Solutions globales faibles de type L^1 pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle a priori de la masse totale

Michel Pierre

Ecole Normale Supérieure de Cachan-Bretagne and Institut de Recherche Mathématique de Rennes, France

Journée d'équipe 23/10/2008

La famille de systèmes:

$$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \textit{dans } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \textit{sur } \Sigma_T \\ u_i(0,\cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. \end{cases}$$

$d_i > 0,\ f_i : [0,\infty)^r \longrightarrow \boldsymbol{R}$ **régulières**,

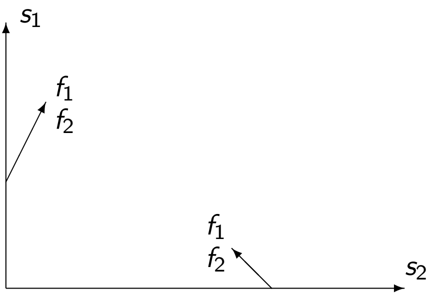
$\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$, borné, régulier,

$Q_T = (0,T) \times \Omega,\ \Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$

$u_i : \overline{Q}_T \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sont les fonctions inconnues.

- $$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r & \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0, \cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{cases}$$

- **(P) Préservation de la positivité:** $\forall i = 1, ..., r$
  $\forall s_1, ..., s_r \in [0, +\infty[, \quad f_i(s_1, ..., s_{i-1}, 0, s_{i+1}, ..., s_r) \geq 0.$



- $$(E)\left\{\begin{array}{ll} \forall i=1,...,r & \\ \partial_t u_i - d_i\Delta u_i = f_i(u_1,u_2,...,u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0,\cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{array}\right.$$
- **(P) Préservation de la positivité:** $\forall i = 1,...,r$
  $\forall s_1,...,s_r \in [0,+\infty[,\quad f_i(s_1,...,s_{i-1},0,s_{i+1},...,s_r) \geq 0.$
- **(M) 'Contrôle' de la masse totale:** $\forall s_1,...,s_r \geq 0$,

$$\sum_{1\leq i\leq r} f_i(s_1,...,s_r) \leq 0$$

- $$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r & \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0, \cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{cases}$$
- **(P) Préservation de la positivité:** $\forall i = 1, ..., r$
  $\forall s_1, ..., s_r \in [0, +\infty[, \quad f_i(s_1, ..., s_{i-1}, 0, s_{i+1}, ..., s_r) \geq 0.$
- **(M) 'Contrôle' de la masse totale:** $\forall s_1, ..., s_r \geq 0,$
  $$\sum_{1 \leq i \leq r} f_i(s_1, ..., s_r) \leq 0$$
- $\Rightarrow$ **estimations a priori dans $L^1(\Omega)$, uniformes en temps:**
  $$\forall t \geq 0, \quad \int_\Omega \sum_{1 \leq i \leq r} u_i(t, x) dx \leq \int_\Omega \sum_{1 \leq i \leq r} u_i^0(x) dx.$$
  On additionne, on intègre sur Ω, on utilise $\int_\Omega \Delta u_i = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0$:
  $$\int_\Omega \partial_t [\sum u_i(t)] dx = \int_\Omega \sum_i f_i(u) dx \leq 0.$$

Plus généralement,

$$(\mathbf{M}') \qquad \sum_{1\leq i\leq r} f_i(s_1,...,s_r) \leq C\,[\sum_{1\leq i\leq r} s_i + 1]$$

implique le contrôle de la masse totale:

$$\forall T>0, \sup_{0\leq t\leq T<+\infty} \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq r} u_i(t)\,dxdx < +\infty.$$

QUESTION:

Existence globale en temps de solutions sous l'hypothèse **(P)+(M)** *??*

ou plus généralement **(P)+ (M')** ??

