

Description de l'effet de peau par un développement asymptotique

G. Caloz M. Dauge V. Péron

Université de Rennes 1
IRMAR

Journée d'équipe, 13/03/2008

Plan

- 1 Introduction
- 2 Développement asymptotique 3D
- 3 Estimation a priori

Plan

- 1 **Introduction**
- 2 Développement asymptotique 3D
- 3 Estimation a priori

Modélisation de l'effet de peau en électromagnétisme

- Etude à σ grand. L'épaisseur de peau δ est petite: $\delta^2 = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$.

Modélisation de l'effet de peau en électromagnétisme

- Etude à σ grand. L'épaisseur de peau δ est petite: $\delta^2 = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$.
- Système de Maxwell harmonique en temps à petit paramètre δ

$$(\mathbf{P}_\delta) \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta - i\kappa\mu_0 \mathbf{H}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega & (\text{loi de Faraday}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta + i\kappa\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega & (\text{loi d'Ampère}) \end{cases}$$

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{1}_{\Omega_{\text{is}}} + (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{1}_{\Omega_{\text{cd}}})$$

Hypothèse: $\operatorname{Supp}(\mathbf{j}) \subset \Omega_{\text{is}}$ et $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$

$$\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

Modélisation de l'effet de peau en électromagnétisme

- Etude à σ grand. L'épaisseur de peau δ est petite: $\delta^2 = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$.
- Système de Maxwell harmonique en temps à petit paramètre δ

$$(\mathbf{P}_\delta) \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta - i\kappa\mu_0 \mathbf{H}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega & (\text{loi de Faraday}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta + i\kappa\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega & (\text{loi d'Ampère}) \end{cases}$$

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{1}_{\Omega_{\text{is}}} + (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{1}_{\Omega_{\text{cd}}})$$

Hypothèse: $\operatorname{Supp}(\mathbf{j}) \subset \Omega_{\text{is}}$ et $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$

$$\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

- Objectifs: \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ lorsque $\delta \rightarrow 0$.


Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).



Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).
- Littérature:

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).
- Littérature:
 -  Stephan(E.)
Springer, Vienna, 1983

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).
- Littérature:
 -  Stephan(E.)
Springer, Vienna, 1983
 -  MacCamy(R.C.), Stephan(E.)
Arch. Rational Mech. Anal. 90, no.1, 1985.

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).

- Littérature:



Stephan(E.)

Springer, Vienna, 1983



MacCamy(R.C.), Stephan(E.)

Arch. Rational Mech. Anal. 90, no.1, 1985.



Costabel(M.), Dauge(M.), Nicaise(S.)

M2AN Math. Model. Numer. Anal. 37, no 5, 2003

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).

- Littérature:



Stephan(E.)

Springer, Vienna, 1983



MacCamy(R.C.), Stephan(E.)

Arch. Rational Mech. Anal. 90, no.1, 1985.



Costabel(M.), Dauge(M.), Nicaise(S.)






M2AN Math. Model. Numer. Anal. 37, no 5, 2003



Haddar(H.), Joly(P.), Nguyen(H.N.)

RR-6302, INRIA 2007

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).
- Littérature:
 -  Stephan(E.)
Springer, Vienna, 1983
 -  MacCamy(R.C.), Stephan(E.)
Arch. Rational Mech. Anal. 90, no.1, 1985.
 -  Costabel(M.), Dauge(M.), Nicaise(S.)
M2AN Math. Model. Numer. Anal. 37, no 5, 2003
 -  Haddar(H.), Joly(P.), Nguyen(H.N.)
RR-6302, INRIA 2007
 -  Faou(E.)
Asymptotic Analysis 31, 2002

Motivations, littérature

- Motivations: obtenir des estimations optimales pour construire des bonnes méthodes de résolution numérique (éléments finis).

- Littérature:



Stephan(E.)

Springer, Vienna, 1983



MacCamy(R.C.), Stephan(E.)

Arch. Rational Mech. Anal. 90, no.1, 1985.



Costabel(M.), Dauge(M.), Nicaise(S.)

M2AN Math. Model. Numer. Anal. 37, no 5, 2003



Haddar(H.), Joly(P.), Nguyen(H.N.)

RR-6302, INRIA 2007



Faou(E.)

Asymptotic Analysis 31, 2002



Amrouche(C.), Bernardi(C.), Dauge(M.), Girault(V.)

Math. Meth. Appl. Sci., 21, 1998.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Développement asymptotique 3D**
- 3 Estimation a priori

Formulation en champ électrique

$[\mathbf{E}]_{\Sigma} = \mathbf{E}^{is} - \mathbf{E}^{cd}$ le saut de \mathbf{E} sur Σ .

Proposition

Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, \mathbf{E}_{δ} et $\mathbf{H}_{\delta} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (\mathbf{P}_{δ}) . Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\delta}^{is} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\delta}^{is} = i\kappa\mu_0 \mathbf{j} & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega_{is}) \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\delta}^{cd} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}_{\delta}^{cd} = 0 & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega_{cd}) \\ [\mathbf{E}_{\delta} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0 \\ [\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\delta} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0 \\ \mathbf{E}_{\delta}^{is} \cdot \mathbf{n} = \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}_{\delta}^{cd} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{E}_{\delta}^{is} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

De plus, $\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_{\delta} = 0$ dans Ω .

