ESTIMATIONS

POUR DES OPÉRATEURS NON AUTOADJOINTS

INTERSECTION DE DISQUES SPECTRAUX

Michel Crouzeix

Université de Rennes 1

Journée d'équipe, octobre 2008

Le cas auto-adjoint

On considère un opérateur linéaire fermé $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$ sur un espace de Hilbert H. Si cet opérateur est auto-adjoint, on dispose d'une théorie spectrale très efficace. En particulier le spectre $\sigma(A)$ est réel, et on a

$$\|r(A)\| = \sup_{x \in \sigma(A)} |r(x)|,$$

pour toute fraction rationnelle r bornée sur $\sigma(A)$.

Le cas auto-adjoint

On considère un opérateur linéaire fermé $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$ sur un espace de Hilbert H. Si cet opérateur est auto-adjoint, on dispose d'une théorie spectrale très efficace. En particulier le spectre $\sigma(A)$ est réel, et on a

$$\|r(A)\| = \sup_{x \in \sigma(A)} |r(x)|,$$

pour toute fraction rationnelle r bornée sur $\sigma(A)$.

Cette relation permet, par un argument de densité, de définir $f(A) \in \mathcal{L}(H)$, pour toute fonction f continue et bornée sur $\sigma(A)$, et la relation précédente, avec f au lieu de r, reste valide.

Le cas auto-adjoint

On considère un opérateur linéaire fermé $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$ sur un espace de Hilbert H. Si cet opérateur est auto-adjoint, on dispose d'une théorie spectrale très efficace. En particulier le spectre $\sigma(A)$ est réel, et on a

$$\|f(A)\| = \sup_{x \in \sigma(A)} |f(x)|,$$

pour toute fonction continue et bornée sur $\sigma(A)$.

De plus l'application $f \mapsto f(A)$, est un homomorphisme de l'algèbre $C_b(\sigma(A))$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(H)$.

Ensembles spectraux, J. von Neumann, 1951

Un ensemble $X \subset \mathbb{C}$, vérifiant $\sigma(A) \subset X$, est dit spectral pour l'opérateur A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq \sup_{z \in X} |r(z)|$$

pour toute fraction rationnelle bornée sur X.

Ensembles spectraux

Un ensemble $X \subset \mathbb{C}$, vérifiant $\sigma(A) \subset X$, est dit spectral pour l'opérateur A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq \sup_{z \in X} |r(z)|$$

pour toute fraction rationnelle bornée sur X.

Remarque. Si A est un opérateur normal, alors son spectre $\sigma(A)$ est spectral pour A.

Ensembles spectraux

Un ensemble $X \subset \mathbb{C}$, vérifiant $\sigma(A) \subset X$, est dit spectral pour l'opérateur A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq \sup_{z \in X} |r(z)|$$

pour toute fraction rationnelle bornée sur X.

Résultats de von Neumann .

Le disque $\{|z-\omega| \leq r\}$ est spectral pour A ssi $\|A-\omega\| \leq r$.

Le disque $\{|z-\omega| \geq r\}$ est spectral pour A ssi $\|(A-\omega)^{-1}\| \leq r^{-1}$.

Le demi-plan $\{\mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z-s)) \leq 0\}$ est spectral pour A ssi,

$$\mathrm{Im}(e^{-i\theta}\langle (A-s)v, v\rangle) \leq 0, \quad \text{pour tout } v \in D(A).$$

Ensembles K-spectraux

Un ensemble $X \subset \mathbb{C}$, vérifiant $\sigma(A) \subset X$, est dit spectral pour l'opérateur A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq \sup_{z \in X} |r(z)|$$

pour toute fraction rationnelle bornée sur X.

Il est dit K-spectral pour A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq K \sup_{z \in X} |r(z)|).$$

Ensembles K-spectraux

Un ensemble $X \subset \mathbb{C}$, vérifiant $\sigma(A) \subset X$, est dit K-spectral pour l'opérateur A si l'on a

$$\|r(A)\| \leq K \sup_{z \in X} |r(z)|$$

pour toute fraction rationnelle bornée sur X.

