SUR LE SYSTÈME DE VLASOV-POISSON GRAVITATIONNEL

DU VIEUX ET DU NEUF

Mohammed Lemou[1], Florian Méhats [1], Pierre Raphaël[2]

(1) IRMAR, Rennes (2) IMT, Toulouse

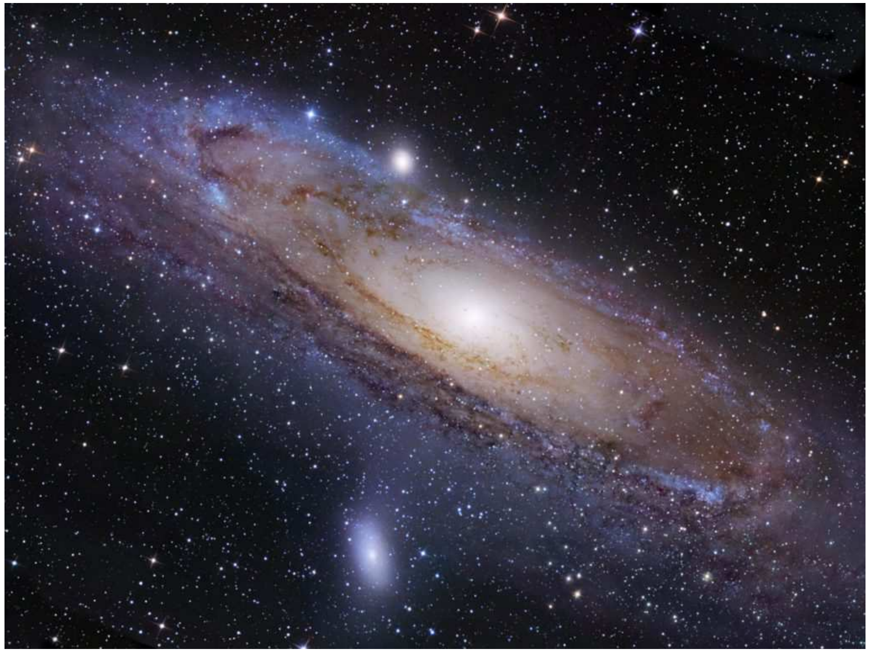
Preprint accessibles sur `http ://perso.univ-rennes1.fr/florian.mehats/`

3ème journée équipe Analyse Numérique

Rennes, le 13 mars 2008

Le système de Vlasov-Poisson

Un modèle cinétique décrivant l'évolution d'un "gaz d'étoiles"' en interaction gravitationnelle.



Les inconnues sont :

- la fonction de distribution $f(t, x, v) \geq 0$ définie sur l'espace des phases,
- le potentiel autoconsistant de Poisson $\phi_f(t, x)$.

VLASOV-POISSON GRAVITATIONNEL EN DIMENSION 3 (VP)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \qquad f(t=0,x,v) = f_0(x,v)$$

$$\phi_f(t,y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\rho_f(t,y)dy, \qquad \rho_f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv.$$

Bien connu : problème de Cauchy bien posé, pour tout temps. Solutions faibles (Batt, Horst, DiPerna-Lions) ou classiques (Pfaffelmoser, Lions-Perthame)...

Questions posées ici :

- Générer une famille “assez grande” de solutions stationnaires de façon variationnelle.
- Montrer leur stabilité pour tout temps.

VLASOV-POISSON GRAVITATIONNEL RELATIVISTE (VPR)

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \qquad f(t=0,x,v) = f_0(x,v)$$

$$\phi_f(t,y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho_f(t,y)dy, \qquad \rho_f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv.$$

Bien connu : problème de Cauchy bien posé localement en temps, argument obstructif (Glassey-Schaeffer) montrant qu'il peut y avoir explosion en temps fini.

Questions posées ici :

- Définir un critère d'explosion en temps fini ou d'existence pour tout temps.
- Étudier les dynamiques d'explosion.

Spécificités de notre travail

On exploite davantage les fortes analogies entre Vlasov-Poisson et Schrödinger non linéaire (NLS) : structure Hamiltonienne, caractère dispersif, propriété de viriel.

