Quelle est la forme optimale d'un tuyau ?

Yannick Privat

IRMAR - ENS Cachan Bretagne - Univ. Rennes 1

12 Novembre 2009

Qui a raison ?

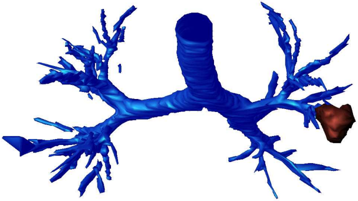


FIGURE: L'exemple d'un pipeline et de l'arbre bronchique

Plan de l'exposé

Principe de modélisation inverse

Question

Les formes présentes dans la Nature tentent-elles d'optimiser un certain critère ?

- On considère un organe ou une partie du corps humain.
- On écrit un modèle mathématique (par exemple une EDP) traduisant le comportement de cet organe.
- On imagine un critère (numérique) que la Nature pourrait vouloir optimiser.
- On résout le problème d'optimisation de formes correspondant.
- On compare avec les formes réelles.

Problèmes d'optimisation de forme

Comment les définir ?

- Choix d'un modèle, par exemple une EDP qui permet d'analyser physiquement le comportement d'une structure.
- Choix d'un critère (ou fonction objectif), à minimiser ou maximiser.
- Choix d'un ensemble de formes admissibles, tenant compte d'éventuelles contraintes.

Exemple : le problème du cantilever (minimisation de la compliance, représentant le travail des forces extérieures exercées sur le solide, sous contrainte de volume).

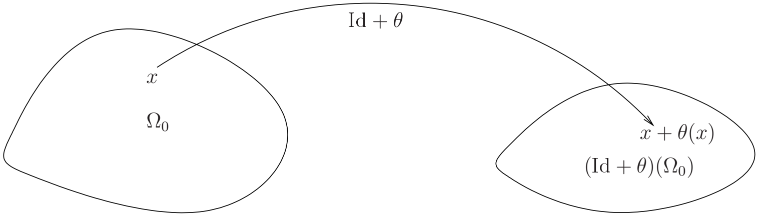
Les outils : dérivation par rapport au domaine (1)

$\longrightarrow$ Murat-Simon, Sokolowski-Zolésio, etc.

Soit Ω_0, un domaine de référence. On considère des perturbations du type :

$$\Omega_\theta := (\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0), \text{ avec } \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

$\longrightarrow$ Si $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} < 1$, $\mathrm{Id} + \theta$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$.



Les outils : dérivation par rapport au domaine (2)

Définition.

La dérivée d'une fonction $\Omega \longmapsto J(\Omega)$ par rapport au domaine est le différentielle au sens de Fréchet, en 0 de l'application :

$$\theta \longmapsto J(\Omega_\theta) = J\left((\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)\right).$$

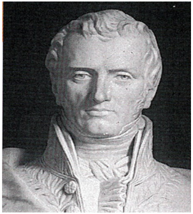
Exemple. Si Ω est un ouvert borné de classe C^2 (ou convexe) et si $\lambda_k(\Omega)$ ($k^{\text{ème}}$ valeur propre du Laplacien-Dirichlet) est simple, alors :

$$\langle d\lambda_k(\Omega), \mathbf{V}\rangle = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma,$$

avec $\mathbf{V}$, une perturbation régulière du domaine.

Les modèles mathématiques et physiques (1)

- $\mathcal{U}$ = ensemble des ouverts simplement connexes de $\mathbb{R}^3$ dont l'entrée E et la sortie S sont fixées.
- On suppose que $\Omega \in \mathcal{U}$ est parcouru par un fluide newtonien incompressible visqueux, gouverné par les équations de Navier-Stokes.
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ = vitesse du fluide et $p = p(x_1, x_2, x_3)$ = pression du fluide.



Les modèles mathématiques et physiques (2)

L'EDP

Le fluide est régi par l'EDP de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\triangle \mathbf{u} + \nabla p + \boxed{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \end{cases}$$

Conditions au bord

1. À l'entrée : on suppose connue la vitesse du fluide (profil parabolique).
2. Sur la paroi latérale : on impose une condition de non glissement (i.e. vitesse nulle sur le bord).
3. À la sortie : on impose une condition de contrainte normale.

Les modèles mathématiques et physiques (3)

Le critère

On définit :

- Tenseur des déformations : $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.
- Tenseur des contraintes de Cauchy : $\sigma(\mathbf{u}, p) = -pI_3 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})$.

