Titre :
Ordre faible pour la discrétisation d'EDP stochastiques.

Résumé :
On étudie la discrétisation d'une EDP stochastique de type parabolique écrite sous forme abstraite dans un espace de Hilbert H:

$$\begin{cases} dX = (AX + f(X))dt + \sigma(X)dW, \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire, A est le Laplacien sur un ouvert borné et muni de conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou périodiques, H est l'espace L^2, f est un terme non linéaire et dW est un terme de bruit de type bruit blanc.

Dans le cas d'une semi discrétisation temporelle, le schéma d'Euler implicite pour cette équation a la forme

$$\begin{cases} X_{k+1} - X_k = \Delta t A X_{k+1} + \Delta t f(X_k) + W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

De nombreux travaux ont étudié *l'ordre fort* de ce schéma. Dans le cas classique de l'équation de la chaleur non linéaire en dimension 1 perturbée par un bruit blanc en espace et en temps, ces travaux conduisent à des estimations du type

$$\mathbb{E}(\sup_k |X_k - X(k\Delta t)|_H) \leq c\Delta t^\alpha,$$

pour $\alpha < 1/4$. Cet ordre 1/4 est raisonnable car il correspond à la régularité temporelle de la solution.

Une autre façon de mesurer la précision d'un schéma est d'étudier son *ordre faible*. On dit que le schéma est d'ordre faible β si pour toute fonction φ suffisamment régulière sur H on a

$$|\mathbb{E}(\varphi(X_k)) - \mathbb{E}(\varphi(X(k\Delta t)))| \leq c(\varphi)\Delta t^\beta.$$

Dans de nombreuses applications, on ne s'interesse qu'à l'approximation de telles quantités et c'est donc l'ordre faible qui est important.

Il est connu que dans le cas de la discrétisation d'une équation différentielle stochastique en dimension finie, l'ordre fort du schéma d'Euler est 1/2 alors que l'ordre faible est 1. La preuve de ce résultat repose sur l'équation de Kolmogorov associée à l'équation différentielle stochastique.

L'équation de Kolmogorov associée à une EDP stochastique est un objet assez complexe et la méthode se généralise très mal. Après avoir rappelé les résultats en dimension finie, nous montrerons les difficultés qui surviennent en dimension infinie et montrerons comment les surmonter, entre autre grace au calcul de Malliavin. Dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire en dimension un perturbée par un bruit blanc en espace et en temps, on montre que l'ordre faible est le double de l'ordre fort.