Formule de Cauchy. On suppose que le domaine Ω contient $\sigma(A)$ (+ des hypothèses appropriées). Alors

$$r(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} r(\sigma)(\sigma - A)^{-1} d\sigma,$$

Cela montre que Ω est K-spectral pour A avec

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \|(\sigma - A)^{-1}\| \, |d\sigma|.$$

Le calcul fonctionnel basé sur la formule de Cauchy, est appelé le calcul fonctionel de Dunford-Riesz. D'autres représentations intégrales peuvent être utilisées. Par exemple en utilisant la transformée de Laplace (calcul de Hille-Phillips), ou via la transformée de Mellin, le noyau de Poisson, le potentiel de double couche, la transformée de Bergman, ...
Dans chacun des cas, il faut majorer des intégrales portant sur des opérateurs. Les deux lemmes suivants se sont avérés très utiles.

Lemme 1. Sous les hypothèses

$dm(t)$ est une mesure, à valeurs complexes, bornée sur E,

$M(t) \in \mathcal{L}(H), \quad M(t) = M^*(t) \geq 0,$ dans E,

r est une fraction rationnelle bornée par 1 sur E.

Alors

$$\left\| \int_E r(t) M(t)\, dm(t) \right\| \leq \left\| \int_E M(t)\, |dm(t)| \right\|.$$

Lemme 1. Sous les hypothèses

$dm(t)$ est une mesure, à valeurs complexes, bornée sur E,

$M(t) \in \mathcal{L}(H), \quad M(t) = M^*(t) \geq 0, \quad$ dans E,

r est une fraction rationnelle bornée par 1 sur E.

Alors

$$\left\| \int_E r(t) M(t)\, dm(t) \right\| \leq \left\| \int_E M(t)\, |dm(t)| \right\|.$$

Clef de la preuve. On a

$$|\langle M(t)u, v\rangle| \leq \langle M(t)u, u\rangle^{1/2} \langle M(t)v, v\rangle^{1/2}$$

Lemme 2. Sous les hypothèses

$dm(t)$ est une mesure, à valeurs complexes, bornée sur E,

$M(t), N(t) \in \mathcal{L}(H), \quad N(t) = N^*(t), \quad$ dans $E, \quad \alpha > 0$

$\mathrm{Re}\, M(t) = \frac{1}{2}(M(t) + M(t)^*) \geq N(t) \geq \alpha, \quad$ dans E,

r est une fraction rationnelle bornée par 1 sur E.

Alors, on a

$$\left\| \int_E r(t)(M(t))^{-1}\, dm(t) \right\| \leq \left\| \int_E (N(t))^{-1}\, |dm(t)| \right\|.$$

Lemme 2. Sous les hypothèses

$dm(t)$ est une mesure, à valeurs complexes, bornée sur E,

$M(t), N(t) \in \mathcal{L}(H), \quad N(t) = N^*(t), \quad$ dans $E, \quad \alpha > 0$

$\operatorname{Re} M(t) = \frac{1}{2}(M(t) + M(t)^*) \geq N(t) \geq \alpha, \quad$ dans E,

r est une fraction rationnelle bornée par 1 sur E.

Alors on a

$$\left\| \int_E r(t)(M(t))^{-1}\, dm(t) \right\| \leq \left\| \int_E (N(t))^{-1}\, |dm(t)| \right\|.$$

Clef de la preuve.

$$|\langle M(t)^{-1} u, v\rangle| \leq \langle N(t)^{-1} u, u\rangle^{1/2} \langle N(t)^{-1} v, v\rangle^{1/2}.$$

Application : Ces lemmes ont permis de montrer le résultat suivant, obtenu avec C. Badea et B. Beckermann

Théorème. Si D_1, D_2,. . ., D_n sont n disques de la sphère de Riemann, et si chacun d'eux est un ensemble spectral pour un opérateur commun A, alors leur intersection $X = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n$ est un ensemble K-spectral pour A, avec $K \leq n + n(n-1)/\sqrt{3}$.