- Pour les questions de stabilité, se replacer dans un cadre datant des années 80 : Lions, Berestycki, Cazenave, Weinstein... Adapter la méthode de concentration compacité.

- Pour les études de dynamique d'explosion, utiliser les progrès réalisés ces dernières années autour de F. Merle sur NLS.

Plan de l'exposé

Invariants, espace d'énergie

Les quantités suivantes ne dépendent pas de t :

- $\|f(t)\|_{L^q}$ pour tout $q \in [1, \infty]$, ou plus généralement tout $\|j(f)\|_{L^1}$
- $\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t,x,v)\,dx\,dv - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f(t,x)|^2\,dx$

INVARIANTS, ESPACE D'ÉNERGIE

Les quantités suivantes ne dépendent pas de t :

- $\|f(t)\|_{L^q}$ pour tout $q \in [1, \infty]$, ou plus généralement tout $\|j(f)\|_{L^1}$
- $\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t,x,v)\,dxdv - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f(t,x)|^2 dx$

Une inégalité importante : l'inégalité d'interpolation ("Gagliardo-Nirenbreg")

$$\|\nabla_x \phi_f\|_{L^2}^2 \leq C \||v|^2 f\|_{L^1}^{1/2} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}$$

Invariants, espace d'énergie

Les quantités suivantes ne dépendent pas de t :

- $\|f(t)\|_{L^q}$ pour tout $q \in [1, \infty]$, ou plus généralement tout $\|j(f)\|_{L^1}$
- $\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t,x,v)\,dx dv - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f(t,x)|^2 dx$

Une inégalité importante : l'inégalité d'interpolation ("Gagliardo-Nirenbreg")

$$\|\nabla_x \phi_f\|_{L^2}^2 \leq C \||v|^2 f\|_{L^1}^{1/2} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}$$

Un espace naturel : l'espace d'énergie à un paramètre $p \in]9/7, +\infty]$

$$\mathcal{E}_p = \{ f \geq 0 \text{ avec } f \in L^1, \quad f \in L^p, \quad |v|^2 f \in L^1 \}$$

Existence de solutions faibles en deux étapes :

- dès que $f_0 \in \mathcal{E}_p$ on peut construire une solution localement en temps,
- cette solution existe pour tout temps si son énergie cinétique $\| |v|^2 f \|_{L^1}$ reste bornée, ce que l'on montre ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f_0) = \mathcal{H}(f(t)) &= \| |v|^2 f(t) \|_{L^1} - \| \nabla_x \phi_f(t) \|_{L^2}^2 \\ &\geq \| |v|^2 f(t) \|_{L^1} - C \| |v|^2 f(t) \|_{L^1}^{1/2} \end{aligned}$$

Existence de solutions faibles en deux étapes :

- dès que $f_0 \in \mathcal{E}_p$ on peut construire une solution localement en temps,
- cette solution existe pour tout temps si son énergie cinétique $\||v|^2 f\|_{L^1}$ reste bornée, ce que l'on montre ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f_0) = \mathcal{H}(f(t)) &= \||v|^2 f(t)\|_{L^1} - \|\nabla_x \phi_f(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \||v|^2 f(t)\|_{L^1} - C\||v|^2 f(t)\|_{L^1}^{1/2} \end{aligned}$$

Existence et unicité de solutions classiques :

Si $f_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^6)$, des résultats importants de la fin des années 80 (par ex. méthode des moments de Lions-Perthame) montrent que la solution faible est régulière.

Les fonctions de la forme $f(x,v) = F(\frac{|v|^2}{2} + \phi_f)$ sont solutions stationnaires :

$$v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0.$$

Les fonctions de la forme $f(x,v) = F(\frac{|v|^2}{2} + \phi_f)$ sont solutions stationnaires :

$$v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0.$$

Une façon d'obtenir de telles fonctions : en minimisant l'énergie sous contraintes

$$\min \left\{ \mathcal{H}(g) \text{ où } g \in \mathcal{E}_p \,, \quad \int g \, dxdv = M_1 \,, \quad \int j(g) \, dxdv = M_j \right\}$$

où j est une fonction d'entropie que l'on se donne a priori.