Formulation en champ électrique

Notations

$$\mathbf{L}^{\text{is}} = \text{rot rot } -\kappa^2 Id$$

$$\mathbf{L}^{\text{cd}} = \text{rot rot } -\kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) Id$$

$$\mathbf{F} = i\kappa\mu_0 \mathbf{j}$$

Formulation en champ électrique

Notations

$$\mathbf{L}^{\text{is}} = \text{rot rot } -\kappa^2 Id$$

$$\mathbf{L}^{\text{cd}} = \text{rot rot } -\kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) Id$$

$$\mathbf{F} = i\kappa\mu_0 \mathbf{j}$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^{\text{is}}(\mathbf{E}_\delta^{\text{is}}) = \mathbf{F} \quad \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} \quad \Sigma \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^{\text{cd}}(\mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}) = 0 \quad \Omega_{\text{cd}} \\ \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \Sigma \end{array} \right.$$

Coordonnées normales

- Paramétrisation normale

$$\Psi : \Sigma \times (0, \eta) \ni (P, y_3) \rightarrow P + y_3 \mathbf{n}(P) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta)) : \text{voisinage tubulaire de } \Sigma$$

$$\Sigma_h = \Psi(\Sigma, h), \text{ pour } h = y_3 \text{ fixé.}$$

Coordonnées normales

- Paramétrisation normale

$$\Psi : \Sigma \times (0, \eta) \ni (P, y_3) \rightarrow P + y_3 \mathbf{n}(P) \in \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta))$: voisinage tubulaire de Σ

$\Sigma_h = \Psi(\Sigma, h)$, pour $h = y_3$ fixé.

- Système de coordonnées normales

$(y_\alpha), \alpha \in \{1, 2\}$: coordonnées locales sur Σ

$\mathbf{y} = (y_i), i \in \{1, 2, 3\}$: coordonnées normales sur \mathcal{O} .

Coordonnées normales

- Paramétrisation normale

$$\Psi : \Sigma \times (0, \eta) \ni (P, y_3) \rightarrow P + y_3 \mathbf{n}(P) \in \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta))$: voisinage tubulaire de Σ

$\Sigma_h = \Psi(\Sigma, h)$, pour $h = y_3$ fixé.

- Système de coordonnées normales

(y_α) , $\alpha \in \{1, 2\}$: coordonnées locales sur Σ

$\mathbf{y} = (y_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$: coordonnées normales sur \mathcal{O} .

- Réduction normale

(X_α, \mathbf{n}) : vecteurs coordonnés associés et (dy^i) sa base duale

Coordonnées normales

- Paramétrisation normale

$$\Psi : \Sigma \times (0, \eta) \ni (P, y_3) \rightarrow P + y_3 \mathbf{n}(P) \in \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta))$: voisinage tubulaire de Σ

$\Sigma_h = \Psi(\Sigma, h)$, pour $h = y_3$ fixé.

- Système de coordonnées normales

(y_α) , $\alpha \in \{1, 2\}$: coordonnées locales sur Σ

$\mathbf{y} = (y_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$: coordonnées normales sur \mathcal{O} .

- Réduction normale

(X_α, \mathbf{n}) : vecteurs coordonnés associés et (dy^i) sa base duale

Proposition

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$ un champ de 1-forme, alors $\mathbf{E} = (E_\alpha dy^\alpha, E_3)$.

$E_\alpha dy^\alpha$ est un champ de vecteur covariant et E_3 une fonction, dépendant de h .

Tenseur et Dérivée covariante

- Tenseur métrique sur Σ : $a_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle_{\mathbb{R}^3}$
Dérivée covariante: $D_\alpha = \partial_\alpha + \text{termes d'ordre 0}$
Tenseur de courbure: $b_{\alpha\beta}$

Tenseur et Dérivée covariante

- **Tenseur métrique** sur Σ : $a_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle_{\mathbb{R}^3}$
Dérivée covariante: $D_\alpha = \partial_\alpha + \text{termes d'ordre 0}$
Tenseur de courbure: $b_{\alpha\beta}$
- **Tenseur métrique** sur \mathcal{O} : $g_{ij}(h) = \langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{R}^3}$. On note $\mathbf{g} = \det(g_{ij})$

Tenseur d'orientation:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{ijk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} & \text{si } (i, j, k) \text{ est circulaire directe} \\ -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} & \text{si } (i, j, k) \text{ est circulaire indirecte} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dérivées covariantes: D_α^h sur Σ_h et ∇ sur \mathcal{O} .

Tenseur métrique et dérivée covariante commutent.