Théorème. Si D_1, D_2,. . ., D_n sont n disques de la sphère de Riemann, et si chacun d'eux est un ensemble spectral pour un opérateur commun A, alors leur intersection $X = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n$ est un ensemble K-spectral pour A, avec $K \leq n + n(n-1)/\sqrt{3}$.

Notons ω_j, r_j le centre et le rayon de D_j, et soit s l'abscisse curviligne sur ∂D_j. On pose, pour $j = 1, n$,

$$\mu(\sigma, A, D_j)ds = \frac{1}{2\pi i}\Big((\sigma - A)^{-1}d\sigma - (\bar\sigma - A^*)^{-1}d\bar\sigma - (\sigma - \omega_j)^{-1}d\sigma\Big),$$

$$R_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\, \mu(\sigma, A, D_j)ds,$$

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\, \Big(\tfrac{1}{2\pi i}(\sigma - A)^{-1}d\sigma - \mu(\sigma, A, D_j)ds)\Big).$$

Théorème. Si D_1, D_2,. . ., D_n sont n disques de la sphère de Riemann, et si chacun d'eux est un ensemble spectral pour un opérateur commun A, alors leur intersection $X = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n$ est un ensemble K-spectral pour A, avec $K \leq n + n(n-1)/\sqrt{3}$.

Notons ω_j, r_j le centre et le rayon de D_j, et soit s l'abscisse curviligne sur ∂D_j. On pose, pour $j = 1, n$,

$$\mu(\sigma, A, D_j)ds = \frac{1}{2\pi i}\Big((\sigma - A)^{-1}d\sigma - (\bar\sigma - A^*)^{-1}d\bar\sigma - (\sigma - \omega_j)^{-1}d\sigma\Big),$$

$$R_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\, \mu(\sigma, A, D_j)ds,$$

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\left(\tfrac{1}{2\pi i}(\sigma - A)^{-1}d\sigma - \mu(\sigma, A, D_j)ds\right).$$

on déduit de la formule de Cauchy

$$r(A) = R_1 + \cdots + R_n + S_1 + \cdots + S_n.$$

Majoration de R_j.

Regardons par exemple le cas $D_j = \{z\,;|z-\omega_j| \geq r_j\}$. Sur ∂D_j, on écrit $\sigma = \omega_j + r_j e^{-i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}\mu(\sigma, A, D_j) &= \frac{1}{2\pi i}\Big((\sigma - A)^{-1}\frac{d\sigma}{ds} - (\bar\sigma - A^*)^{-1}\frac{d\bar\sigma}{ds} - (\sigma - \omega_j)^{-1}\frac{d\sigma}{ds}\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi r_j}(\sigma - A)^{-1}\Big((A - \omega_j)(A^* - \bar\omega_j) - r_j^2\Big)(\bar\sigma - A^*)^{-1} \geq 0,\end{aligned}$$

En effet D_j spectral pour A équivaut à $(A - \omega_j)(A^* - \bar\omega_j) - r_j^2 \geq 0$.

Majoration de R_j.
Regardons par exemple le cas $D_j = \{z\,;|z-\omega_j| \geq r_j\}$. Sur ∂D_j, on écrit $\sigma = \omega_j + r_j e^{-i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}\mu(\sigma, A, D_j) &= \frac{1}{2\pi i}\Big((\sigma-A)^{-1}\frac{d\sigma}{ds} - (\bar{\sigma}-A^*)^{-1}\frac{d\bar{\sigma}}{ds} - (\sigma-\omega_j)^{-1}\frac{d\sigma}{ds}\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi r_j}(\sigma-A)^{-1}\Big((A-\omega_j)(A^*-\bar{\omega}_j) - r_j^2\Big)(\bar{\sigma}-A^*)^{-1} \geq 0,\end{aligned}$$

En effet D_j spectral pour A équivaut à $(A-\omega_j)(A^*-\bar{\omega}_j) - r_j^2 \geq 0$.
On peut utiliser le lemme 1, qui nous donne

$$\begin{aligned}\|R_j\| &= \Big\| \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\,\mu(\sigma, A, D_j)ds\Big\|\\ &\leq \Big\| \int_{\partial D_j \cap X} \mu(\sigma, A, D_j)ds\Big\|\\ &\leq \Big\| \int_{\partial D_j} \mu(\sigma, A, D_j)ds\Big\| = \|1+1-1\| = 1.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\|S_1 + \cdots + S_n\| \leq n(n-1)/\sqrt{3}$,

avec

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\left((\bar{\sigma} - A^*)^{-1} d\bar{\sigma} + (\sigma - \omega_j)^{-1} d\sigma\right).$$

