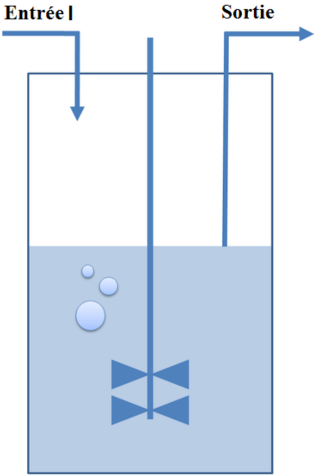
Coexistence d'espèces en compétition pour une ressource dans un milieu hétérogène

Sten Madec

Université de Rennes 1, IRMAR
Journée d'équipe ANUM

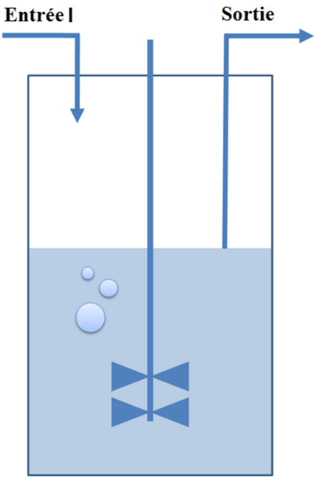
Plan

Le Chemostat



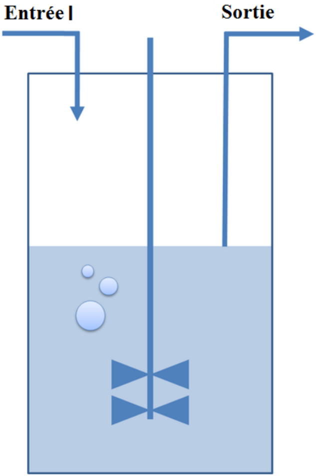
- N espèces U_i
- Une ressource R

Le Chemostat



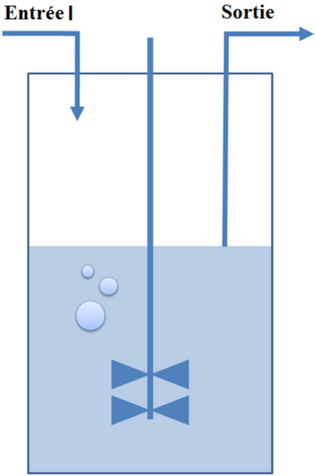
- N espèces U_i
- Une ressource R
- Flux entrant de ressource I

Le Chemostat



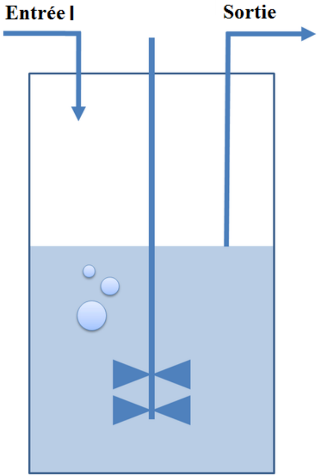
- N espèces U_i
- Une ressource R
- Flux entrant de ressource I
- Flux sortant δ

Le Chemostat



- N espèces U_i
- Une ressource R
- Flux entrant de ressource I
- Flux sortant δ
- Taux de consommation $f_i(R)$

Le Chemostat



- N espèces U_i
- Une ressource R
- Flux entrant de ressource I
- Flux sortant δ
- Taux de consommation $f_i(R)$
- Taux de croissance $\lambda_i f_i(R)$

Équation du problème homogène :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U_i(t) = (\lambda_i f_i(R(t)) - \delta)U_i(t), \quad i = 1, \ldots, N \\ \frac{d}{dt}R(t) = I - \delta R(t) - \sum_{i=1}^{N} U_i(t) f_i(R(t)) \\ U_i(0) = U_{i0} > 0, \quad i = 1, \ldots, N \\ R(0) = R_0 \geq 0 \end{cases}$$

Équation du problème homogène :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U_i(t) = (\lambda_i f_i(R(t)) - m_i)U_i(t), \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d}{dt}R(t) = I - \delta R(t) - \sum_{i=1}^{N} U_i(t) f_i(R(t)) \\ U_i(0) = U_{i0} > 0, \quad i = 1, \dots, N \\ R(0) = R_0 \geq 0 \end{cases}$$

Équation du problème homogène :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_i(t) = (\lambda_i f_i(R(t)) - m_i) U_i(t), \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d}{dt} R(t) = I - \delta R(t) - \sum_{i=1}^{N} U_i(t) f_i(R(t)) \\ U_i(0) = U_{i0} > 0, \quad i = 1, \dots, N \\ R(0) = R_0 \geq 0 \end{cases}$$

Plusieurs types classiques de fonctions de consommation

- $f_i(R) = C_i R$
- $f_i(R) = \frac{a_i R}{K_i + R}$

Équation du problème homogène :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U_i(t) = (\lambda_i C_i R(t) - m_i)U_i(t), \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d}{dt}R(t) = I - \delta R(t) - \sum_{i=1}^{N} U_i(t) C_i R(t) \\ U_i(0) = U_{i0} > 0, \quad i = 1, \dots, N \\ R(0) = R_0 \geq 0 \end{cases}$$

Plusieurs types classiques de fonctions de consommation

- $f_i(R) = C_i R$
- $f_i(R) = \frac{a_i R}{K_i + R}$

On se contentera du cas le plus simple

Problème stationnaire, de solution (U_i^{eq}, R^{eq}) (*P. Waltman*, 1977)

- Grandeur caractéristique d'une espèce : $R_i^* = \frac{m_i}{\lambda_i C_i}$

Problème stationnaire, de solution (U_i^{eq}, R^{eq}) (*P. Waltman*, 1977)

- Grandeur caractéristique d'une espèce : $R_i^* = \frac{m_i}{\lambda_i C_i}$
- Si les R_i^* sont tous différents, N+1 états d'équilibres

Problème stationnaire, de solution (U_i^{eq}, R^{eq}) (*P. Waltman*, 1977)