Exemples explicites

- **Chemical morphogenetic process ("Brusselator")**

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uv^2 + b\, v \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uv^2 - (b+1)\, v + a \\ u_{|\partial\Omega} = b/a, \;\; v_{|\partial\Omega} = a, \\ a, b, d_1, d_2 > 0. \end{cases}$$

See also: Glycolosis model–Gray-Scott models

Exemples explicites

- **Chemical morphogenetic process ("Brusselator")**

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uv^2 + b\, v \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uv^2 - (b+1)\, v + a \\ u_{|\partial\Omega} = b/a, \ \ v_{|\partial\Omega} = a, \\ a, b, d_1, d_2 > 0. \end{cases}$$

See also: Glycolosis model–Gray-Scott models

- **Exothermic combustion in a gas**

$$\begin{cases} \partial_t Y - \mu \Delta Y = -H(Y, T) \\ \partial_t T - \lambda \Delta T = q\, H(Y, T), \end{cases}$$

$Y =$ concentration of a single reactant, $T =$ temperature,
$\mu, \lambda, q > 0$. Ici: $q\, f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$.
See also: JMcGough+R.Riley+H.G. Othmer models

Exemples explicites

- **Lotka-Volterra Systems(Leung,...)**

$$\forall i = 1...m, \;\; \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = e_i u_i + \sum_{1 \leq j \leq m} p_{ij} u_i u_j,$$

with $e_i, p_{ij} \in \boldsymbol{R}$ such that, or some $a_i > 0$.

$$\forall w \in R^m, \; \sum_{i,j=1}^{m} a_i w_i p_{ij} w_j \leq 0,$$

Exemples explicites

- **Lotka-Volterra Systems(Leung,...)**

$$\forall i = 1...m, \;\; \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = e_i u_i + \sum_{1 \le j \le m} p_{ij} u_i u_j,$$

with $e_i, p_{ij} \in \boldsymbol{R}$ such that, or some $a_i > 0$.

$$\forall w \in R^m, \;\; \sum_{i,j=1}^{m} a_i w_i p_{ij} w_j \le 0,$$

- **Model of diffusive calcium dynamics: H.G. Othmer**

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = d_1 \Delta u_1 + \lambda(\gamma_0 + \gamma_1 u_4)(1 - u_1) - \frac{p_1 u_1^4}{p_2^4 + u_1^4} \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = -k_1 u_2 + k_1' u_3 \\ \partial_t u_3 - d_3 \Delta u_3 = -k_1' u_3 - k_2 u_1 u_3 + k_1 u_2 + k_2' u_4 \\ \partial_t u_4 - d_4 \Delta u_4 = k_2 u_1 u_3 + k_3' u_5 - k_2' u_4 - k_3 u_1 u_4 \\ \partial_t u_5 - d_5 \Delta u_5 = k_3 u_1 u_4 - k_3' u_5. \end{cases}$$

Exemples explicites

Modelization of pollutants transfer in atmospher ($N=3$): R. Texier-Picard, MP,(degenerate diffusion):