Il reste à montrer que $\|S_1 + \cdots + S_n\| \le n(n-1)/\sqrt{3}$,

avec

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma) \Big((\bar\sigma - A^*)^{-1} d\bar\sigma + (\sigma - \omega_j)^{-1} d\sigma \Big).$$

On regarde tout d'abord le cas de l'anneau

$$n = 2, \quad D_1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le \rho\}, \quad D_2 = \{z \in \overline{\mathbb{C}}\,;\, |z| \ge 1/\rho\}, \quad \rho > 1,$$
$$X = D_1 \cap D_2 = \{z\,;\, \rho^{-1} \le |z| \le \rho\}.$$

Il reste à montrer que $\|S_1+\cdots+S_n\| \le n(n-1)/\sqrt{3}$,

avec

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\Big((\bar\sigma - A^*)^{-1} d\bar\sigma + (\sigma-\omega_j)^{-1} d\sigma\Big).$$

On regarde tout d'abord le cas de l'anneau

$$n=2, \quad D_1=\{z\in\mathbb{C}\,;|z|\le\rho\}, \quad D_2=\{z\in\overline{\mathbb{C}}\,;|z|\ge 1/\rho\}, \quad \rho>1,$$
$$X = D_1\cap D_2 = \{z\,;\rho^{-1}\le|z|\le\rho\}.$$

Nous devons montrer que $\|S_1+S_2\|\le 2/\sqrt{3}$, sous les hypothèses $\|A\|\le\rho$ et $\|A^{-1}\|\le\rho$.

Majoration de $S_1 + S_2$.

On a $$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma) \frac{1}{2\pi i}\Big((\bar\sigma - A^*)^{-1} d\bar\sigma + \sigma^{-1} d\sigma\Big).$$

On note que $\bar\sigma = \rho^2/\sigma$, donc $d\bar\sigma = -\rho^2/\sigma^2 d\sigma$, on en déduit

$$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_1)\, d\sigma$$

avec

$$\nu(\sigma, A, D_1) = \frac{1}{2\pi i} A^* (\sigma A^* - \rho^2)^{-1}.$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On a $$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma) \tfrac{1}{2\pi i}\Big((\bar\sigma - A^*)^{-1} d\bar\sigma + \sigma^{-1} d\sigma\Big).$$

On note que $\bar\sigma = \rho^2/\sigma$, donc $d\bar\sigma = -\rho^2/\sigma^2 d\sigma$, on en déduit
$$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_1)\, d\sigma$$
avec
$$\nu(\sigma, A, D_1) = \tfrac{1}{2\pi i} A^*(\sigma A^* - \rho^2)^{-1}.$$
Notons que $\nu(\sigma, A, D_1)$ est analytique en σ dans D_1

Majoration de $S_1 + S_2$.

On a $$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma) \tfrac{1}{2\pi i}\Big((\bar\sigma - A^*)^{-1} d\bar\sigma + \sigma^{-1} d\sigma\Big).$$

On note que $\bar\sigma = \rho^2/\sigma$, donc $d\bar\sigma = -\rho^2/\sigma^2 d\sigma$, on en déduit
$$S_1 = \int_{\partial D_1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_1)\, d\sigma$$
avec
$$\nu(\sigma, A, D_1) = \tfrac{1}{2\pi i} A^*(\sigma A^* - \rho^2)^{-1}.$$
Notons que $\nu(\sigma, A, D_1)$ est analytique en σ dans D_1 . On en déduit
$$S_1 = \int_{|\sigma|=1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_1)\, d\sigma,$$
en prenant sur le cercle unité la même orientation que pour ∂D_1.

Majoration de $S_1 + S_2$.