- Grandeur caractéristique d'une espèce : $R_i^* = \frac{m_i}{\lambda_i C_i}$
- Si les R_i^* sont tous différents, N+1 états d'équilibres
- Un seul stable, R^{eq} minimum

Problème stationnaire, de solution $\left(U_i^{eq}, R^{eq}\right)$ (*P. Waltman*, 1977)

- Grandeur caractéristique d'une espèce : $R_i^* = \frac{m_i}{\lambda_i C_i}$
- Si les R_i^* sont tous différents, N+1 états d'équilibres
- Un seul stable, R^{eq} minimum
- Stabilité globale (fonction de Lyapunov)

Problème stationnaire, de solution (U_i^{eq}, R^{eq}) (*P. Waltman*, 1977)

- Grandeur caractéristique d'une espèce : $R_i^* = \frac{m_i}{\lambda_i C_i}$
- Si les R_i^* sont tous différents, N+1 états d'équilibres
- Un seul stable, R^{eq} minimum
- Stabilité globale (fonction de Lyapunov)

Proposition

Chemostat homogène $\Rightarrow$ Exclusion compétitive

Plan

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$
$C_i, m_i, I, \delta : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ régulières. $\lambda_i, a_i, b \in \mathbb{R}_+^*$
Pour $t > 0$

$$(\mathcal{S}_N) \begin{cases} \partial_t U_i = (\lambda_i C_i U_i - m_i) U_i + a_i \Delta U_i, \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1 \cdots N \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^{N} C_i U_i + \delta) R + b \Delta R, \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_\eta U_i(t, \cdot) = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega \quad , i = 1 \cdots N \\ \partial_\eta R(t, \cdot) = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega \\ \text{Conditions initiales} > 0 \end{cases}$$

Proposition

Pour tout $T > 0$ *le système* $(\mathcal{S}_N)$ *admet une unique solution classique positive.*

Proposition

Pour tout $T > 0$ le système $(\mathcal{S}_N)$ admet une unique solution classique positive.

Proposition

Les solutions de $(\mathcal{S}_N)$ sont bornées uniformément en temps.

Voir *S.L. Hollis, R.H. Martin, et M. Pierre,* 1987

Plan

Petites diffusions :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon)\begin{cases}\partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i)U_i + \varepsilon a_i \Delta U_i \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^{N} C_i U_i + \delta)R + \varepsilon b \Delta R \\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0 \\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0 \\ \text{conditions initiales} > 0\end{cases}$$

Petites diffusions :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon)\begin{cases} \partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i)U_i + \varepsilon a_i \Delta U_i \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^{N} C_i U_i + \delta)R + \varepsilon b \Delta R \\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0 \\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0 \\ \text{conditions initiales} > 0 \end{cases}$$

- Perturbation autour de la solution $\varepsilon = 0$

Petites diffusions :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon)\begin{cases}\partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i)U_i + \varepsilon a_i \Delta U_i \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^{N} C_i U_i + \delta)R + \varepsilon b \Delta R \\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0 \\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0 \\ \text{conditions initiales} > 0\end{cases}$$

- Perturbation autour de la solution $\varepsilon = 0$
- Coexistence

Grandes diffusions :

$$\left(\mathcal{S}_{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\begin{cases} \partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i) U_i + \frac{1}{\varepsilon} a_i \Delta U_i \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^{N} C_i U_i + \delta) R + \frac{1}{\varepsilon} b \Delta R \\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0 \\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0 \\ \text{CI} > 0 \end{cases}$$

Grandes diffusions :

$$\left(\mathcal{S}_{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\begin{cases}\partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i)U_i + \frac{1}{\varepsilon} a_i \Delta U_i\\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^N C_i U_i + \delta)R + \frac{1}{\varepsilon} b \Delta R\\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0\\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0\\ \text{CI} > 0\end{cases}$$

Problème agrégé :

$$(\mathcal{S}_{ag})\begin{cases}\partial_t u_i = (\lambda_i \widetilde{C}_i r - \widetilde{m}_i)u_i\\ \partial_t r = \widetilde{I} - (\sum_{i=1}^N \widetilde{C}_i u_i + \widetilde{\delta})r\\ \text{conditions initiales} > 0\end{cases}$$

Grandes diffusions :

$$\left(\mathcal{S}_{\frac{1}{\varepsilon}}\right)\begin{cases}\partial_t U_i = (\lambda_i C_i R - m_i)U_i + \frac{1}{\varepsilon} a_i \Delta U_i \\ \partial_t R = I - (\sum_{i=1}^N C_i U_i + \delta)R + \frac{1}{\varepsilon} b \Delta R \\ \partial_\eta U_i(t,\cdot) = 0 \\ \partial_\eta R(t,\cdot) = 0 \\ \text{CI} > 0\end{cases}$$

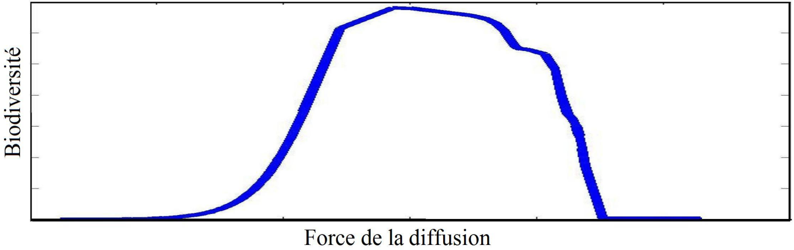
Problème agrégé :

$$(\mathcal{S}_{ag})\begin{cases}\partial_t u_i = (\lambda_i \widetilde{C}_i r - \widetilde{m}_i)u_i \\ \partial_t r = \widetilde{I} - (\sum_{i=1}^N \widetilde{C}_i u_i + \widetilde{\delta})r \\ \text{conditions initiales} > 0\end{cases}$$