$$\begin{cases} \partial_t \phi_i = d_i\, \partial^2_{zz}\phi_i + \omega\cdot\nabla\phi + f_i(\phi) + g_i,\ \forall i = 1...20, \\ + \text{Bdy and initial conditions} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
f_1(\phi) &=& -k_1\phi_1 + k_{22}\phi_{19} + k_{25}\phi_{20} + k_{11}\phi_{13} + k_9\phi_{11}\phi_2 + k_3\phi_5\phi_2 \\
 &+& k_2\phi_2\phi_4 - k_{23}\phi_1\phi_4 - k_{14}\phi_1\phi_6 + k_{12}\phi_{10}\phi_2 - k_{10}\phi_{11}\phi_1 - k_{24}\phi_{19}\phi_1, \\
f_2(\phi) &=& k_1\phi_1 + k_{21}\phi_{19} - k_9\phi_{11}\phi_2 - k_3\phi_5\phi_2 - k_2\phi_2\phi_4 - k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
f_3(\phi) &=& k_1\phi_1 + k_{17}\phi_4 + k_{19}\phi_{16} + k_{22}\phi_{19} - k_{15}\phi_3 \\
f_4(\phi) &=& -k_{17}\phi_4 + k_{15}\phi_3 - k_{16}\phi_4 - k_2\phi_2\phi_4 - k_{23}\phi_1\phi_4 \\
f_5(\phi) &=& 2k_4\phi_7 + k_7\phi_9 + k_{13}\phi_{14} + k_6\phi_7\phi_6 - k_3\phi_5\phi_2 + k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
f_6(\phi) &=& 2k_{18}\phi_{16} - k_8\phi_9\phi_6 - k_6\phi_7\phi_6 + k_3\phi_5\phi_2 - k_{20}\phi_{17}\phi_6 - k_{14}\phi_1\phi_6 \\
f_7(\phi) &=& -k_4\phi_7 - k_5\phi_7 + k_{13}\phi_{14} - k_6\phi_7\phi_6 \\
f_8(\phi) &=& k_4\phi_7 + k_5\phi_7 + k_7\phi_9 + k_6\phi_7\phi_6 \\
f_9(\phi) &=& -k_7\phi_9 - k_8\phi_9\phi_6 \\
f_{10}(\phi) &=& k_7\phi_9 + k_9\phi_{11}\phi_2 - k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
f_{11}(\phi) &=& k_{11}\phi_{13} - k_9\phi_{11}\phi_2 + k_8\phi_9\phi_6 - k_{10}\phi_{11}\phi_1 \\
f_{12}(\phi) &=& k_9\phi_{11}\phi_2 \\
f_{13}(\phi) &=& -k_{11}\phi_{13} + k_{10}\phi_{11}\phi_1 \\
f_{14}(\phi) &=& -k_{13}\phi_{14} + k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
f_{15}(\phi) &=& k_{14}\phi_1\phi_6 \\
f_{16}(\phi) &=& -k_{19}\phi_{16} - k_{18}\phi_{16} + k_{16}\phi_4 \\
f_{17}(\phi) &=& -k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
f_{18}(\phi) &=& k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
f_{19}(\phi) &=& -k_{21}\phi_{19} - k_{22}\phi_{19} + k_{25}\phi_{20} + k_{23}\phi_1\phi_4 - k_{24}\phi_{19}\phi_1 \\
f_{20}(\phi) &=& -k_{25}\phi_{20} + k_{24}\phi_{19}\phi_1.
\end{cases}$$

Un exemple spécifique de réactions chimiques réversibles

$$A + B \rightleftharpoons C \quad C \rightleftharpoons P + Q$$

Modèle selon la loi d'action de masse:

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -k_1 \, a \, b + k_2 c \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -k_1 \, a \, b + k_2 c \\ \partial_t c - d_c \Delta c = k_1 \, a \, b - k_2 c - k_3 c + k_4 \, p \, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = -k_4 \, p \, q + k_3 c \\ \partial_t q - d_q \Delta q = -k_4 \, p \, q + k_3 c. \end{cases}$$

Question 1: Existence globale en temps?
Question 2: Que se passe-t-il quand $k_2 + k_3 \to +\infty$?
(=hyper-réactivité du produit C) (D. Bothe, M.P.)

Un exemple spécifique de réactions chimiques réversibles

$$A + B \rightleftharpoons C \quad C \rightleftharpoons P + Q$$

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t c - d_c \Delta c = k_1 a\, b - k_2 c - k_3 c + k_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = -k_4 p\, q + k_3 c \\ \partial_t q - d_q \Delta q = -k_4 p\, q + k_3 c. \end{cases}$$

Existence globale en temps? Que se passe-t-il quand $k_2 + k_3 \to +\infty$?

Equation limite (formelle):

$$A + B \rightleftharpoons P + Q$$

$c \equiv 0$ et si $\alpha = \lim k_2/(k_2 + k_3)$, $K_1 = (1 - \alpha) k_1$, $K_4 = \alpha k_4$:

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = K_1 a\, b - K_4 p\, q \\ \partial_t q - d_q \Delta q = K_1 a\, b - K_4 p\, q. \end{cases}$$

Point de départ pour l'étude des systèmes: existence locale pour f_i régulières

$$
(E)\begin{cases}
\forall i = 1, ..., r \\
\partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \quad \textit{on } Q_T \\
\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \quad \textit{on } \Sigma_T \\
u_i(0, \cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0.
\end{cases}
$$

- Pour $u_i^0 \in L^\infty(\Omega)$, existence locale sur $(0, T^*)$ de solutions bornées ($\forall \epsilon > 0, \sup_{t\in[0,T^*-\epsilon]} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty$) et donc "classiques" (théorème de point fixe de type Cauchy-Lipschitz).