Notation: $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$

La divergence en paramétrisation normale

Définition (Divergence)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$. Alors,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla^i E_i$$

La divergence en paramétrisation normale

Définition (Divergence)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$. Alors,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla^i E_i$$

Définition (Tenseur de changement de métrique sur Σ_h)

$$\gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(D_\alpha^h E_\beta + D_\beta^h E_\alpha) - b_{\alpha\beta}(h)E_3$$

La divergence en paramétrisation normale

Définition (Divergence)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$. Alors,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla^i E_i$$

Définition (Tenseur de changement de métrique sur Σ_h)

$$\gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(D_\alpha^h E_\beta + D_\beta^h E_\alpha) - b_{\alpha\beta}(h)E_3$$

Proposition

$$\forall h \in (0, \eta), \operatorname{div}(\mathbf{y}, D_\alpha^h, \partial_3) \mathbf{E} = \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) + \partial_3 E_3$$

Le rotationnel en paramétrisation normale

Définition (Rotationnel)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$. Alors,

$$(\text{rot } \mathbf{E})^k = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{ijk} \nabla_i E_j$$

Le rotationnel en paramétrisation normale

Définition (Rotationnel)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$. Alors,

$$(\text{rot } \mathbf{E})^k = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{ijk} \nabla_i E_j$$

Proposition (Rotationnel en paramétrisation normale)

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E})^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{3\beta\alpha} (\partial_3 E_\beta - \partial_\beta E_3) \\ (\text{rot } \mathbf{E})^3 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{3\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta \end{cases}$$

Le rotationnel en paramétrisation normale

Définition (Rotationnel)

Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors,

$$(\text{rot } \mathbf{E})^k = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{ijk} \nabla_i E_j$$

Proposition (Rotationnel en paramétrisation normale)

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E})^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{3\beta\alpha} (\partial_3 E_\beta - \partial_\beta E_3) \\ (\text{rot } \mathbf{E})^3 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon^{3\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta \end{cases}$$

Proposition

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n})_\alpha = \nabla_3 E_\alpha - \nabla_\alpha E_3 \\ (\text{rot rot } \mathbf{E})_i = \nabla_i \nabla^j E_j - \nabla^j \nabla_j E_i \end{cases}$$

L'opérateur en paramétrisation normale

Proposition (Paramétrisation normale)

$$(\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n})_\alpha = \partial_3 E_\alpha - \partial_\alpha E_3 \quad \text{sur } \Sigma$$

L'opérateur en paramétrisation normale

Proposition (Paramétrisation normale)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n})_\alpha = \partial_3 E_\alpha - \partial_\alpha E_3 \quad \text{sur } \Sigma$$

Définition

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^{\text{cd}}(y_\alpha, h, D_\alpha^h, \partial_3) \mathbf{E} &:= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{\text{cd}} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}^{\text{cd}} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\text{cd}}(y_\alpha, \partial_\alpha, \partial_3) \mathbf{E} &:= (\operatorname{rot} \mathbf{E}^{\text{cd}} \times \mathbf{n})_\alpha dy^\alpha \end{aligned}$$

L'opérateur en paramétrisation normale

Proposition (Paramétrisation normale)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n})_\alpha = \partial_3 E_\alpha - \partial_\alpha E_3 \quad \text{sur } \Sigma$$

Définition

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^{\text{cd}}(y_\alpha, h, D_\alpha^h, \partial_3) \mathbf{E} &:= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{\text{cd}} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}^{\text{cd}} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\text{cd}}(y_\alpha, \partial_\alpha, \partial_3) \mathbf{E} &:= (\operatorname{rot} \mathbf{E}^{\text{cd}} \times \mathbf{n})_\alpha dy^\alpha \end{aligned}$$

- Récapitulation:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{L}}^{\text{cd}}(y_\alpha, h, D_\alpha^h, \partial_3) \mathbf{E}_\delta = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\text{cd}}(y_\alpha, \partial_\alpha, \partial_3) \mathbf{E}_\delta = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Equations posées sur Σ_h en terme de D^h , ∂_3 et d'opérateurs sur Σ_h dépendant de $a_{\alpha\beta}(h)$ et $b_{\alpha\beta}(h)$.

Développement des équations

- Tenseurs fondamentaux en h : $a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}$

Développement des équations

- Tenseurs fondamentaux en h : $a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}$
- Dérivées covariantes

$$D_{\alpha}^h E_{\beta}(h) = D_{\alpha} E_{\beta}(h) - hE_{\gamma}(h)D_{\alpha} b_{\beta}^{\gamma} + \mathcal{O}(h^2)$$

Développement des équations

- Tenseurs fondamentaux en h : $a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}$
- Dérivées covariantes

$$D_\alpha^h E_\beta(h) = D_\alpha E_\beta(h) - hE_\gamma(h)D_\alpha b_\beta^\gamma + \mathcal{O}(h^2)$$