- Variété centrale $\Rightarrow$ Pas de coexistence

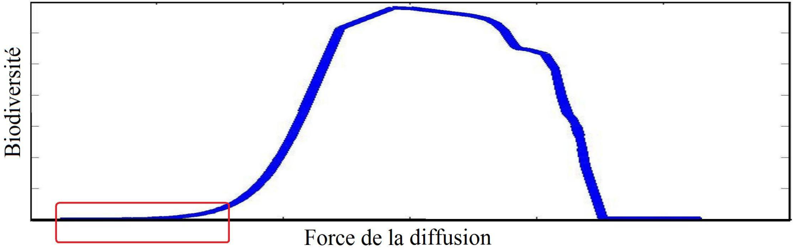
Biomasse totale en x : $P(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x)$

Fonction de biodiversité : $H = -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \frac{U_i(x)}{P(x)} ln \frac{U_i(x)}{P(x)}$



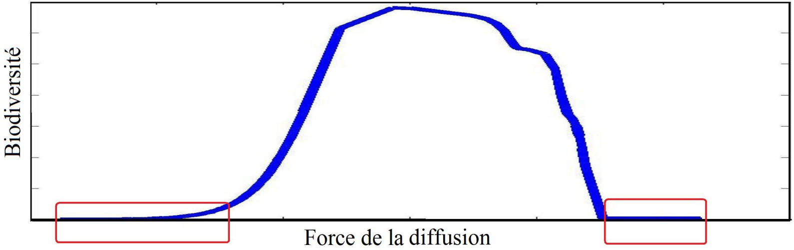
Biomasse totale en x : $P(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x)$

Fonction de biodiversité : $H = -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \frac{U_i(x)}{P(x)} ln \frac{U_i(x)}{P(x)}$



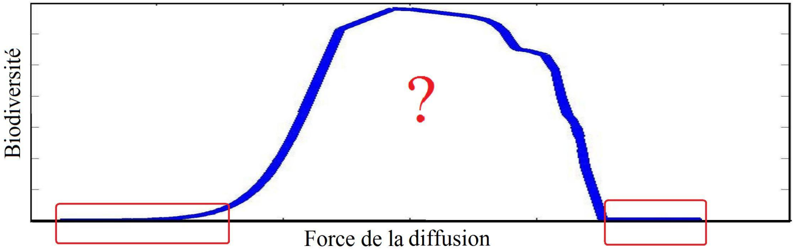
Biomasse totale en x : $P(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x)$

Fonction de biodiversité : $H = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{U_i(x)}{P(x)} ln \frac{U_i(x)}{P(x)}$



Biomasse totale en x : $P(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x)$

Fonction de biodiversité : $H = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{U_i(x)}{P(x)} ln \frac{U_i(x)}{P(x)}$



Que se passe-t-il dans les cas intermédiaires ?

Plan

Problème stationnaire :

$$(\mathcal{S}_N)\begin{cases} A_i U_i - C_i R U_i = 0 \quad i = 1 \cdots N \\ BR + \sum_{i=1}^{N} C_i U_i R = I \\ \partial_\eta U_i = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

Où $A_i = m_i - a_i \Delta$ et $B = \delta - b\Delta$

Problème stationnaire :

$$(\mathcal{S}_N)\begin{cases} A_iU_i - C_iRU_i = 0 \quad i = 1\cdots N \\ BR + \sum_{i=1}^{N} C_iU_iR = I \\ \partial_\eta U_i = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

Où $A_i = m_i - a_i\Delta$ et $B = \delta - b\Delta$

Si $A_i = B$ alors $B\left(\sum_{i=1}^{N} U_i + R\right) = I$

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$

(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$
(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

- Élimination de l'équation sur R

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$
(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

- Élimination de l'équation sur R
  $\longrightarrow$ Problème à une espèce scalaire

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$
(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

- Élimination de l'équation sur R
  $\longrightarrow$ Problème à une espèce scalaire
  $\longrightarrow$ Résolution du problème à 2 espèces par bifurcation

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$

(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

- Élimination de l'équation sur R
  $\longrightarrow$ Problème à une espèce scalaire
  $\longrightarrow$ Résolution du problème à 2 espèces par bifurcation

Cas général

(*J.V. Baxley et S.B. Robinson*, 1998)

- On pose $C_i(x) = c_i Q_i(x)$
- $(c_i)_i \in \mathbb{R}^N =$ paramètre de bifurcation
- Par bifurcation locale, coexistence pour $c_i^0 < c_i < c_i^0 + \varepsilon_i$

Cas particulier $m_i/a_i = \delta/b$
(Dim 1, *P. Waltmann*, 1993. Dim qcq, *J.H. Wu*, 1998)

- Élimination de l'équation sur R
  $\longrightarrow$ Problème à une espèce scalaire
  $\longrightarrow$ Résolution du problème à 2 espèces par bifurcation

Cas général
(*J.V. Baxley et S.B. Robinson*, 1998)

- On pose $C_i(x) = c_i Q_i(x)$
- $(c_i)_i \in \mathbb{R}^N$ = paramètre de bifurcation
- Par bifurcation locale, coexistence pour $c_i^0 < c_i < c_i^0 + \varepsilon_i$

$\longrightarrow$ **Étendre le résultat de Baxley et Robinson pour tout** c_i
$\longrightarrow$ **Mieux comprendre ces solutions**

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple
(*Crandall et Rabinowitz*, 1971)

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple
(*Crandall et Rabinowitz*, 1971)

1. Problème de point fixe (dépendant de $c \in \mathbb{R}$) : $T(c, \mathbf{W}) = \mathbf{W}$

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple
(*Crandall et Rabinowitz*, 1971)

1. Problème de point fixe (dépendant de $c \in \mathbb{R}$) : $T(c, \mathbf{W}) = \mathbf{W}$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ T(c, 0) = 0$

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple
(*Crandall et Rabinowitz*, 1971)

1. Problème de point fixe (dépendant de $c \in \mathbb{R}$) : $T(c, \mathbf{W}) = \mathbf{W}$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ T(c, 0) = 0$
3. $T(c, \cdot) = \underbrace{\mathcal{K}(c)}_{\text{Linéaire compact}} + \underbrace{G(c, \cdot)}_{\text{Dérivée nulle en } 0}$