Point de départ pour l'étude des systèmes: existence locale pour f_i régulières

$$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r & \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0,\cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{cases}$$

- Pour $u_i^0 \in L^\infty(\Omega)$, existence locale sur $(0, T^*)$ de solutions bornées ($\forall \epsilon > 0, \sup_{t\in[0,T^*-\epsilon]} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty$) et donc "classiques" (théorème de point fixe de type Cauchy-Lipschitz).
- Le temps maximal d'existence est charactérisé par

$$\sup_{t\in(0,T^*)} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \quad \Rightarrow \quad T^* = +\infty.$$

Point de départ pour l'étude des systèmes: existence locale pour f_i régulières

$$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r & \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0, \cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{cases}$$

- Pour $u_i^0 \in L^\infty(\Omega)$, existence locale sur $(0, T^*)$ de solutions bornées ($\forall \epsilon > 0, \sup_{t\in[0,T^*-\epsilon]} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty$) et donc "classiques" (théorème de point fixe de type Cauchy-Lipschitz).
- Le temps maximal d'existence est charactérisé par

$$\sup_{t\in(0,T^*)} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \quad \Rightarrow \quad T^* = +\infty.$$

- **[Estimations L^∞ uniformes] $\Rightarrow$ [existence globale]!**

Cas facile de systèmes **(P)+(M)**: $\forall i = 1, ..., r, d_i = d$

En ajoutant les équations:

$$\partial_t[\sum_i u_i] - d\Delta\big(\sum_i u_i\big) = \sum_i f_i(u) \leq 0.$$

D'après le principe du maximum pour l'équation de la chaleur:

$$\forall t \in (0, T^*), \;\; \|\sum_i u_i(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\sum_i u_i^0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et, puisque $u_i \geq 0$, ceci implique des estimations L^∞ sur les u_i et donc

$$T^* = +\infty \text{ !!.}$$

Remarque: Existence globale aussi pour l'ODE par majoration a priori uniforme en temps. D'où la question: des diffusions différentes peuvent-elles détruire l'existence globale?

Une explosion en temps fini peut apparaître !

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2) \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

- Théorème: (D. Schmitt, M.P.) On peut trouver f_1, f_2 des polynômes homogènes satisfaisant **(P)** et

  $$(\mathbf{M}) : f_1 + f_2 \leq 0, \quad \textit{et aussi} : \exists \lambda \in [0,1[\; \textit{avec} \;\; f_1 + \lambda f_2 \leq 0,$$

  et pour lesquels il existe $T^* < +\infty$ avec

  $$\lim_{t \to T^*} \|u_1(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t \to T^*} \|u_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty.$$

Une explosion en temps fini peut apparaître !

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2) \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

- Théorème: (D. Schmitt, M.P.) On peut trouver f_1, f_2 des polynômes homogènes satisfaisant **(P)** et

  $$(\mathbf{M}) : f_1 + f_2 \leq 0, \quad \textit{et aussi} : \exists \lambda \in [0, 1[\ \textit{avec} \ \ f_1 + \lambda f_2 \leq 0,$$

  et pour lesquels il existe $T^* < +\infty$ avec

  $$\lim_{t \to T^*} \|u_1(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t \to T^*} \|u_2(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty.$$

- L'explosion est similaire à ce qui se passe pour la fonction $u(t, x) = \frac{1}{t^2 + |x|^2}$ qui est solution *faible* de l'équation $\partial_t u - \Delta u = c(t, x)\, u^2$ avec $c(t, x)$ uniformément borné ($N \geq 4$). La solution sort de $L^\infty(\Omega)$, mais continue à vivre...

CONCLUSION à cette étape:

Chercher des solutions *faibles* qui sont autorisées à sortir de $L^\infty(\Omega)$ de temps en temps, voire souvent.