Équation d'Euler-Lagrange : tout minimiseur Q satisfait sur son support

$$\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q = \lambda + \mu j'(Q) \quad \Longrightarrow \quad Q = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q - \lambda}{\mu} \right)_+$$

où λ et μ sont deux multiplicateurs de Lagrange caractérisant Q.

Hypothèses : $j \in C^1$ convexe, $j(0) = j'(0) = 0$, $C_1 s^p \le j(s) \le C_2 s^p$

$$\exists p_1, p_2 > 3/2 : \quad \forall s \qquad p_1 \le \frac{s j'(s)}{j(s)} \le p_2.$$

Théorème 1 (compacité des suites minimisantes).

Toute suite minimisante f_n *est relativement compacte,* à translation près, *dans l'espace d'énergie* $\mathcal{E}_p$ *: il existe une sous-suite* $f_{n'}$*, une suite* $x_n \in \mathbb{R}^3$ *et un minimiseur* Q *tels que* $\|f_{n'}(x - x_{n'}, v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} \to 0$.

Élément de preuve. Le point crucial est de montrer que l'énergie potentielle $\|\nabla_x \phi_{f_n}\|_{L^2}$ est compacte. Pour cela, on utilise un lemme de concentration compacité de P.-L. Lions.

Théorème 2 (stabilité orbitale pour (VP)).

Soit Q *un minimiseur. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

si $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta(\varepsilon)$ *alors* $\forall t \quad \|f(t, x - x(t), v) - Q(x, v)\| < \varepsilon,$

où $x(t) \in \mathbb{R}^3$ *(de plus, si* f_0 *est à symétrie sphérique,* $x(t) \equiv 0$*).*

Théorème 2 (stabilité orbitale pour (VP)).

Soit Q un minimiseur. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\text{si } \|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta(\varepsilon) \text{ alors } \forall t \quad \|f(t, x - x(t), v) - Q(x, v)\| < \varepsilon,$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^3$ (de plus, si f_0 est à symétrie sphérique, $x(t) \equiv 0$).

Élément de preuve. Début du raisonnement standard, par l'absurde. On utilise la conservation au cours du temps de l'énergie et des contraintes, puis on applique le Théorème 1.

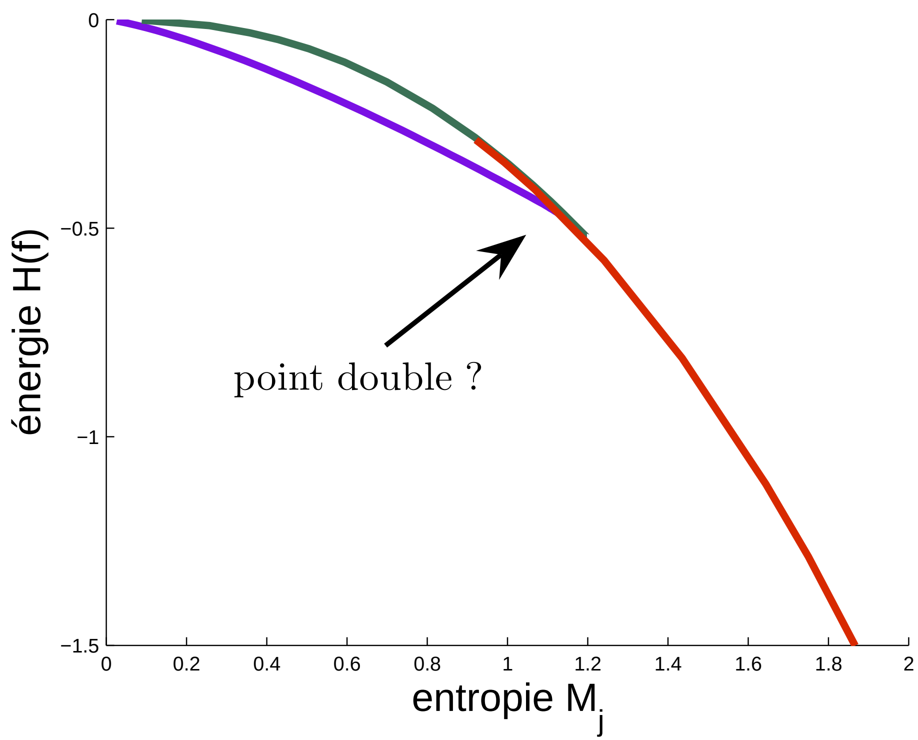
Problème : partant de Q, on pourrait converger vers un autre $\tilde{Q}$.