Bifurcation à partir d'une valeur propre simple

(*Crandall et Rabinowitz*, 1971)

1. Problème de point fixe (dépendant de $c \in \mathbb{R}$) : $T(c, \mathbf{W}) = \mathbf{W}$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ T(c, 0) = 0$
3. $T(c, \cdot) = \underbrace{\mathcal{K}(c)}_{\text{Linéaire compact}} + \underbrace{G(c, \cdot)}_{\text{Dérivée nulle en } 0}$

Proposition

S'il existe c_0 telle que 0 soit valeur propre simple de $I - \mathcal{K}(c_0)$ et $\ker(I - \mathcal{K}(c_0))$ soit engendré par ϕ_0 alors on a une solution de bifurcation au voisinage de c_0 de la forme $\mathbf{W} = s(\phi_0 + \widetilde{\mathbf{W}}(s))$.

Zéro espèce : la solution triviale

Proposition

Soit $S = B^{-1}I$ (la solution du problème à 0 espèce). Alors $(0, \cdots, 0, S)$ est solution triviale de $(\mathcal{S}_N)$ et si $(U_1, \cdots, U_N, R)$ est une solution positive non triviale de $(\mathcal{S}_N)$, alors $R < S$.

Zéro espèce : la solution triviale

Proposition

Soit $S = B^{-1}I$ (la solution du problème à 0 espèce). Alors $(0, \cdots, 0, S)$ est solution triviale de $(\mathcal{S}_N)$ et si $(U_1, \cdots, U_N, R)$ est une solution positive non triviale de $(\mathcal{S}_N)$, alors $R < S$.

Objectif : Bifurcations successives à partir de la solution triviale

Plan

On pose $C_1(x) = cQ_1(x)$. $c \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre de bifurcation.
On s'intéresse aux solutions positives du problème :

$$(\mathcal{S}_1^c) \begin{cases} A_1 U - cQ_1 RU = 0 \\ BR + cQ_1 UR = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta R = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F_c(U, R) = 0$$

On pose $C_1(x) = cQ_1(x)$. $c \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre de bifurcation.
On s'intéresse aux solutions positives du problème :

$$(\mathcal{S}_1^c) \begin{cases} A_1 U - cQ_1 RU = 0 \\ BR + cQ_1 UR = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta R = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F_c(U, R) = 0$$

On note $\mathcal{L}_c$ la dérivée de F_c en $(0, S)$

On pose $C_1(x) = cQ_1(x)$. $c \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre de bifurcation.
On s'intéresse aux solutions positives du problème :

$$(\mathcal{S}_1^c) \begin{cases} A_1 U - cQ_1 RU = 0 \\ BR + cQ_1 UR = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta R = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F_c(U, R) = 0$$

On note $\mathcal{L}_c$ la dérivée de F_c en $(0, S)$
On se ramène à $(0, 0)$ solution trivial : $r = S - R$

On pose $C_1(x) = cQ_1(x)$. $c \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre de bifurcation.
On s'intéresse aux solutions positives du problème :

$$(\mathcal{S}_1^c)\begin{cases} A_1 U - cQ_1 RU = 0 \\ BR + cQ_1 UR = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta R = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F_c(U,R) = 0$$

On note $\mathcal{L}_c$ la dérivée de F_c en $(0, S)$
On se ramène à $(0,0)$ solution trivial : $r = S - R$
$(U,R) > 0$ solution de $(\mathcal{S}_1^c)$ équivaut à $(U,r) > 0$ solution de :

$$(U,r) = \mathcal{K}(c)(U,r) + G(c,U,r) = T(c,(U,r))$$

Ainsi $\mathcal{L}_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} (I - \mathcal{K}(c))$

Théorème (de bifurcation locale)

$\exists c_0, \varepsilon > 0$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ et $\widehat{u}$, $\widehat{r} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C^1(\Omega)$ telles que l'unique solution de $(\mathcal{S}_1^c)$ pour $|c - c_0| \ll 1$ est
$(c, U, R) = (c(s), s(\phi_0 + \widehat{u}(s)), S - s(\psi_0 + \widehat{r}(s))$.
On note $\mathcal{C}_\varepsilon = \{(c(s), U(s), R(s)), 0 < s < \varepsilon\}$
De plus pour $s > 0$, $(U(s), R(s)) > 0$ et cette solution est linéairement stable.

Démonstration :
Linéarisé en $(0,0)$,

$$(\phi,\rho) = \mathcal{K}(c)(\phi,\rho) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1\phi - cQ_1S\phi = 0 \\ B\rho - cQ_1S\phi = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration :

Linéarisé en $(0,0)$,

$$(\phi,\rho)=\mathcal{K}(c)(\phi,\rho)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A_1\phi-cQ_1S\phi=0\\ B\rho-cQ_1S\phi=0\end{array}\right.$$

- $A_1\phi-cQS\phi=0\rightarrow$ valeur propre principale c_0 et fonction propre associée $\phi_0>0$

Démonstration :
Linéarisé en $(0,0)$,

$$(\phi,\rho)=\mathcal{K}(c)(\phi,\rho)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A_1\phi-cQ_1S\phi=0\\ B\rho-cQ_1S\phi=0\end{array}\right.$$

- $A_1\phi-cQS\phi=0\rightarrow$ valeur propre principale c_0 et fonction propre associée $\phi_0>0$
- $\rho_0=B^{-1}(c_0S\phi_0)>0$ et $ker(\mathcal{L}_{c_0})=vect\left(\begin{pmatrix}\phi_0\\ \rho_0\end{pmatrix}\right)$

Démonstration :
Linéarisé en $(0,0)$,

$$(\phi,\rho) = \mathcal{K}(c)(\phi,\rho) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1\phi - cQ_1S\phi = 0 \\ B\rho - cQ_1S\phi = 0 \end{array} \right.$$