- Scaling: $Y_3 = \frac{y_3}{\delta}$. On définit $\Omega_\delta := \Sigma \times (0, \frac{\eta}{\delta})$ et les opérateurs $\mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta), \mathbf{B}^{\text{cd}}(\delta)$:

$$\begin{cases} \mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta)(y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{L}}^{\text{cd}}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{dans } \Omega_\delta \\ \mathbf{B}^{\text{cd}}(\delta)(y_\alpha; \partial_\alpha, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{B}}^{\text{cd}}(y_\alpha; \partial_\alpha, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Développement des équations

- Tenseurs fondamentaux en h : $a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}$
- Dérivées covariantes

$$D_\alpha^h E_\beta(h) = D_\alpha E_\beta(h) - hE_\gamma(h)D_\alpha b_\beta^\gamma + \mathcal{O}(h^2)$$

- Scaling: $Y_3 = \frac{y_3}{\delta}$. On définit $\Omega_\delta := \Sigma \times (0, \frac{\eta}{\delta})$ et les opérateurs $\mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta)$, $\mathbf{B}^{\text{cd}}(\delta)$:

$$\begin{cases} \mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta)(y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{L}}^{\text{cd}}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{dans } \Omega_\delta \\ \mathbf{B}^{\text{cd}}(\delta)(y_\alpha; \partial_\alpha, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{B}}^{\text{cd}}(y_\alpha; \partial_\alpha, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

- Développement de $\mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta)$

$$\mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta) = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n$$

Développement des équations

- Tenseurs fondamentaux en h : $a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}$
- Dérivées covariantes

$$D_{\alpha}^h E_{\beta}(h) = D_{\alpha} E_{\beta}(h) - hE_{\gamma}(h)D_{\alpha} b_{\beta}^{\gamma} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Scaling: $Y_3 = \frac{y_3}{\delta}$. On définit $\Omega_{\delta} := \Sigma \times (0, \frac{\eta}{\delta})$ et les opérateurs $\mathbf{L}^{cd}(\delta)$, $\mathbf{B}^{cd}(\delta)$:

$$\begin{cases} \mathbf{L}^{cd}(\delta)(y_{\alpha}, Y_3; D_{\alpha}, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{L}}^{cd}(y_{\alpha}, \delta Y_3; D_{\alpha}, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{dans } \Omega_{\delta} \\ \mathbf{B}^{cd}(\delta)(y_{\alpha}; \partial_{\alpha}, \partial_{Y_3}) := \tilde{\mathbf{B}}^{cd}(y_{\alpha}; \partial_{\alpha}, \delta^{-1} \partial_{Y_3}) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

- Développement de $\mathbf{L}^{cd}(\delta)$

$$\mathbf{L}^{cd}(\delta) = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n$$

- $\mathbf{L}^0 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\partial_{Y_3}^2 E_{\alpha} - i\kappa^2 E_{\alpha} \\ -i\kappa^2 E_3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}^{cd}(\delta) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \delta^{-1} \partial_{Y_3} E_{\alpha} - \partial_{\alpha} E_3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Développement asymptotique

Ansatz

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j \quad \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) \delta^j \quad \Omega_{\text{cd}} \quad , \quad \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) = \mathbf{W}_j^{\text{cd}}\left(y_\alpha, \frac{y_3}{\delta}\right) \quad \Omega_\delta \end{array} \right.$$

Notation: $\mathbf{W}^{\text{cd}} = (\mathcal{W}, \mathbf{w})$ où $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\alpha dy^\alpha$

Développement asymptotique

Ansatz

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j \quad \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) \delta^j \quad \Omega_{\text{cd}} \quad , \quad \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) = \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{y_3}{\delta}) \quad \Omega_\delta \end{array} \right.$$

Notation: $\mathbf{W}^{\text{cd}} = (\mathcal{W}, \mathbf{w})$ où $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\alpha dy^\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_{Y_3}^2 \mathcal{W}_0(\cdot, Y_3) - i\kappa^2 \mathcal{W}_0(\cdot, Y_3) = 0 \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+ \\ \partial_{Y_3} \mathcal{W}_0(\cdot, 0) = 0 \end{array} \right.$$

$$-i\kappa^2 \mathbf{w}_0(\cdot, Y_3) = 0 \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Proposition (Terme d'ordre 0 dans Ω_{cd})

$$\mathbf{W}_0^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = 0 \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Développement asymptotique

Hypothèse (Hypothèse spectrale (HS))

κ^2 n'est pas valeur propre du problème

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}^{\text{is}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{is}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\text{is}} \end{cases}$$

Terme d'ordre 0 dans Ω_{is} : Le problème suivant est unisolvable

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{E}_0^{\text{is}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\text{is}} \end{cases}$$

Développement asymptotique

Hypothèse (Hypothèse spectrale (HS))

κ^2 n'est pas valeur propre du problème

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{is} - \kappa^2 \mathbf{E}^{is} = 0 & \text{dans } \Omega_{is} \\ \mathbf{E}^{is} \times \mathbf{n} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{E}^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{is} \end{cases}$$

Terme d'ordre 0 dans Ω_{is} : Le problème suivant est unisolvable

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^{is} - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{is} = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega_{is} \\ \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{E}_0^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{is} \end{cases}$$

Terme d'ordre 1 dans Ω_{cd} :

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \mathcal{W}_1(\cdot, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_1(\cdot, Y_3) = 0 & \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+ \\ \partial_{Y_3} \mathcal{W}_1(\cdot, 0) = (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})(\cdot, 0) \end{cases}$$

et

$$-i\kappa^2 \mathcal{W}_1(\cdot, Y_3) = 0 \text{ pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Développement asymptotique

Termes d'ordre supérieur

Soit $\lambda = \sqrt{-i\kappa}$ tel que $\Re(\lambda) > 0$.