Par exemple, des solutions au sens des distributions:

ceci demande que les nonlinéarités $f_i(u)$ soient au moins dans $L^1(Q_T)$.

$$f_i(u) \in L^1(Q_T) \ \ ?$$

C'est le cas dans le contre-exemple précédent:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2) \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2) \end{array}\right.$$

avec

$$f_1 + f_2 \leq 0, \quad \textit{et aussi}: \ \exists \lambda \in [0, 1[\ \textit{avec} \ \ f_1 + \lambda f_2 \leq 0.$$

Ces deux conditions $+$**(P)** impliquent

$$\forall T > 0, \ \int_{Q_T} |f_1(u_1, u_2)| + |f_2(u_1, u_2)| \leq C.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2) \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2) \end{array} \right.$$

avec

$$f_1 + f_2 \leq 0, \quad \textit{et aussi} : \ \exists \lambda \in [0, 1[\ \textit{avec} \ \ f_1 + \lambda f_2 \leq 0.$$

Ces deux conditions $+$**(P)** impliquent

$$\forall T > 0, \int_{Q_T} |f_1(u_1, u_2)| + |f_2(u_1, u_2)| \leq C.$$

$$\int_\Omega (u_1 + u_2)(T) + \int_{Q_T} -[\, f_1(u_1, u_2) + f_2(u_1, u_2)\,] = \int_\Omega u_1^0 + u_2^0,$$

$$\int_\Omega (u_1 + \lambda u_2)(T) + \int_{Q_T} -[\, f_1(u_1, u_2) + \lambda f_2(u_1, u_2)\,] = \int_\Omega u_1^0 + \lambda u_2^0.$$

$$\Rightarrow \|f_1 + f_2\|_{L^1(Q_T)} \leq C, \quad \|f_1 + \lambda f_2\|_{L^1(Q_T} \leq C, \textit{avec } \lambda \neq 1,$$

$$\Rightarrow \|f_1\|_{L^1(Q_T)} + \|f_2\|_{L^1(Q_T)} \leq C.$$

C'est aussi le cas pour les exemples "modèles"

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 = \lambda u_1^p u_2^q - u_1^\alpha u_2^\beta \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = -u_1^p u_2^q + u_1^\alpha u_2^\beta, \end{cases}$$

Pour $\lambda \in [0, 1[$:

$$(\mathbf{M}) \quad f_1(u_1, u_2) + f_2(u_1, u_2) = (\lambda - 1) u_1^p u_2^q \leq 0.$$

Et aussi

$$(\mathbf{M}_\lambda) \quad f_1(u_1, u_2) + \lambda f_2(u_1, u_2) = (\lambda - 1) u_1^\alpha u_2^\beta \leq 0.$$

Un théorème d'existence globale

$$(E)\begin{cases}\forall i=1,...,r\\ \partial_t u_i - d_i\Delta u_i = f_i(u_1,u_2,...,u_r) & \text{on } Q_T\\ \frac{\partial u_i}{\partial n}=0 & \text{on } \Sigma_T\\ u_i(0,\cdot)=u_i^0(\cdot)\geq 0.\end{cases}$$

Théorème

On suppose **(P)+(M)**, *ainsi qu'une "estimation a priori"*

$$\forall T>0,\ \int_{Q_T}\sum_{1\leq i\leq r}|f_i(u)|\leq C(T)<+\infty.$$

Alors le problème (E) *admet une solution faible sur* $[0,+\infty[$.

Démonstration:

- on montre que **tout système** $\ni$ **(P)** + estimations a priori $L^1(Q_T)$ admet toujours des sur-solutions
- si on ajoute la propriété (**M**), ce sont des solutions.

Un corollaire pour les systèmes quadratiques

$$(E)\begin{cases} \forall i = 1, ..., r & \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_r) & \text{on } Q_T \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u_i(0, \cdot) = u_i^0(\cdot) \geq 0. & \end{cases}$$

Théorème

On suppose **(P)+(M)** *et*

$$\forall i = 1, ..., r, \ \forall s \in [0, +\infty[^r, |f_i(s)| \leq C[|s|^2 + 1].$$

Alors le problème (E) *admet une solution faible sur* $[0, +\infty[$.