- $A_1\phi - cQS\phi = 0 \rightarrow$ valeur propre principale c_0 et fonction propre associée $\phi_0 > 0$
- $\rho_0 = B^{-1}(c_0S\phi_0) > 0$ et $ker(\mathcal{L}_{c_0}) = vect\left(\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix}\right)$
- $R < S \Rightarrow c > c_0 \Rightarrow$ stabilité

Soit $\mathcal{C}$ la courbe maximale contenant $\mathcal{C}_\varepsilon$

Théorème (de bifurcation globale)

Pour tout $c > c_0$, $(\mathcal{S}_1^c)$ *admet une solution positive non triviale* (U, R) *telle que* $(c, U, R) \in \mathcal{C}$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe maximale contenant $\mathcal{C}_\varepsilon$

Théorème (de bifurcation globale)

Pour tout $c > c_0$, $(\mathcal{S}_1^c)$ admet une solution positive non triviale (U, R) telle que $(c, U, R) \in \mathcal{C}$

- Théorème de bifurcation globale de Rabinowitz

Soit $\mathcal{C}$ la courbe maximale contenant $\mathcal{C}_\varepsilon$

Théorème (de bifurcation globale)

Pour tout $c > c_0$, $(\mathcal{S}_1^c)$ admet une solution positive non triviale (U, R) telle que $(c, U, R) \in \mathcal{C}$

- Théorème de bifurcation globale de Rabinowitz
- Positivité (principe du maximum)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe maximale contenant $\mathcal{C}_\varepsilon$

Théorème (de bifurcation globale)

Pour tout $c > c_0$, $(\mathcal{S}_1^c)$ admet une solution positive non triviale (U, R) telle que $(c, U, R) \in \mathcal{C}$

- Théorème de bifurcation globale de Rabinowitz
- Positivité (principe du maximum)
- Non bornée en c

$$(U,R) \text{ solution de } (\mathcal{S}_1^c) \quad \Leftrightarrow \quad F_c(U,R)=0$$

Proposition

Soit c fixée, et $(c,U,R)\in\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{L}_c$ la dérivée de Frèchet de F_c en (U,R).
0 n'est pas valeur propre de $\mathcal{L}_c$.

$$(U,R) \text{ solution de } (\mathcal{S}_1^c) \quad \Leftrightarrow \quad F_c(U,R) = 0$$

Proposition

Soit c fixée, et $(c,U,R) \in \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{L}_c$ la dérivée de Frèchet de F_c en (U,R).
0 n'est pas valeur propre de $\mathcal{L}_c$.

Conséquences :

- Pas de bifurcation le long de $\mathcal{C}$

(U,R) solution de $(\mathcal{S}_1^c) \quad \Leftrightarrow \quad F_c(U,R) = 0$

Proposition

Soit c fixée, et $(c,U,R) \in \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{L}_c$ la dérivée de Frèchet de F_c en (U,R).
0 n'est pas valeur propre de $\mathcal{L}_c$.

Conséquences :

- Pas de bifurcation le long de $\mathcal{C}$
- Pas de "point de rebroussement"

$$(U,R) \text{ solution de } (\mathcal{S}_1^c) \quad \Leftrightarrow \quad F_c(U,R)=0$$

Proposition

Soit c fixée, et $(c,U,R)\in\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{L}_c$ la dérivée de Frèchet de F_c en (U,R).
0 n'est pas valeur propre de $\mathcal{L}_c$.

Conséquences :

- Pas de bifurcation le long de $\mathcal{C}$
- Pas de "point de rebroussement"
- $\mathcal{L}_c$ inversible $\Rightarrow$ Bifurcation pour le problème à deux espèces $(\mathcal{S}_2)$

Plan

Problème :

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} A_1 U - c_1 Q_1 R U = 0 \\ A_2 V - c_2 Q_2 R V = 0 \\ BR + c_1 Q_1 R U + c_2 Q_2 R V = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta V = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

Problème :

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} A_1 U - c_1 Q_1 RU = 0 \\ A_2 V - c_2 Q_2 RV = 0 \\ BR + c_1 Q_1 RU + c_2 Q_2 RV = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta V = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

- Solution triviale $(0, 0, S)$

Problème :

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} A_1 U - c_1 Q_1 RU = 0 \\ A_2 V - c_2 Q_2 RV = 0 \\ BR + c_1 Q_1 RU + c_2 Q_2 RV = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta V = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

- Solution triviale $(0, 0, S)$
- Solutions semi-triviales
  1. $\mathcal{C}_1$: $c_1 > c_1^0 \Rightarrow (U^*, 0, R^*)$
  2. $\mathcal{C}_2$: $c_2 > c_2^0 \Rightarrow (0, V^{**}, R^{**})$

Problème :

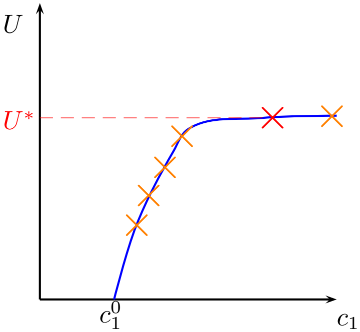
$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} A_1U - c_1Q_1RU = 0 \\ A_2V - c_2Q_2RV = 0 \\ BR + c_1Q_1RU + c_2Q_2RV = I \\ \partial_\eta U = \partial_\eta V = \partial_\eta R = 0 \end{cases}$$

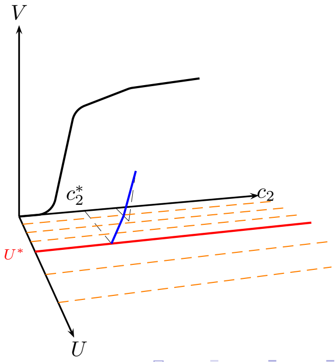
- Solution triviale $(0, 0, S)$
- Solutions semi-triviales
  1. $\mathcal{C}_1$: $c_1 > c_1^0 \Rightarrow (U^*, 0, R^*)$
  2. $\mathcal{C}_2$: $c_2 > c_2^0 \Rightarrow (0, V^{**}, R^{**})$
- **Solution non triviale ?**

$c_1 > c_1^0$ fixe. $(c_1, U^*, 0, R^*) \in \mathcal{C}_1$. c_2 paramètre de bifurcation

Théorème (de bifurcation locale)

$\exists c_2^* > c_2^0$, $|c_2 - c_2^*| \ll 1 \Rightarrow (U(s), V(s), R(s))$ *unique solution non triviale de* $(\mathcal{S}_2)$.





Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0 \\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \end{array}\right.$$

Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0\\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\end{cases}$$

Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0\\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\end{array}\right.$$

- $A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2^*$ et $\psi_0 > 0$

Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0\\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0\end{array}\right.$$

- $A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2^*$ et $\psi_0 > 0$
- $\mathcal{L}^1_{(U^*,R^*)}\begin{pmatrix}\phi\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c_2^* Q_2 R^*\psi_0\end{pmatrix}$

Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0 \\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \end{cases}$$

- $A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2^*$ et $\psi_0 > 0$
- $\mathcal{L}^1_{(U^*,R^*)}\begin{pmatrix}\phi\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c_2^* Q_2 R^*\psi_0\end{pmatrix}$
- $\mathcal{L}^1_{(U^*,R^*)}$ inversible $\Rightarrow \phi_0$ et ρ_0 (non > 0 a priori)

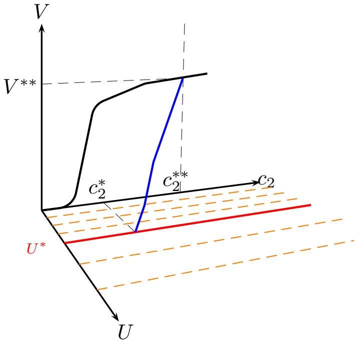
Démonstration : $\mathcal{L}_{c_2}$ la dérivée en $(U^*, 0, R^*)$

$$\mathcal{L}_{c_2}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ \rho\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \\ A_1\phi - c_1 Q_1 R^*\phi - c_1 Q_1 U^*\rho = 0 \\ B\rho + c_1 Q_1 U^*\rho + c_1 Q_1 R^*\phi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \end{cases}$$

- $A_2\psi - c_2 Q_2 R^*\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2^*$ et $\psi_0 > 0$
- $\mathcal{L}^1_{(U^*,R^*)}\begin{pmatrix}\phi\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c_2^* Q_2 R^*\psi_0\end{pmatrix}$
- $\mathcal{L}^1_{(U^*,R^*)}$ inversible $\Rightarrow \phi_0$ et ρ_0 (non > 0 a priori)
- $ker(\mathcal{L}_{c_2}) = vect((\phi_0, \psi_0, \rho_0))$

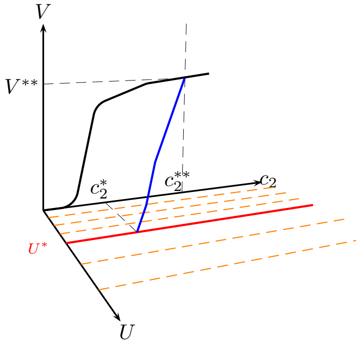
Théorème (de bifurcation globale)

Il existe une courbe de bifurcation $\mathcal{C}_{12}$ reliant le point $(c_2^*, U^*, 0, R^*)$ à un point $(c_2^{**}, 0, V^{**}, R^{**}) \in \mathcal{C}_2$.



Théorème (de bifurcation globale)

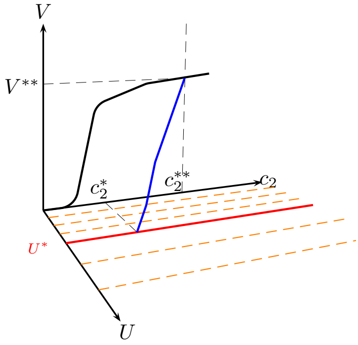
Il existe une courbe de bifurcation $\mathcal{C}_{12}$ reliant le point $(c_2^*, U^*, 0, R^*)$ à un point $(c_2^{**}, 0, V^{**}, R^{**}) \in \mathcal{C}_2$.



- Théorème de bifurcation globale. Positivité par principe du maximum

Théorème (de bifurcation globale)

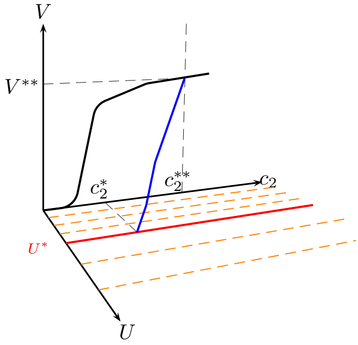
Il existe une courbe de bifurcation $\mathcal{C}_{12}$ reliant le point $(c_2^*, U^*, 0, R^*)$ à un point $(c_2^{**}, 0, V^{**}, R^{**}) \in \mathcal{C}_2$.



- Théorème de bifurcation globale. Positivité par principe du maximum
- Bornée

Théorème (de bifurcation globale)

Il existe une courbe de bifurcation $\mathcal{C}_{12}$ reliant le point $(c_2^*, U^*, 0, R^*)$ à un point $(c_2^{**}, 0, V^{**}, R^{**}) \in \mathcal{C}_2$.

