell} f$$

Theorem

The operators $\frac{1}{2}\mathrm{I} \pm K$ are positive definite selfadjoint operators on X_0 with the energy norm.
The operators $\frac{1}{2}\mathrm{I} \pm K$ and $2K$ are contractions.
The Dirichlet problem in Ω: $\Delta^2 u = 0, \gamma_0 u = f \in X$ can be solved by a double layer potential $u = \mathscr{D} g$, where g is given by the convergent Neumann series

$$g = (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} - K)^{-1} f = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K)^{\ell} f$$

On the quotient space X_0, the following Neumann series is also convergent:

$$g = (\tfrac{1}{2}(\mathrm{I} - 2K))^{-1} f = 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2K)^{\ell} f$$

The contraction constant (Poincaré estimate)

For the norm $\|\frac{1}{2}(\mathrm{I}-2K\|_W$ we have seen

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{2}\mathrm{I}-K\|_W &= \sup_{g\in X_0}\frac{\langle Wg,(\tfrac{1}{2}\mathrm{I}-K)g\rangle}{\langle Wg,g\rangle}\\
&= \sup\{\frac{a^-(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a double layer potential }\}\\
&= 1-\inf\{\frac{a^+(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a double layer potential }\}
\end{aligned}$$

In a similar way, we get, by representing single layer potentials by their Dirichlet data

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{2}\mathrm{I}+K\|_{V^{-1}} &= \sup_{g\in X}\frac{\langle V^{-1}g,(\tfrac{1}{2}\mathrm{I}+K)g\rangle}{\langle V^{-1}g,g\rangle}\\
&= \sup\{\frac{a^-(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a single layer potential }\}\\
&= 1-\inf\{\frac{a^+(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a single layer potential }\}
\end{aligned}$$

The contraction constant (Poincaré estimate)

For the norm $\|\frac{1}{2}(\mathrm{I}-2K\|_W$ we have seen

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{2}\mathrm{I}-K\|_W &= \sup_{g\in X_0}\frac{\langle Wg,(\tfrac{1}{2}\mathrm{I}-K)g\rangle}{\langle Wg,g\rangle}\\
&= \sup\{\frac{a^-(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a double layer potential }\}\\
&= 1-\inf\{\frac{a^+(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a double layer potential }\}
\end{aligned}$$

In a similar way, we get, by representing single layer potentials by their Dirichlet data

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{2}\mathrm{I}+K\|_{V^{-1}} &= \sup_{g\in X}\frac{\langle V^{-1}g,(\tfrac{1}{2}\mathrm{I}+K)g\rangle}{\langle V^{-1}g,g\rangle}\\
&= \sup\{\frac{a^-(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a single layer potential }\}\\
&= 1-\inf\{\frac{a^+(u,u)}{a^+(u,u)+a^-(u,u)} \mid u \text{ is a single layer potential }\}
\end{aligned}$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

Recall: The Poincaré-Steklov operator in Ω^-: $S : \gamma u \mapsto \gamma_1 u \, (Lu = 0)$

$$
\begin{aligned}
S &= (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1} && (\text{ S.L.: } u = \mathscr{S}\varphi \,;\, \gamma u = V\varphi \,;\, \gamma_1 u = (\tfrac{1}{2} I + K')\varphi \,) \\
&= W(\tfrac{1}{2} I - K)^{-1} && (\text{ D.L.: } u = \mathscr{D}v \,;\, \gamma u = (-\tfrac{1}{2} I + K)v \,;\, \gamma_1 u = -Wv \,) \\
&= W + S(\tfrac{1}{2} I + K) && (\, S(I - (\tfrac{1}{2} I + K)) = W \,) \\
&= W + (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2} I + K) && \text{symmetric form}
\end{aligned}
$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

Recall: The Poincaré-Steklov operator in Ω^-: $S : \gamma u \mapsto \gamma_1 u \, (Lu = 0)$

$$
\begin{aligned}
S &= (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1} && (\text{ S.L.: } u{=}\mathscr{S}\varphi \,;\, \gamma u{=}V\varphi \,;\, \gamma_1 u{=}(\tfrac{1}{2}I{+}K')\varphi \,) \\
&= W(\tfrac{1}{2} I - K)^{-1} && (\text{ D.L.: } u{=}\mathscr{D}v \,;\, \gamma u{=}(-\tfrac{1}{2}I{+}K)v \,;\, \gamma_1 u{=}{-}Wv \,) \\
&= W + S(\tfrac{1}{2} I + K) && (\, S(I{-}(\tfrac{1}{2}I{+}K)){=}W \,) \\
&= W + (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2} I + K) && \text{symmetric form}
\end{aligned}
$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