En posant

$$\nu(\sigma, A, D_1) = \tfrac{1}{2\pi i} A^*(\sigma A^* - \rho^2)^{-1},$$

on a obtenu

$$S_1 = \int_{|\sigma|=1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_1)\, d\sigma.$$

De même, en posant

$$\nu(\sigma, A, D_2) = \tfrac{1}{2\pi i} A^*(\sigma A^* - \rho^{-2})^{-1},$$

on obtient, compte tenu de l'orientation contraire de ∂D_2

$$S_2 = -\int_{|\sigma|=1} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_2)\, d\sigma.$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1} r(\sigma)A^*((\rho^2-\sigma A^*)^{-1} - (\rho^{-2}-\sigma A^*)^{-1})\, d\sigma \\ &= -\frac{\rho^2 - \rho^{-2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(e^{i\theta})M(\theta, A^*)^{-1}\, d\theta, \end{aligned}$$

en posant

$$M(\theta, A^*) = \rho^2 + \rho^{-2} - e^{i\theta}A^* - e^{-i\theta}A^{-*}.$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On utilise la forme polaire $A^* = UG$, avec U unitaire et G, autoadjoint défini positif. Les hypothèses $\|A\| \leq \rho$ et $\|A^{-1}\| \leq \rho$ se traduisent en $\rho^{-1} \leq G \leq \rho$. Donc

$$2 \leq G + G^{-1} \leq \rho + \rho^{-1} = 2\tau,$$

en posant $\tau = (\rho + \rho^{-1})/2$.

Majoration de $S_1 + S_2$.

On utilise la forme polaire $A^* = UG$, avec U unitaire et G, autoadjoint défini positif. Les hypothèses $\|A\| \leq \rho$ et $\|A^{-1}\| \leq \rho$ se traduisent en $\rho^{-1} \leq G \leq \rho$. Donc

$$2 \leq G + G^{-1} \leq \rho + \rho^{-1} = 2\tau,$$

en posant $\tau = (\rho + \rho^{-1})/2$. D'où

$$\|G + G^{-1} - 1 - \tau\| \leq \tau - 1,$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, M(\theta, A^*) &= \rho^2 + \rho^{-2} - \mathrm{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1}) \\ &= \rho^2 + \rho^{-2} - (1+\tau)\, \mathrm{Re}(e^{i\theta} U) - \mathrm{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1} - 1 - \tau)), \end{aligned}$$

d'autre part

$$\|G + G^{-1} - 1 - \tau\| \leq \tau - 1, \quad \tau = (\rho + \rho^{-1})/2.$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On note que

$$\begin{aligned}\text{Re}\, M(\theta, A^*) &= \rho^2 + \rho^{-2} - \text{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1}) \\ &= \rho^2 + \rho^{-2} - (1 + \tau)\, \text{Re}(e^{i\theta} U) - \text{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1} - 1 - \tau)),\end{aligned}$$

d'autre part

$$\|G + G^{-1} - 1 - \tau\| \leq \tau - 1, \quad \tau = (\rho + \rho^{-1})/2.$$

On en déduit $\text{Re}\, M(\theta, A^*) \geq N(\theta, U)$ en posant

$$N(\theta, U) := \rho^2 + \rho^{-2} - (1 + \tau)\, \text{Re}(e^{i\theta} U) + 1 - \tau$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On note que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} M(\theta, A^*) &= \rho^2 + \rho^{-2} - \operatorname{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1}) \\ &= \rho^2 + \rho^{-2} - (1+\tau) \operatorname{Re}(e^{i\theta} U) - \operatorname{Re}(e^{i\theta} U(G + G^{-1} - 1 - \tau)),\end{aligned}$$

d'autre part

$$\|G + G^{-1} - 1 - \tau\| \leq \tau - 1, \quad \tau = (\rho + \rho^{-1})/2.$$

On en déduit $\operatorname{Re} M(\theta, A^*) \geq N(\theta, U)$ en posant

$$\begin{aligned}N(\theta, U) &:= \rho^2 + \rho^{-2} - (1+\tau) \operatorname{Re}(e^{i\theta} U) + 1 - \tau \\ &\geq \rho^2 + \rho^{-2} - 1 - \tau + 1 - \tau > 0.\end{aligned}$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On peut donc utiliser le lemme 2

$$\|S_1 + S_2\| \leq \frac{\rho^2 - \rho^{-2}}{2\pi} \Big\| \int_0^{2\pi} N(\theta, U)^{-1} d\theta \Big\|$$

Majoration de $S_1 + S_2$.