Proposition (Terme d'ordre 1 dans Ω_{cd})

$$W_1^{cd}(\cdot, Y_3) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda Y_3) (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})|_{\Sigma} \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Développement asymptotique

Termes d'ordre supérieur

Soit $\lambda = \sqrt{-i\kappa}$ tel que $\Re(\lambda) > 0$.

Proposition (Terme d'ordre 1 dans Ω_{cd})

$$\mathbf{W}_1^{cd}(\cdot, Y_3) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda Y_3) (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})|_{\Sigma} \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Terme d'ordre 1 dans Ω_{is} : Le problème suivant est unisolvable

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{L}^{is} \mathbf{E}_1^{is} = 0 & \text{dans } \Omega_{is} \\ \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n} = \mathbf{W}_1^{cd} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{E}_1^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Développement asymptotique

Termes d'ordre supérieur

Soit $\lambda = \sqrt{-i\kappa}$ tel que $\Re(\lambda) > 0$.

Proposition (Terme d'ordre 1 dans Ω_{cd})

$$\mathbf{W}_1^{cd}(\cdot, Y_3) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda Y_3) (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})|_{\Sigma} \quad \text{pour } Y_3 \in \mathbb{R}_+$$

Terme d'ordre 1 dans Ω_{is} : Le problème suivant est unisolvable

$$\begin{cases} \mathbf{L}^{is} \mathbf{E}_1^{is} = 0 & \text{dans } \Omega_{is} \\ \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n} = \mathbf{W}_1^{cd} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{E}_1^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Proposition (Terme d'ordre 2 dans Ω_{cd})

$$\mathbf{W}_2(y_\beta, Y_3) = \exp(-\lambda Y_3) [a^0(y_\beta) + Y_3 a^1(y_\beta)]$$

$$\begin{cases} a_\alpha^1(y_\beta) = \frac{1}{\lambda} [b_\alpha^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})_\sigma - \frac{1}{2} b_\sigma^\alpha (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})_\alpha](y_\beta, 0) \\ a_\alpha^0(y_\beta) = \frac{1}{\lambda} [a_\alpha^1(y_\beta) - (\text{rot } \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0)] \end{cases}$$

Développement asymptotique

Reconstruction du champ magnétique

$\mathbf{H} = \frac{1}{i\kappa\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}$, une fois contravariant.

Notations: $\mathbf{H}^{\text{cd}} = \mathcal{H} + \mathbf{h} \mathbf{n}$ où $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\alpha \mathbf{x}_\alpha$. $\mathbf{H}_T^{\text{is}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n})$.

Développement asymptotique

Reconstruction du champ magnétique

$\mathbf{H} = \frac{1}{i\kappa\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}$, une fois contravariant.

Notations: $\mathbf{H}^{\text{cd}} = \mathcal{H} + \mathbf{h} \mathbf{n}$ où $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\alpha \mathbf{x}_\alpha$. $\mathbf{H}_T^{\text{is}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n})$.

Proposition (termes d'ordre 0 et 1 dans Ω_{cd})

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0(\cdot, Y_3) = \exp(-\lambda Y_3) \mathbf{H}_{T,0}^{\text{is}}(\cdot, 0) \\ \mathbf{h}_0(\cdot, Y_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1(y_\beta, Y_3) = \exp(-\lambda Y_3) [\mathbf{H}_{T,1}^{\text{is}}(y_\beta, 0) + Y_3 A_1(y_\beta)] \\ \mathbf{h}_1(y_\beta, Y_3) = 0 \end{cases}$$

où $A_1 = \frac{3}{2} b_\sigma^\sigma \mathbf{H}_{T,0}^{\text{is}}|_\Sigma - \mathbf{n} \times (b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma|_\Sigma dy^\beta)$

Développement asymptotique

Reconstruction du champ magnétique

$\mathbf{H} = \frac{1}{i\kappa\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}$, une fois contravariant.

Notations: $\mathbf{H}^{\text{cd}} = \mathcal{H} + \mathbf{h} \mathbf{n}$ où $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\alpha \mathbf{x}_\alpha$. $\mathbf{H}_T^{\text{is}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n})$.