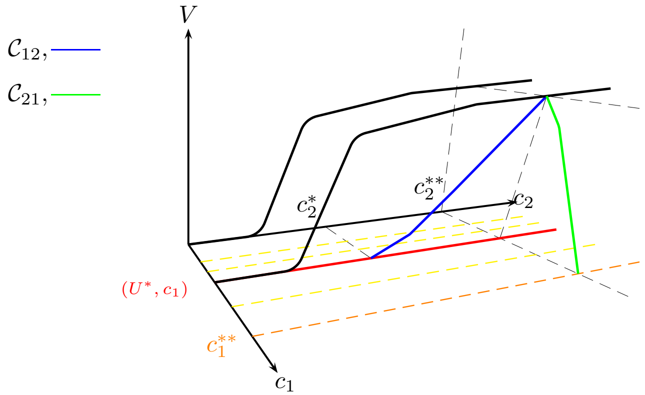


- Théorème de bifurcation globale. Positivité par principe du maximum
- Bornée
- Pas d'unicité $\longrightarrow$ calcul des indices

Plan

Théorème (c_1 paramètre de bifurcation)

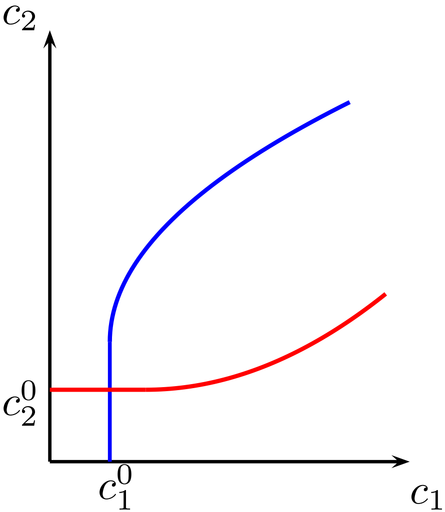
Il existe une courbe de bifurcation $\mathcal{C}_{21}$ reliant le point $(c_1^*, 0, V^*, R^*)$ à un point $(c_1^{**}, U^{**}, 0, R^{**}) \in \mathcal{C}_1$.



Ainsi c_2^{**} est définie par $c_1^*(c_2^{**}) = c_1$

$c_1 \longrightarrow c_2^*(c_1)$

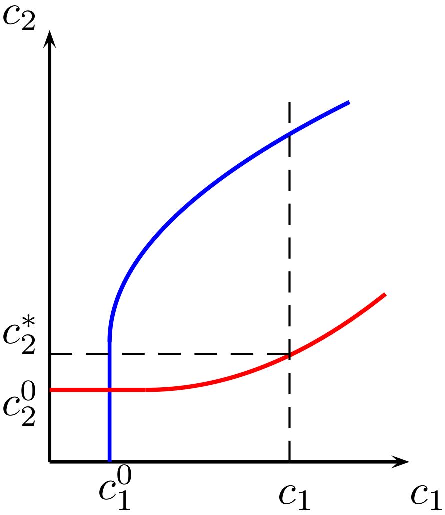
$c_2 \longrightarrow c_1^*(c_2)$



Ainsi c_2^{**} est définie par $c_1^*(c_2^{**}) = c_1$

$c_1 \longrightarrow c_2^*(c_1)$

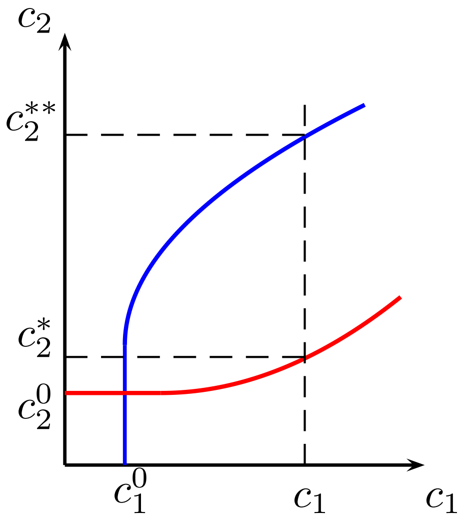
$c_2 \longrightarrow c_1^*(c_2)$



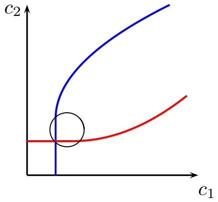
Ainsi c_2^{**} est définie par $c_1^*(c_2^{**}) = c_1$

$c_1 \longrightarrow c_2^*(c_1)$

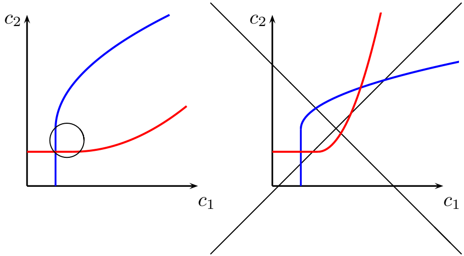
$c_2 \longrightarrow c_1^*(c_2)$



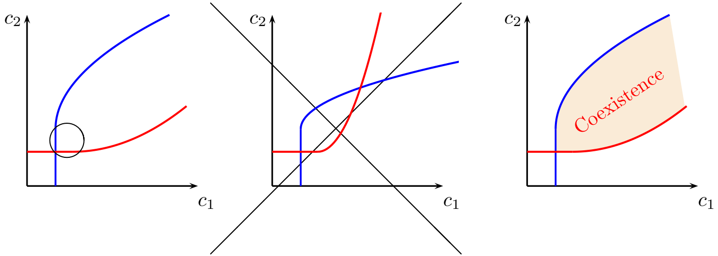
- Baxley et Robinson $\rightarrow$ résultat local



- Baxley et Robinson $\rightarrow$ résultat local
- Croisement seulement en $(c_1^0, c_2^0) \Rightarrow c_2^* < c_2^{**}$

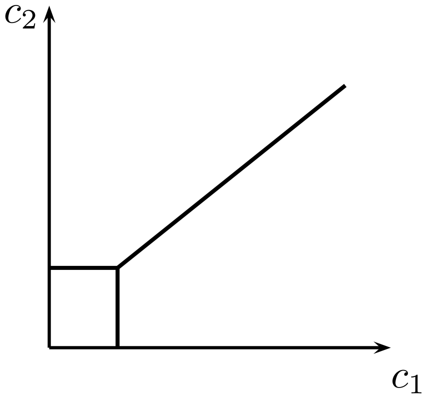


- Baxley et Robinson $\rightarrow$ résultat local
- Croisement seulement en $(c_1^0, c_2^0) \Rightarrow c_2^* < c_2^{**}$
- Coexistence pour $c_2^* < c_2 < c_2^{**}$