Un critère raisonnable d'un point de vue physique est :

$$\boxed{J(\Omega) = 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x}.$$

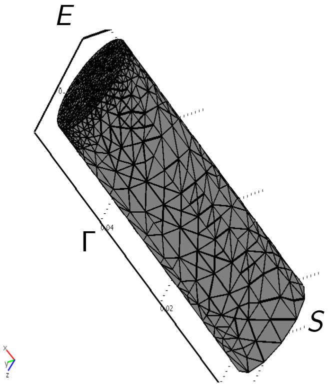
Les deux directions envisagées

1. **Une approche théorique. (collaboration avec Antoine Henrot)**
   Est-ce que le cylindre est une forme optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

2. **Une approche numérique. (collaboration avec Benjamin Mauroy)**
   Quelle forme doit-on donner à une bifurcation (par exemple la trachée et les bronches souches) pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

La forme optimale d'un tuyau

- **Une question naturelle :** est-ce que le cylindre minimise l'énergie de dissipation du fluide ?
- On considère un cylindre de longueur $L > 0$ et rayon $R > 0$.



Le cylindre est-il optimal ? (1)

L'EDP posée sur le cylindre

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p + \boxed{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u_0} & \mathbf{x}\in E \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in\Gamma \text{ (Non glissement)} \\ \sigma(\mathbf{u},p)\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S \text{ (flot normal)}, \end{cases}$$

avec :

- $\mathbf{u_0}$ = profil de vitesses parabolique ;
- $\sigma(\mathbf{u},p) = -pI_3 + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ = tenseur des contraintes.

Le cylindre est-il optimal ? (2)

On rappelle que :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx.$$

Théorème. Un résultat de non optimalité (A. Henrot, Y.P.)

Le cylindre n'est pas solution du problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \text{Vol}(\Omega) \text{ est fixé.} \end{cases}$$

Le cylindre est-il optimal ? (3)

Les grandes étapes de la preuve (1)

- **Étape 1 : calcul de la dérivée de forme.**
  On pose $f(t) = J((I + t\mathbf{V})\Omega)$, pour t petit et $\mathbf{V}$, un champ de vecteurs réguliers.
  La dérivée de forme du problème est :

$$f'(0) = \mathrm{d}J(\Omega, \mathbf{V}) = 2\mu \int_\Gamma \left(\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})\mathrm{d}x - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}\sigma,$$

où $\mathbf{v}$ est solution d'un problème adjoint ($\simeq$ Navier-Stokes linéarisé) :

$$(PA) \begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} + \nabla q = -2\mu\triangle\mathbf{u} & \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in E \cup \Gamma \\ \sigma(\mathbf{v}, q)\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - 4\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in S. \end{cases}$$

Le cylindre est-il optimal ? (4)

Les grandes étapes de la preuve (2)

- **Étape 2 : Analyse mathématique du problème adjoint.**
  Un résultat de symétrie : il existe trois fonctions w, w_3 et $\tilde{q}$ t.q. $\forall(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$:
  - $v_i(x_1, x_2, x_3) = x_i w(r, x_3)$, $i \in \{1, 2\}$.
  - $v_3(x_1, x_2, x_3) = w_3(r, x_3)$,
  - $q(x_1, x_2, x_3) = \tilde{q}(r, x_3)$.

  De plus,

$$\boxed{(\mathbf{v}, q) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}).}$$

Le cylindre est-il optimal ? (5)

Les grandes étapes de la preuve (3)

- **Étape 3 : condition d'optimalité.**
  On utilise le résultat de symétrie précédent.
  Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{d}J(\Omega, \mathbf{V}) = \lambda \int_{\Gamma} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

qui se réécrit :

$$\boxed{\frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma}.$$

Le cylindre est-il optimal ? (5)

Les grandes étapes de la preuve (3)

- **Étape 4 : Conclusion.** On introduit les fonctions :

$$w_0(r,x_3) := \int_0^{x_3} w(r,z)\mathrm{d}z \text{ et } \psi(z) = \int_{\Gamma_z} (\tilde{q} - 2cr^2 w_0) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Lemme

La fonction ψ est affine.

Idée de la preuve. On applique l'opérateur de divergence à l'EDP :

$$-\mu\triangle\mathbf{v} + \nabla q + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = -2\mu\triangle\mathbf{u},$$

puis, on intègre sur une tranche du cylindre.

Le cylindre est-il optimal ? (6)

Les grandes étapes de la preuve (4)

Ingrédients pour conclure :

- $\longrightarrow$ Le couple $(\mathbf{v}, q)$ est $C^1 \times C^0$ dans $\overline{\Omega}$.
- $\longrightarrow$ On intègre l'EDP donnant v_3 séparemment sur E et sur S.
- $\longrightarrow$ On utilise la condition surdéterminée $\frac{\partial v_3}{\partial n} = 0$ sur Γ.