On peut donc utiliser le lemme 2

$$\|S_1 + S_2\| \leq \frac{\rho^2 - \rho^{-2}}{2\pi} \left\| \int_0^{2\pi} N(\theta, U)^{-1} d\theta \right\|$$

Mais cette intégrale se calcule exactement, ce qui donne

$$\|S_1 + S_2\| \leq \sqrt{\frac{\rho^2 + 2\rho + 1}{\rho^2 + \rho + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mais cette intégrale se calcule exactement, ce qui donne

$$\|S_1 + S_2\| \leq \sqrt{\frac{\rho^2 + 2\rho + 1}{\rho^2 + \rho + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Finalement on a obtenu pour l'anneau

$$\|r(A)\| \leq \|R_1\| + \|R_2\| + \|S_1 + S_2\| \leq 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Retournons au cas général.

Il reste à montrer $\|S_1 + \cdots + S_n\| \leq n(n-1)/\sqrt{3}$, avec

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\left((\bar{\sigma} - A^*)^{-1} d\bar{\sigma} + (\sigma - \omega_j)^{-1} d\sigma\right).$$

Rappelons que

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\left((\bar{\sigma} - A^*)^{-1} d\bar{\sigma} + (\sigma - \omega_j)^{-1} d\sigma\right).$$

Sur la frontière ∂D_j, $\bar{\sigma} - \bar{\omega}_j = r_j^2/(\sigma - \omega_j)$, donc

$$S_j = \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\, \nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma,$$

en posant

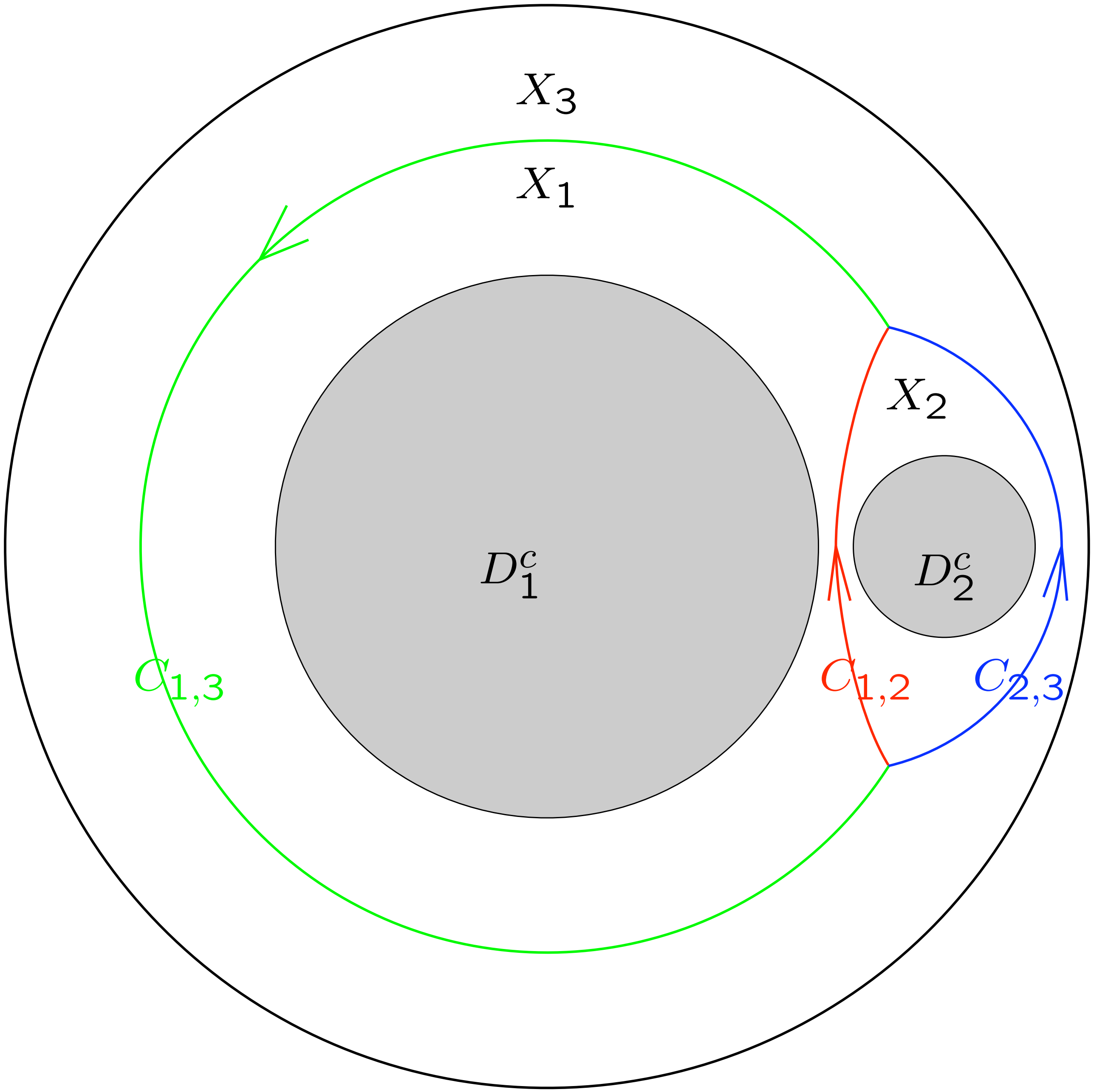
$$\nu(\sigma, A, D_j) = \frac{1}{2\pi i}(A^* - \bar{\omega}_j)\left((\sigma - \omega_j)(A^* - \bar{\omega}_j) - r_j^2\right)^{-1}$$