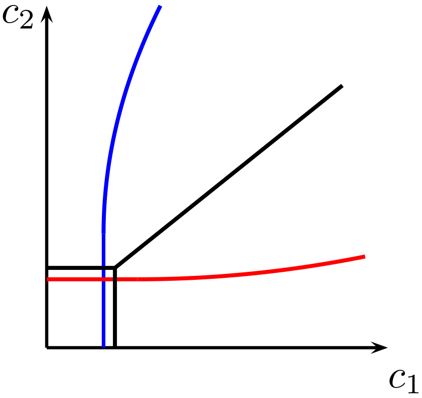


Plan

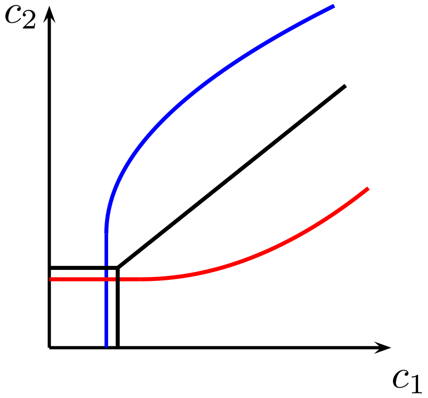
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\to c_1^* = \alpha c_2^*$



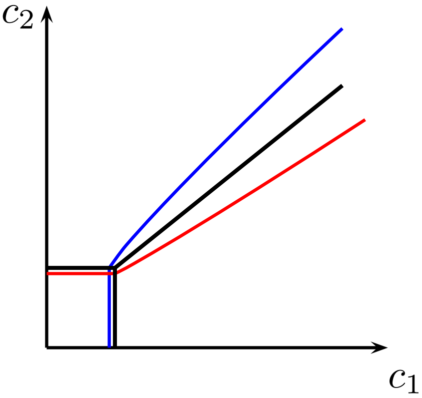
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite



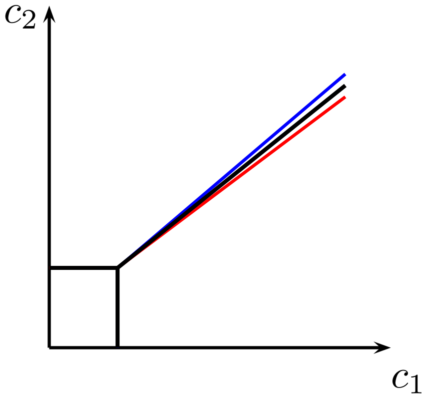
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite



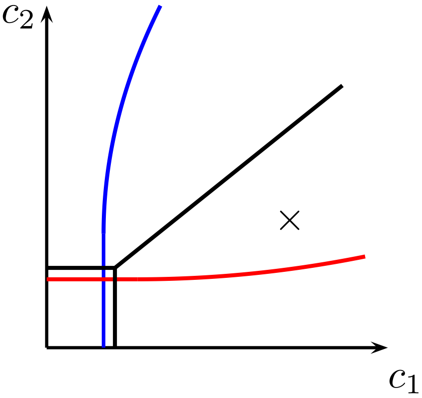
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite



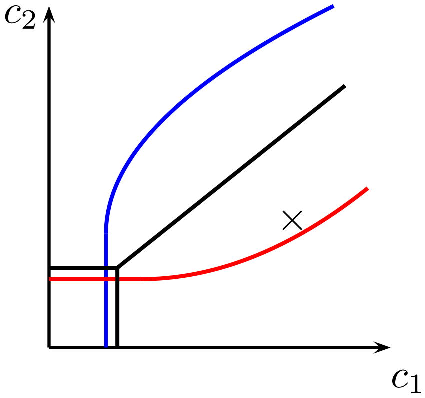
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite



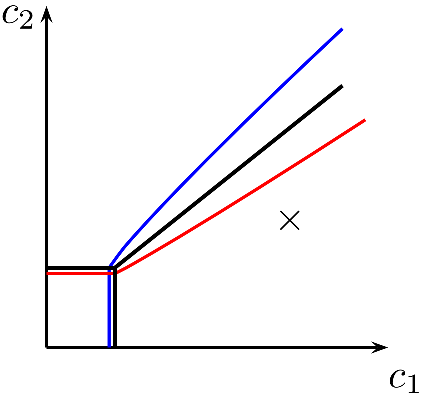
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite
- (c_1, c_2) fixé $\rightarrow$ seuil limite de diffusion



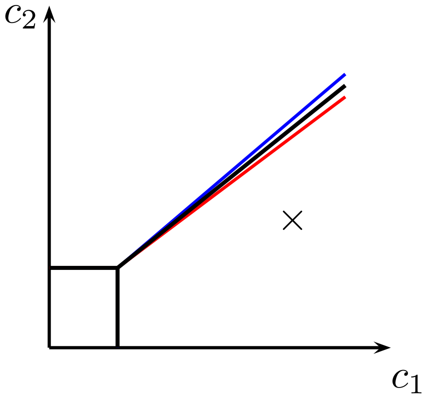
- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite
- (c_1, c_2) fixé $\rightarrow$ seuil limite de diffusion



- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite
- (c_1, c_2) fixé $\rightarrow$ seuil limite de diffusion



- **Diffusion tendant vers** $+\infty$ Problème agrégé (stationnaire) $\rightarrow c_1^* = \alpha c_2^*$
- Convergence du domaine vers cette droite
- (c_1, c_2) fixé $\rightarrow$ seuil limite de diffusion



Résultats

- Obtention de solutions positives de coexistence dans le Chemostat non homogène
- Construction valable pour N espèces
- Obtention de seuils critiques calculables numériquement caractérisant la possibilité de coexistence

Résultats

- Obtention de solutions positives de coexistence dans le Chemostat non homogène
- Construction valable pour N espèces
- Obtention de seuils critiques calculables numériquement caractérisant la possibilité de coexistence

Perspectives

- Simulations de scénarii biologiquement réalistes et interprétation des résultats (influence des différents paramètres et de la géométrie)
- Unicité ?
- Liens avec le système d'évolution (stabilité, convergence vers cette solution ...)

Merci de votre attention