Lemme

(P)+(M) *impliquent une estimation a priori* $L^2(Q_T)$ *sur les* u_i *!!*

d'où l'estimation a priori L^1 sur les nonlinéarités.

Idée de l'estimation $L^2(Q_T)$

La condition **(M)** implique

$$\partial_t[\sum_i u_i] - \Delta \left\{ \frac{\sum_i d_i u_i}{\sum_i u_i} \sum_i u_i \right\} \leq 0.$$

La positivité (condition **(P)**) implique

$$0 < \min_i d_i \leq \frac{\sum_i d_i u_i}{\sum_i u_i} \leq \max_i d_i < +\infty.$$

Donc $\sum_i u_i$ satisfait une équation parabolique. Même si elle est à coefficients discontinus et à forme non divergentielle, elle implique une estimation de $\sum_i u_i$ dans $L^2(Q_T)$, et donc aussi de chaque u_i par positivité.

S'applique -entre autres- à nos exemples chimiques

$$A + B \rightleftharpoons C \quad C \rightleftharpoons P + Q$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t a - d_a \Delta a = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t c - d_c \Delta c = k_1 a\, b - k_2 c - k_3 c + k_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = -k_4 p\, q + k_3 c \\ \partial_t q - d_q \Delta q = -k_4 p\, q + k_3 c. \end{array}\right.$$

Equation limite (formellement !) quand $k_2 + k_3 \to +\infty$:
$\alpha = \lim k_2/(k_2 + k_3),\ K_1 = (1-\alpha)k_1,\ K_4 = \alpha k_4$:

$$A + B \rightleftharpoons P + Q$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t a - d_a \Delta a = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = K_1 a\, b - K_4 p\, q \\ \partial_t q - d_q \Delta q = K_1 a\, b - K_4 p\, q. \end{array}\right.$$

Momentanément: $K_1 = K_4 = 1$.

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -a\, b + p\, q \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -a\, b + p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = a\, b - p\, q \\ \partial_t q - d_q \Delta q = a\, b - p\, q. \end{cases}$$

On remarque que:

$$[\partial_t - d_a \Delta](a \ln a - a) \leq (\ln a)[-ab + pq] ... etc\ for\ b, p, q$$

et donc, si $w_a = a \ln a - a, w_b = b \ln b - b, ...$

$$\sum_{i \in \{a,b,c,d\}} \partial_t w_i - d_i \Delta w_i \leq [\ln ab - \ln pq][-ab + pq] \leq 0.$$

C'est *l'inégalité d'entropie*. Surtout: on en déduit aussi une estimation L^2 sur les w_i, soit:

$$\int_{Q_T} [a \log a]^2, [b \log b]^2 ... \leq C(T).$$

$\Rightarrow$ non seulement $ab - pq$ est borné dans $L^1(Q_T)$, mais il y est uniformément intégrable, ce qui permet de passer à la limite directement sur une approximation correcte du système.

$$
\begin{cases}
\partial_t a - d_a \Delta a = -a\, b + p\, q \\
\partial_t b - d_b \Delta b = -a\, b + p\, q \\
\partial_t p - d_p \Delta p = a\, b - p\, q \\
\partial_t q - d_q \Delta q = a\, b - p\, q.
\end{cases}
$$

L'approche précédente est systématisée dans un travail de L. Desvillettes, K. Fellner, M.P., J. Vovelle.
Problèmes ouverts: La solution faible est-elle aussi une solution classique (c'est--dire bornée pour tout temps?? OUI en dimension $N = 1$ et $N = 2$.

En dimension $N = 3$ and $N = 4$, il a été prouvé (Th. Goudon, A. Vasseur) que l'ensemble des points de $[0, +\infty[\times\Omega$ où la solution est non bornée est de dimension de Hausdorff au plus $(N^2 - 4)/N$.
EST-CE OPTIMAL??
Cas de termes en $-a^\alpha b^\beta + p^\alpha q^\beta$??