On remarque que $\nu(\sigma, A, D_j)$ est holomorphe pour $\sigma \in D_j$, par suite $r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)$ est holomorphe dans X.

On introduit un pavage, à la Voronoi, de X de la manière suivante

$$X_j = \{z \in X\, ; d(z, D_j) \leq d(z, D_k),\ \forall k\}.$$

où $d(z, D_j) = \frac{|r_j^2 - |z - \omega_j|^2|}{r_j}$, est l'inverse de la pseudo-distance de Carathéodory. On remarque que les frontières $C_{jk} := X_j \cap X_k$ sont des arcs de cercle.


X_3
X_1
X_2
D_1^c
D_2^c
$C_{1,3}$
$C_{1,2}$
$C_{2,3}$

On remarque que la frontière de X_j est constituée de $\partial D_j \cap X$, et de la réunion des $X_j \cap X_k = C_{jk}$, $j \neq k$.
En utilisant l'holomorphie de $r(.)\nu(., A, D_j)$ dans X, on en déduit

$$\begin{aligned} S_j &= \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma \\ &= \sum_{k,\ k \neq j} \int_{C_{jk}} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma. \end{aligned}$$

On remarque que la frontière de X_j est constituée de $\partial D_j \cap X$, et de la réunion des $X_j \cap X_k = C_{jk}$, $j \neq k$.
En utilisant l'holomorphie de $r(.)\nu(., A, D_j)$ dans X, on en déduit

$$\begin{aligned} S_j &= \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma \\ &= \sum_{k,\ k\neq j} \int_{C_{jk}} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Cela montre qu'avec une orientation adéquate de chaque C_{jk},

$$S_1 + \cdots + S_n = \sum_{j,k,\ j<k} \int_{C_{jk}} r(\sigma)(\nu(\sigma, A, D_j) - \nu(\sigma, A, D_k))\, d\sigma.$$