On obtient :

$$\boxed{\psi'(L) = -16\mu c\pi R^2} \text{ et } \boxed{\psi'(0) = -8\mu c\pi R^2}.$$

ψ est affine, donc c'est absurde !

Extension du résultat précédent

Théorème. (A. Henrot, Y.P.)

Le cylindre n'est optimal :

- ni pour un système de Navier-Stokes, en 2D et en 3D ;
- ni pour un système de Stokes, en 2D et en 3D.

$\longrightarrow$ Une question naturelle : l'optimum est-il à symétrie cylindrique ?

Symétries de l'optimum (1)

Uniquement dans le cas d'un système de Stokes, on sait établir le :

Théorème. (A. Henrot, Y.P.)

Il existe un domaine Ω minimisant l'énergie de dissipation sous contrainte de volume qui possède un plan de symétrie passant par les centres des disques E et S.

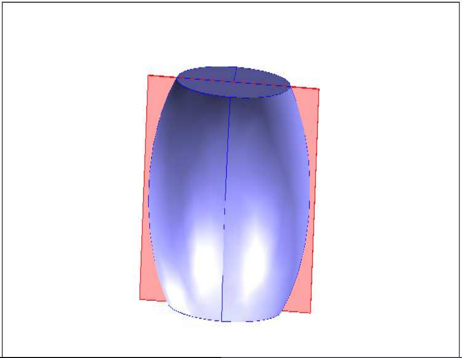
$\longrightarrow$ Un élément de réponse à la question : l'optimum est-il à symétrie cylindrique ?

G. Arumugam et O. Pironneau ont montré que dans le cas d'un régime de Poiseuille (flux proportionnel à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du conduit), on améliore le critère J en créant des riblets.

Symétries de l'optimum (2)

Soit Ω, une solution du problème d'optimisation de forme.

- **Étape 1 : Sélection d'un domaine de mesure $|\Omega|/2$.** L'existence est assurée, en balayant Ω à l'aide d'un plan passant par les centres des disques E et S.



Symétries de l'optimum (3)

- **Étape 2 : "Symétrisation" du domaine Ω.**

On a l'existence d'un plan coupant Ω en deux domaines de même mesure Ω_1 et Ω_2.

Si $\int_{\Omega_1} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx \leq \int_{\Omega_2} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx$, on pose :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mathbf{u}(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases} \quad \text{et } \widehat{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} p(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ p(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases}$$

où σ est la symétrie par rapport au plan coupant Ω en deux domaines de même mesure, et $\widehat{\Omega} = \Omega_1 \cup \sigma(\Omega_1)$.

Symétries de l'optimum (4)

- **Étape 3 : Conclusion.**

$$\begin{aligned} J(\widehat{\Omega}) &= \min_{\mathbf{u}|\mathrm{div}\mathbf{u}=0} \left(2\mu \int_{\widehat{\Omega}} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx \right) \\ &\leq 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} |\varepsilon(\widehat{\mathbf{u}})|^2 dx \\ &\leq J(\Omega) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $\widehat{\Omega}$ est admissible ($|\widehat{\Omega}| = |\Omega|$).
$\longrightarrow$ Les inégalités précédentes sont des égalités.

$\widehat{\Omega}$ minimise le critère J dans la classe des formes admissibles.

Symétries de l'optimum (5)

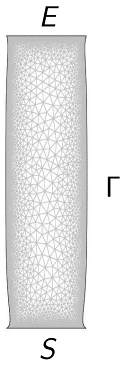
$\longrightarrow$ Peut-on prouver cette propriété pour tous les minimiseurs de ce problème ?
Oui, si le minimiseur Ω est $\mathcal{C}^2$ en utilisant l'analyticité des solutions du problème de Stokes.

Problèmes ouverts

- Quid du cas Navier-Stokes ? (La technique de "symétrisation" ne fonctionne pas *a priori*.)
- Peut-on montrer des propriétés de symétrie plus fortes dans les cas de Stokes et Navier-Stokes ?

Retour sur la forme optimale d'un tuyau

Confirmation numérique du résultat de non optimalité



Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (1)

Quel choix de modélisation ?