En fait, non. L'idée de notre preuve, nouvelle mais élémentaire, est qu'on n'a pas besoin de l'unicité du minimiseur, grâce à une série d'identités reliant les multiplicateurs de Lagrange λ, μ et des intégrales de Q (conservées par le flot).

Un problème ouvert : l'unicité du minimiseur. *Preuve numérique de non unicité ?*

Pour un j bien choisi, on se ramène à résoudre l'EDO suivante avec comme paramètre $\phi(0) = \alpha$ et avec $\frac{d\phi}{dr}(0) = 0$.

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = 4\pi \int_0^\infty (j')^{-1}\left(\frac{w^2}{2} + \phi\right)_+ w^2 dw,$$



Invariants, espace d'énergie

Les quantités suivantes ne dépendent pas de t :

- $\|f(t)\|_{L^q}$ pour tout $q \in [1, \infty]$, ou plus généralement tout $\|j(f)\|_{L^1}$

- $\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} \sqrt{1 + |v|^2} \, f(t,x,v) dx dv - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f(t,x)|^2 dx$

Invariants, espace d'Énergie

Les quantités suivantes ne dépendent pas de t :

- $\|f(t)\|_{L^q}$ pour tout $q \in [1,\infty]$, ou plus généralement tout $\|j(f)\|_{L^1}$
- $$\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} \sqrt{1+|v|^2}\, f(t,x,v)\,dx\,dv - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_f(t,x)|^2 dx$$

L'inégalité d'interpolation : l'énergie potentielle et l'énergie cinétique ont le même poids !

$$\|\nabla_x \phi_f\|_{L^2}^2 \leq C_0 \|\sqrt{1+|v|^2} f\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}}\, \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}$$

L'espace d'énergie :

$$\mathcal{E}_p = \left\{ f \geq 0 \text{ avec } f \in L^1, \quad f \in L^p, \quad |v| f \in L^1 \right\}$$

Contrôle de l'énergie cinétique ?

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_0) = \mathcal{H}(f(t)) &= \|\sqrt{1+|v|^2}f(t)\|_{L^1} - \|\nabla_x \phi_f(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\sqrt{1+|v|^2}f(t)\|_{L^1}\left(1 - C_0 \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}\right)\end{aligned}$$

D'où un critère de non-explosion en temps fini :

$$C_0 \|f_0\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} < 1\,.$$

Contrôle de l'énergie cinétique ?

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_0) = \mathcal{H}(f(t)) &= \|\sqrt{1+|v|^2} f(t)\|_{L^1} - \|\nabla_x \phi_f(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\sqrt{1+|v|^2} f(t)\|_{L^1} \left(1 - C_0 \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}\right)\end{aligned}$$

D'où un critère de non-explosion en temps fini :

$$C_0 \|f_0\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} < 1\,.$$

A l'opposé, on connaît depuis 1985 (Glassey-Schaeffer) un argument basé sur le viriel qui montre que toute solution d'énergie négative explose en temps fini :

$$\int |x|^2 f(t,x,v)\,dx dv \leq \mathcal{H}(f_0) t^2 + C(f_0)(1+t).$$

CONTRÔLE DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE ?

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_0) = \mathcal{H}(f(t)) &= \|\sqrt{1+|v|^2}f(t)\|_{L^1} - \|\nabla_x \phi_f(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\sqrt{1+|v|^2}f(t)\|_{L^1}\left(1 - C_0\|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}}\,\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}\right)\end{aligned}$$

D'où un critère de non-explosion en temps fini :

$$C_0\|f_0\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}}\,\|f_0\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} < 1\,.$$

A l'opposé, on connaît depuis 1985 (Glassey-Schaeffer) un argument basé sur le viriel qui montre que toute solution d'énergie négative explose en temps fini :

$$\int |x|^2 f(t,x,v)dxdv \leq \mathcal{H}(f_0)t^2 + C(f_0)(1+t).$$

Comment aller plus loin dans la description ?