On remarque que la frontière de X_j est constituée de $\partial D_j \cap X$, et de la réunion des $X_j \cap X_k = C_{jk}$, $j \neq k$.
En utilisant l'holomorphie de $r(.)\nu(., A, D_j)$ dans X, on en déduit

$$\begin{aligned} S_j &= \int_{\partial D_j \cap X} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma \\ &= \sum_{k,\ k\neq j} \int_{C_{jk}} r(\sigma)\nu(\sigma, A, D_j)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Cela montre qu'avec une orientation adéquate de chaque C_{jk},

$$S_1 + \cdots + S_n = \sum_{j,k,\ j<k} \int_{C_{jk}} r(\sigma)(\nu(\sigma, A, D_j) - \nu(\sigma, A, D_k))\, d\sigma.$$

Le nombre de C_{jk} est (au plus) $n(n–1)/2$. Pour obtenir le théorème, il suffit de montrer $\|R_{jk}\| \leq 2/\sqrt{3}$, avec

$$R_{jk} = \int_{C_{jk}} r(z)(\nu(z, A, D_j) - \nu(z, A, D_k))\, dz.$$

Il reste à montrer que $\|R_{12}\| \leq 2/\sqrt{3}$, où

$$R_{12} = \int_{C_{12}} r(z)(\nu(z, A, D_1) - \nu(z, A, D_2))\, dz.$$

Soit

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

une homographie de $\mathbb{C}$. On suppose que son pôle $-d/c$ n'appartient pas au spectre de A.

C'est alors un exercice assez simple de montrer que, si l'on pose $\zeta = \varphi(z)$, $B = \varphi(A)$, $g(\zeta) = r(z)$, $\Delta_j = \varphi(D_j)$, $Y_{12} = \varphi(C_{12})$, alors

$$R_{12} = \int_{Y_{12}} g(\zeta)(\nu(\zeta, B, \Delta_1) - \nu(\zeta, B, \Delta_2))\, d\zeta.$$

Il reste à montrer que $\|R_{12}\| \leq 2/\sqrt{3}$, où

$$R_{12} = \int_{C_{12}} r(z)(\nu(z, A, D_1) - \nu(z, A, D_2))\, dz.$$

Soit

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

une homographie de $\mathbb{C}$. On suppose que son pôle $-d/c$ n'appartient pas au spectre de A.

C'est alors un exercice assez simple de montrer que, si l'on pose $\zeta = \varphi(z)$, $B = \varphi(A)$, $g(\zeta) = r(z)$, $\Delta_j = \varphi(D_j)$, $Y_{12} = \varphi(C_{12})$, alors

$$R_{12} = \int_{Y_{12}} g(\zeta)(\nu(\zeta, B, \Delta_1) - \nu(\zeta, B, \Delta_2))\, d\zeta.$$

De plus Δ_j est un ensemble spectral pour B, et, si $\zeta \in Y_{12}$, alors $d(\zeta, \Delta_1) = d(\zeta, \Delta_2)$.

Il reste à montrer que $\|R_{12}\| \leq 2/\sqrt{3}$, où

$$R_{12} = \int_{C_{12}} r(z)(\nu(z, A, D_1) - \nu(z, A, D_2))\, dz.$$

Premier cas. $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$.

Quitte à effectuer auparavant une transformation homographique appropriée, on peut supposer que

$$D_1 = \{z\,;\, |z| \leq \rho\}, \qquad D_2 = \{z\,;\, |z| \geq 1/\rho\}.$$

La majoration $\|R_{12}\| \leq 2/\sqrt{3}$ a déjà été montrée, puisqu'on est dans le cas de l'anneau.

Il reste à montrer que $\|R_{12}\| \leq 2/\sqrt{3}$, où

$$R_{12} = \int_{C_{12}} r(z)(\nu(z, A, D_1) - \nu(z, A, D_2))\, dz.$$

Deuxième cas. $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \neq \beta$.

Quitte à effectuer auparavant une transformation homographique appropriée, on peut supposer que

$$D_1 = \{z\,; \mathrm{Im}(e^{-i\theta} z) \leq 0\}, \qquad D_2 = \{z\,; \mathrm{Im}(e^{i\theta} z) \geq 0\}.$$

On est maintenant dans le cas d'un secteur. La majoration s'obtient de manière analogue au cas de l'anneau, par utilisation du lemme 2.