Retour à:

$$A + B \rightleftharpoons C \quad C \rightleftharpoons P + Q$$

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -k_1 a\, b + k_2 c \\ \partial_t c - d_c \Delta c = k_1 a\, b - k_2 c - k_3 c + k_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = -k_4 p\, q + k_3 c \\ \partial_t q - d_q \Delta q = -k_4 p\, q + k_3 c. \end{cases}$$

Théorème: Il y a existence globale de solutions classiques.
Méthode: Estimations $L^p(Q_T)\ \forall p < +\infty$! via la théorie de régularité L^p pour les équations paraboliques

$$\{[\partial_t - d_a \Delta] a = [\partial_t - d_b \Delta] b\} \Rightarrow C\|b\|_p \leq \|a\|_p \leq \hat{C}\|b\|_p$$

$$\{[\partial_t - d_c \Delta] c = -\partial_t(a+b) - \Delta(d_a a + d_b b)\} \Rightarrow \|c\|_p \leq C[\|a\|_p + \|b\|_p]$$

$$\textit{première equation} \ \Rightarrow \|a(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a(0)\|_{L^p(\Omega)} + k_2 \int_0^p \|c(s)\|_{L^p(\Omega)} ds.$$

Passage à la limite quand $k_2 + k_3 \to +\infty$

Théorème: (D. Bothe, M. P.) $(a^k, b^k, c^k, p^k, q^k)$ converge dans $L^2(Q_T)$ vers $(a, b, 0, p, q)$ solution faible de

$$\begin{cases} \partial_t a - d_a \Delta a = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t b - d_b \Delta b = -K_1 a\, b + K_4 p\, q \\ \partial_t p - d_p \Delta p = K_1 a\, b - K_4 p\, q \\ \partial_t q - d_q \Delta q = K_1 a\, b - K_4 p\, q. \end{cases}$$

avec $\alpha = \lim k_2/(k_2 + k_3)$, $K_1 = (1 - \alpha)k_1$, $K_4 = \alpha k_4$ et les conditions initiales:

$$a(0) = a_0 + \alpha c_0, b(0) = b_0 + \alpha c_0,$$

$$p(0) = p_0 + (1 - \alpha)c_0, q(0) = q_0 + (1 - \alpha)c_0.$$

Remarque: On utilise les estimations $[L\, Log\, L]^2$. Mais, couche limite en $t = 0$! On montre au préalable que les solutions restent uniformément bornées sur un petit intervalle indépendant de k_2, k_3.
Question ouverte: identifier les systèmes qui entrent dans cette analyse.

Quelques autres problèmes ouverts

Que peut-on dire de l'existence globale de solutions faibles pour

$$(E)\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = u^3 v^2 - u^2 v^3 & \text{on } Q_T \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = u^2 v^3 - u^3 v^2 & \text{on } Q_T \\ + \text{ conditions initiales et au bord} \end{cases}$$

et aussi de

$$(E)\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = -c(t,x) u^2 v^2 & \text{on } Q_T \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = c(t,x) u^2 v^2 & \text{on } Q_T, \\ + \text{ conditions initiales et au bord} \end{cases}$$

quand $c(t,x)$ n'est pas de signe constant ???

Remarque: Il n'est même pas clair que les nonlinéarités soient bornées dans $L^1(Q_T)$!!!
Necessité de solutions renormalisées ???

More open problems

- atmospheric vertical diffusion/transport of pollutants (partial results with assumptions on the transport).
- Uniqueness of weak solutions...or more precisely, what is the way to select the "best" solution, since for instance there is even not uniqueness for $\partial_t u - \Delta u = u^3$.
- how to define renormalized solutions for systems???
- what about initial data in $L^1(\Omega)$?
- what about different boundary conditions? (some surprises arise even for "good" boudary conditions, but of different kind for u and v).
- what about nonlinear diffusions??

$$(E)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^m = f(u,v) & on\ Q_T \\ \partial_t v - \Delta v^p = g(u,v) & on\ Q_T, \end{cases}$$

- Same questions with general Lyapounov type of structure

$$h_1'(u)f(u,v) + h_2'(v)g(u,v) \leq 0,\ h_1, h_2\ convex.$$

- same questions for elliptic systems.