Proposition (termes d'ordre 0 et 1 dans Ω_{cd})

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0(\cdot, Y_3) = \exp(-\lambda Y_3) \mathbf{H}_{T,0}^{\text{is}}(\cdot, 0) \\ \mathbf{h}_0(\cdot, Y_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1(y_\beta, Y_3) = \exp(-\lambda Y_3) [\mathbf{H}_{T,1}^{\text{is}}(y_\beta, 0) + Y_3 A_1(y_\beta)] \\ \mathbf{h}_1(y_\beta, Y_3) = 0 \end{cases}$$

où $A_1 = \frac{3}{2} b_\sigma^\sigma \mathbf{H}_{T,0}^{\text{is}}|_\Sigma - \mathbf{n} \times (b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma|_\Sigma dy^\beta)$

Remarque

Vérification des calculs par un développement asymptotique en \mathbf{H} .

Développement asymptotique

Restes d'ordre $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}_\delta^m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \sum_{j=0}^m \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{y_3}{\delta}) \delta^j & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases}$$

Développement asymptotique

Restes d'ordre $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}_\delta^m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \sum_{j=0}^m \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{y_3}{\delta}) \delta^j & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_\delta^m(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_\delta - \chi \mathbf{E}_\delta^m(\mathbf{x})$$

où χ est une fonction de troncature dans Ω .

Proposition

$$\begin{cases} \mathbf{L}^{\text{cd}}(\delta)(\mathbf{R}_\delta^m) = \mathbf{F}_{\text{cd}}^m & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ \mathbf{B}^{\text{cd}}(\delta)(\mathbf{R}_\delta^m) = \delta^m \partial_\alpha \mathbf{w}_{m+1} dy^\alpha + \text{rot } \mathbf{R}_\delta^m \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

avec $\mathbf{F}_{\text{cd}}^m = \mathcal{O}(\delta^{m-1})$ dans Ω_δ . De plus, $\text{div}(\delta)\mathbf{R}_\delta^m = \mathcal{O}(\delta^{m-1})$ dans Ω_δ .

Plan

- 1 Introduction
- 2 Développement asymptotique 3D
- 3 Estimation a priori**

Enoncé du résultat

$$\mathbf{X}_N(\delta) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \}$$

$$a_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}_*) = \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{E} \cdot \text{rot} \overline{\mathbf{E}_*} + s \text{div} \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \text{div} \overline{\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_*} - \kappa^2 \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}_*}) dx$$

Enoncé du résultat

$$\mathbf{X}_N(\delta) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \}$$

$$a_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}_*) = \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{E} \cdot \text{rot} \overline{\mathbf{E}_*} + s \text{div} \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \text{div} \overline{\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_*} - \kappa^2 \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}_*}) dx$$

(PV) $^\delta$: soit $\mathbf{F}^\delta \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, $s > 0$. Trouver $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$ t. q. $\forall \mathbf{E}_* \in \mathbf{X}_N(\delta)$

$$a_\delta(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{E}_*) = \int_{\Omega} (\mathbf{F}^\delta \cdot \overline{\mathbf{E}_*} - \frac{s}{\kappa^2} \text{div} \mathbf{F}^\delta \text{div} \overline{\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_*}) dx$$

Énoncé du résultat

$$\mathbf{X}_N(\delta) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$a_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}_*) = \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_*} + s \text{div } \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \text{div } \overline{\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_*} - \kappa^2 \varepsilon(\delta)\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}_*}) dx$$

$(\mathbf{PV})^\delta$: soit $\mathbf{F}^\delta \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, $s > 0$. Trouver $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$ t. q. $\forall \mathbf{E}_* \in \mathbf{X}_N(\delta)$

$$a_\delta(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{E}_*) = \int_{\Omega} (\mathbf{F}^\delta \cdot \overline{\mathbf{E}_*} - \frac{s}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F}^\delta \text{div } \overline{\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_*}) dx$$

Théorème

Sous l'hypothèse spectrale (HS), il existe $\delta_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, $(\mathbf{PV})^\delta$ admet une unique solution $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$. De plus, il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que

$$\| \text{rot } \mathbf{E}^\delta \|_{0,\Omega} + \| \text{div } \varepsilon(\delta)\mathbf{E}^\delta \|_{0,\Omega} + \| \mathbf{E}^\delta \|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \| \mathbf{E}^\delta \|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C \| \mathbf{F}^\delta \|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}$$

Plan démonstration

- 1 Soit \mathbf{E}^δ la solution de $(\mathbf{PV})^\delta$. Alors, $\operatorname{div} \varepsilon(\delta)\mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. (On prend des gradients de fonctions $H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans $(\mathbf{PV})^\delta$ et on utilise un argument de densité).