Recall: The Poincaré-Steklov operator in Ω^-: $S : \gamma u \mapsto \gamma_1 u \, (Lu = 0)$

$$
\begin{aligned}
S &= (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1} && (\text{ S.L.: } u{=}\mathscr{S}\varphi \,;\, \gamma u{=}V\varphi \,;\, \gamma_1 u{=}(\tfrac{1}{2}I{+}K')\varphi \,) \\
&= W(\tfrac{1}{2} I - K)^{-1} && (\text{ D.L.: } u{=}\mathscr{D}v \,;\, \gamma u{=}(-\tfrac{1}{2}I{+}K)v \,;\, \gamma_1 u{=}-Wv \,) \\
&= W + S(\tfrac{1}{2} I + K) && (\, S(I{-}(\tfrac{1}{2}I{+}K)){=}W \,) \\
&= W + (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2} I + K) && \text{symmetric form}
\end{aligned}
$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

Recall: The Poincaré-Steklov operator in Ω^-: $S : \gamma u \mapsto \gamma_1 u \, (Lu = 0)$

$$
\begin{aligned}
S &= (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1} && (\text{ S.L.: } u{=}\mathscr{S}\varphi \,;\, \gamma u{=}V\varphi \,;\, \gamma_1 u{=}(\tfrac{1}{2} I{+}K')\varphi \,) \\
&= W(\tfrac{1}{2} I - K)^{-1} && (\text{ D.L.: } u{=}\mathscr{D}v \,;\, \gamma u{=}(-\tfrac{1}{2} I{+}K)v \,;\, \gamma_1 u{=}-Wv \,) \\
&= W + S(\tfrac{1}{2} I + K) && (\, S(I{-}(\tfrac{1}{2} I{+}K)){=}W \,) \\
&= W + (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2} I + K) && \text{symmetric form}
\end{aligned}
$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

Recall: The Poincaré-Steklov operator in Ω^-: $S : \gamma u \mapsto \gamma_1 u \, (Lu = 0)$

$$
\begin{aligned}
S &= (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1} && (\text{ S.L.: } u{=}\mathscr{S}\varphi \,;\, \gamma u{=}V\varphi \,;\, \gamma_1 u{=}(\tfrac{1}{2} I{+}K')\varphi \,) \\
&= W(\tfrac{1}{2} I - K)^{-1} && (\text{ D.L.: } u{=}\mathscr{D}v \,;\, \gamma u{=}(-\tfrac{1}{2} I{+}K)v \,;\, \gamma_1 u{=}-Wv \,) \\
&= W + S(\tfrac{1}{2} I + K) && (\, S(I{-}(\tfrac{1}{2} I{+}K)){=}W \,) \\
&= W + (\tfrac{1}{2} I + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2} I + K) && \text{symmetric form}
\end{aligned}
$$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

- If $a, b \in \mathbb{R}$ and $b \geq b^2 + a$ and $a > 0$, then

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a} \leq b \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- If A, B are bounded selfadjoint operators and $B = B^2 + A$ and $A \geq aI > 0$, then

$$\|B\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- Let $B = \frac{1}{2}\mathrm{I} + K$ in $X_{V^{-1}}$. The symmetric representation of S

$$V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) = S = (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) + W$$

shows that $B = B^2 + A$, $A \geq c_0 I > 0$ with

Hence $\|B\|_{V^{-1}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_0} < 1$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

- If $a, b \in \mathbb{R}$ and $b \geq b^2 + a$ and $a > 0$, then

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a} \leq b \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- If A, B are bounded selfadjoint operators and $B = B^2 + A$ and $A \geq aI > 0$, then

$$\|B\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- Let $B = \frac{1}{2}\mathrm{I} + K$ in $X_{V^{-1}}$. The symmetric representation of S

$$V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) = S = (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) + W$$

shows that $B = B^2 + A$, $A \geq c_0 I > 0$ with

Hence $\|B\|_{V^{-1}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_0} < 1$

The contraction constant (Steinbach-Wendland estimate)

- If $a, b \in \mathbb{R}$ and $b \geq b^2 + a$ and $a > 0$, then

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a} \leq b \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- If A, B are bounded selfadjoint operators and $B = B^2 + A$ and $A \geq aI > 0$, then

$$\|B\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < 1$$

- Let $B = \frac{1}{2}\mathrm{I} + K$ in $X_{V^{-1}}$. The symmetric representation of S

$$V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) = S = (\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K')V^{-1}(\tfrac{1}{2}\mathrm{I} + K) + W$$

shows that $B = B^2 + A$, $A \geq c_0 I > 0$ with

$$c_0 = \inf_{v \in X_0} \frac{\langle v, Wv \rangle}{\langle v, V^{-1} v \rangle}$$

Hence $\|B\|_{V^{-1}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_0} < 1$