Une idée : lorsqu'il y a explosion en temps fini, on a $\|\sqrt{1+|v|^2}f\|_{L^1} \to +\infty$ alors que $\|f\|_{L^1}$ reste borné $\Longrightarrow$ les vitesses sont grandes et le comportement de (VPR) est proche de celui du système ultrarelativiste

(VPUR) $$\partial_t f + \frac{v}{|v|} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0$$

Avantage de ce système : il présente davantage d'homogénéités.

Une idée : lorsqu'il y a explosion en temps fini, on a $\|\sqrt{1+|v|^2}f\|_{L^1} \to +\infty$ alors que $\|f\|_{L^1}$ reste borné $\Longrightarrow$ les vitesses sont grandes et le comportement de (VPR) est proche de celui du système ultrarelativiste

(VPUR) $$\partial_t f + \frac{v}{|v|} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0$$

Avantage de ce système : il présente davantage d'homogénéités. Posons

$$f(t,x,v) = g\left(\frac{x}{b(T-t)}, b(T-t)v\right).$$

Alors f satisfait (VPUR) ssi g satisfait l'équation stationnaire suivante :

$$\frac{v}{|v|} \cdot \nabla_x g - \nabla_x \phi_g \cdot \nabla_v g + b(x \cdot \nabla_x g - v \cdot \nabla_v g) = 0$$

Une solution de cette équation fournit une solution explosive de (VPUR) !

Théorème 3 (solutions autosemblables exactes pour (VPUR)).

Le système (VPUR) admet une famille de solutions autosemblables explosives de la forme

$$f(t,x,v) = Q_b\left(\frac{x}{b(T-t)}, b(T-t)v\right),$$

avec

$$Q_b(x,v) = (-|v| - \phi_{Q_b} - b\chi(x)x\cdot v - 1)_+^{1/(p-1)}.$$

Théorème 3 (solutions autosemblables exactes pour (VPUR)).

Le système (VPUR) admet une famille de solutions autosemblables explosives de la forme

$$f(t,x,v) = Q_b\left(\frac{x}{b(T-t)}, b(T-t)v\right),$$

avec

$$Q_b(x,v) = (-|v| - \phi_{Q_b} - b\chi(x)x\cdot v - 1)_+^{1/(p-1)}.$$

Commentaires :

- Les fonctions de la forme $g(x,v) = G(|v| + \phi_g + bx\cdot v)$ satisfont :

$$\frac{v}{|v|}\cdot\nabla_x g - \nabla_x\phi_g\cdot\nabla_v g + b(x\cdot\nabla_x g - v\cdot\nabla_v g) = 0.$$

  Problème : elles ne sont pas dans l'espace l'énergie !

- D'où la troncature $\chi(x)$ telle que $\chi(x)\equiv 1$ sur le support de Q_b.

Théorème 4 (dynamique autosemblable d'explosion pour (VPR)).

Il existe des solutions de (VPR) de la forme

$$f(t,x,v) = (Q_{b(t)} + \varepsilon)\left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v\right),$$

où $C_1(T-t) \leq \lambda(t) \leq C_2(T-t)$, $0 < b_0 \leq b(t) \leq 2b_0$ *et la fonction* $\varepsilon(t,x,v)$ *reste "petite".*

Commentaires : la preuve de ce théorème est un gros morceau ! Elle repose sur une décomposition géométrique astucieuse de $f(t,x,v)$ qui utilise la théorie de la modulation, puis sur un contrôle des paramètres de modulation $b(t)$, $\lambda(t)$ et de l'"excès de masse" $\varepsilon(t,x,v)$. Le coeur de la preuve utilise l'identité du viriel et une analyse fine du linéarisé du système de Vlasov-Poisson.