Plan démonstration

- 1 Soit \mathbf{E}^δ la solution de $(\mathbf{PV})^\delta$. Alors, $\operatorname{div} \varepsilon(\delta)\mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. (On prend des gradients de fonctions $H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans $(\mathbf{PV})^\delta$ et on utilise un argument de densité).
- 2 Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ et il existe $\delta_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, $\|\mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathbf{F}^\delta\|_{0,\Omega}$. (Argument de compacité)

Plan démonstration

- 1 Soit \mathbf{E}^δ la solution de $(\mathbf{PV})^\delta$. Alors, $\operatorname{div} \varepsilon(\delta)\mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. (On prend des gradients de fonctions $H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans $(\mathbf{PV})^\delta$ et on utilise un argument de densité).
- 2 Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ et il existe $\delta_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, $\|\mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathbf{F}^\delta\|_{0,\Omega}$. (Argument de compacité)
- 3 On en déduit l'estimation a priori car:

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}^2 - \kappa^2 \|\mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}^2 - \frac{i}{\delta^2} \|\mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega_{cd}}^2 = (\mathbf{F}^\delta, \mathbf{E}^\delta)$$

Démonstration du point 2 par l'absurde

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(\delta_n) \rightarrow 0$, il existe $(\mathbf{E}^{\delta_n})_n \in \mathbf{X}_N(\delta_n)$ et $(\mathbf{F}^{\delta_n})_n \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ tel que
$$\begin{cases} \|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} \rightarrow +\infty \\ \|\mathbf{F}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1 \end{cases}$$

Démonstration du point 2 par l'absurde

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(\delta_n) \rightarrow 0$, il existe

$$(\mathbf{E}^{\delta_n})_n \in \mathbf{X}_N(\delta_n) \text{ et } (\mathbf{F}^{\delta_n})_n \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \text{ tel que } \begin{cases} \|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} \rightarrow +\infty \\ \|\mathbf{F}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1 \end{cases}$$

Notation: $\tilde{\mathbf{u}}^{\delta_n} = \frac{1}{\|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega}} \mathbf{u}^{\delta_n}$

- ❶ $(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Démonstration du point 2 par l'absurde

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(\delta_n) \rightarrow 0$, il existe

$$(\mathbf{E}^{\delta_n})_n \in \mathbf{X}_N(\delta_n) \text{ et } (\mathbf{F}^{\delta_n})_n \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \text{ tel que } \begin{cases} \|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} \rightarrow +\infty \\ \|\mathbf{F}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1 \end{cases}$$

Notation: $\tilde{\mathbf{u}}^{\delta_n} = \frac{1}{\|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega}} \mathbf{u}^{\delta_n}$

- ❶ $(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$
- ❷ $(\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ est bornée dans $\mathbf{PH}^1(\Omega)$, espace indépendant de δ_n . (Point clé de la démonstration).

Démonstration du point 2 par l'absurde

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(\delta_n) \rightarrow 0$, il existe $(\mathbf{E}^{\delta_n})_n \in \mathbf{X}_N(\delta_n)$ et $(\mathbf{F}^{\delta_n})_n \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ tel que
$$\begin{cases} \|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} \rightarrow +\infty \\ \|\mathbf{F}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1 \end{cases}$$

Notation: $\tilde{\mathbf{u}}^{\delta_n} = \frac{1}{\|\mathbf{E}^{\delta_n}\|_{0,\Omega}} \mathbf{u}^{\delta_n}$

- ❶ $(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$
- ❷ $(\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ est bornée dans $\mathbf{PH}^1(\Omega)$, espace indépendant de δ_n . (Point clé de la démonstration).

- ❸ Argument de compacité: on peut extraire une sous-suite $(\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n})_n$ et il existe $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que
$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \end{cases}$$

On montre que $\tilde{\mathbf{E}} = 0$, absurde car $\|\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1$.

Démonstration du point 2

- Soit $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}^\delta, \varphi^\delta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{E}^\delta = \mathbf{w}^\delta + \nabla\varphi^\delta$ et $\operatorname{div} \mathbf{w}^\delta = 0$.
Et, il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que $\|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}$

Démonstration du point 2

- Soit $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}^\delta, \varphi^\delta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{E}^\delta = \mathbf{w}^\delta + \nabla\varphi^\delta$ et $\operatorname{div} \mathbf{w}^\delta = 0$.
Et, il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que $\|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}$
- φ^δ vérifie $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla\varphi^\delta \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta \psi \, d\mathbf{x} + [\varepsilon(\delta)]_{\Sigma} \int_{\Sigma} \mathbf{w}^\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \psi \, ds$$

Démonstration du point 2

- Soit $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}^\delta, \varphi^\delta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{E}^\delta = \mathbf{w}^\delta + \nabla\varphi^\delta$ et $\operatorname{div} \mathbf{w}^\delta = 0$.
Et, il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que $\|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}$
- φ^δ vérifie $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi^\delta \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta \psi \, d\mathbf{x} + [\varepsilon(\delta)]_{\Sigma} \int_{\Sigma} \mathbf{w}^\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \psi \, ds$$

Théorème

Il existe $\delta_0 > 0$ et $C > 0$ indépendante de δ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, $\varphi^\delta \in PH^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante:

$$\|\varphi^{is}\|_{2,\Omega_{is}} + \|\varphi^{cd}\|_{2,\Omega_{cd}} \leq C(\|\operatorname{div} \mathbf{F}^\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega}).$$

Démonstration du point 2

- Soit $\mathbf{E}^\delta \in \mathbf{X}_N(\delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}^\delta, \varphi^\delta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{E}^\delta = \mathbf{w}^\delta + \nabla\varphi^\delta$ et $\operatorname{div} \mathbf{w}^\delta = 0$.
Et, il existe $C > 0$ indépendante de δ tel que $\|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}^\delta\|_{0,\Omega}$
- φ^δ vérifie $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla\varphi^\delta \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}^\delta \psi \, d\mathbf{x} + [\varepsilon(\delta)]_{\Sigma} \int_{\Sigma} \mathbf{w}^\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \psi \, ds$$

Théorème

Il existe $\delta_0 > 0$ et $C > 0$ indépendante de δ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, $\varphi^\delta \in PH^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante:

$$\|\varphi^{is}\|_{2,\Omega_{is}} + \|\varphi^{cd}\|_{2,\Omega_{cd}} \leq C(\|\operatorname{div} \mathbf{F}^\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{w}^\delta\|_{1,\Omega}).$$

- Application: pour n assez grand,

$$\|\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n}\|_{1,\Omega_{is}} + \|\tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n}\|_{1,\Omega_{cd}} \leq C(\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}}^{\delta_n}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}^{\delta_n}\|_{0,\Omega}).$$

Développement asymptotique en série de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 -\Delta \varphi^{is} = f^{is} & \text{dans } \Omega_{is} \\
 -(1 + \frac{i}{\delta^2}) \Delta \varphi^{cd} = f^{cd} & \text{dans } \Omega_{cd} \\
 \varphi^{is} = \varphi^{cd} & \text{sur } \Sigma \\
 \partial_n \varphi^{is} = (1 + \frac{i}{\delta^2}) \partial_n \varphi^{cd} + \frac{i}{\delta^2} g & \text{sur } \Sigma \\
 \varphi^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega.
 \end{array} \right.$$

Développement asymptotique en série de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi^{\text{is}} = f^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ -(1 + \frac{i}{\delta^2}) \Delta \varphi^{\text{cd}} = f^{\text{cd}} & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ \varphi^{\text{is}} = \varphi^{\text{cd}} & \text{sur } \Sigma \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi^{\text{is}} = (1 + \frac{i}{\delta^2}) \partial_{\mathbf{n}} \varphi^{\text{cd}} + \frac{i}{\delta^2} g & \text{sur } \Sigma \\ \varphi^{\text{is}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ansatz:

$$\varphi^{\text{is}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{\text{is}} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad \varphi^{\text{cd}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{\text{cd}} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}$$

Développement asymptotique en série de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi^{is} = f^{is} & \text{dans } \Omega_{is} \\ -(1 + \frac{i}{\delta^2}) \Delta \varphi^{cd} = f^{cd} & \text{dans } \Omega_{cd} \\ \varphi^{is} = \varphi^{cd} & \text{sur } \Sigma \\ \partial_n \varphi^{is} = (1 + \frac{i}{\delta^2}) \partial_n \varphi^{cd} + \frac{i}{\delta^2} g & \text{sur } \Sigma \\ \varphi^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ansatz:

$$\varphi^{is} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{is} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{is} \quad \varphi^{cd} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{cd} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{cd}$$

Problèmes élémentaires: si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi_k^{cd} = 0 & \text{dans } \Omega_{cd} \\ \partial_n \varphi_k^{cd} = i(\partial_n \varphi_{k-1}^{cd} - \partial_n \varphi_{k-1}^{is}) & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Développement asymptotique en série de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi^{is} = f^{is} & \text{dans } \Omega_{is} \\ -(1 + \frac{i}{\delta^2}) \Delta \varphi^{cd} = f^{cd} & \text{dans } \Omega_{cd} \\ \varphi^{is} = \varphi^{cd} & \text{sur } \Sigma \\ \partial_n \varphi^{is} = (1 + \frac{i}{\delta^2}) \partial_n \varphi^{cd} + \frac{i}{\delta^2} g & \text{sur } \Sigma \\ \varphi^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ansatz:

$$\varphi^{is} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{is} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{is} \quad \varphi^{cd} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{cd} \delta^{2n} \quad \text{dans } \Omega_{cd}$$

Problèmes élémentaires: si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi_k^{cd} = 0 & \text{dans } \Omega_{cd} \\ \partial_n \varphi_k^{cd} = i(\partial_n \varphi_{k-1}^{cd} - \partial_n \varphi_{k-1}^{is}) & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi_k^{is} = 0 & \text{dans } \Omega_{is} \\ \varphi_k^{is} = \varphi_k^{cd} & \text{sur } \Sigma \\ \varphi_k^{is} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Applications et perspectives

Applications:

- 1 Estimations des restes

Théorème

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{R}_m^\delta\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{R}_m^\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{R}_m^\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{R}_m^\delta\|_{0,\Omega_{cd}} \leq C\delta^{m-1}$$

- 2 Décroissance exponentielle de la solution dans Ω_{cd}

Perspectives:

- 1 Développement asymptotique lorsque Σ a des singularités.
- 2 Conditions de transmission approchées pour les équations de Maxwell dans une couche mince (membrane cellulaire): travail avec Clair Poignard.