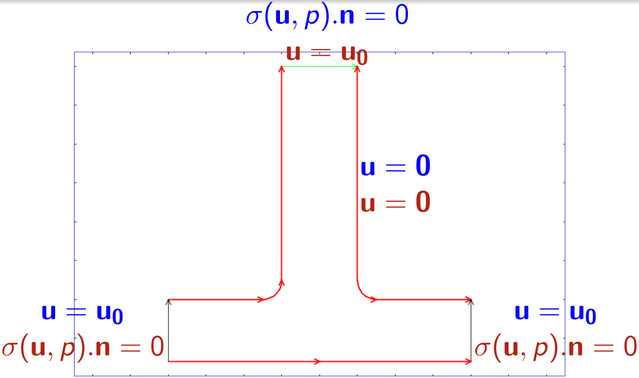


FIGURE: Les différentes conditions au bord envisageables

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (2)

Un algorithme de type Lagrangien augmenté

On se donne $\tau > 0$ et ε_{stop}.
On définit le Lagrangien augmenté du problème :

$$\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) = J(\Omega) + \mu\,(\text{mes }(\Omega) - V_0) + \frac{b}{2}\,(\text{mes }(\Omega) - V_0)^2.$$

Description de l'algorithme

$\longrightarrow$ **Initialisation.** On se fixe Ω_0 (initialisation de l'arbre) et $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ **Itération m : une méthode de gradient**

$\longrightarrow$ **Calcul de la direction de descente : $-\nabla\mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m)$.**

- Résolution du problème de Navier-Stokes (solution $\mathbf{u_m}$).
- Résolution du problème adjoint (solution $\mathbf{v_m}$).

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (3)

$\longrightarrow$ Détermination du déplacement $\mathbf{d_m}$. Nous choisissons $\mathbf{d_m}$ solution de :

$$\langle \mathbf{d_m}, \mathbf{w} \rangle_{H^1(\Omega_m)} = -\int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{w} ds, \ \forall \mathbf{w} \in B(\Omega_m),$$

avec $B(\Omega_m) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\mathbf{w} \in H^1(\Omega_m) \mid \mathbf{w}_{|_{E \cup S}} = 0\right\}$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathbf{d_m}, \mathbf{d_m} \rangle_{H^1(\Omega_m)} &= -\int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{d_m} ds \\ &= -\langle d\mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m), \mathbf{d_m} \rangle. \end{aligned}$$

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (4)

$\longrightarrow$ Détermination du domaine Ω_{m+1} : $\Omega_{m+1} = (I + \varepsilon_m \mathbf{d}_m)(\Omega_m)$.

$\longrightarrow$ Réinitialisation du multiplicateur de Lagrange :

$$\mu_{m+1} = \mu_m + \tau \left(\text{mes } (\Omega_{m+1}) - V_0\right)$$

$\longrightarrow$ Critère d'arrêt.

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (5)

Quelques résultats numériques

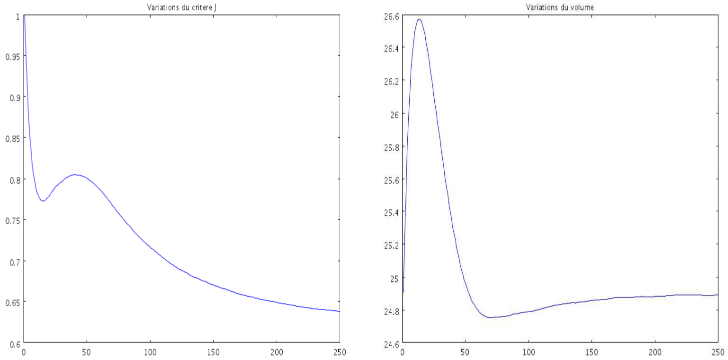
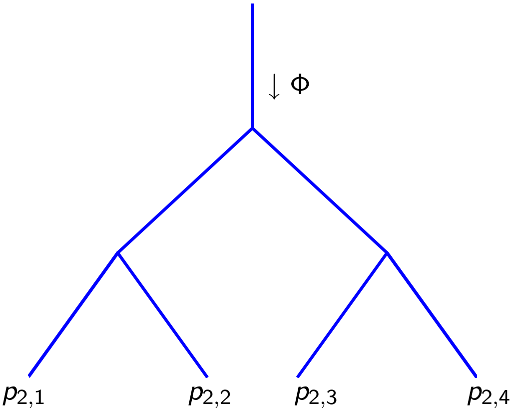


FIGURE: À droite, volume en fonction des itérations et à gauche, critère en fonction des itérations

Comment dissiper un fluide à travers un arbre ? (1)

- Cas d'un arbre traversé par un fluide Poiseuille (avec Xavier Dubois de la Sablonière, Supélec) : étude théorique du problème d'optimisation de forme. (existence d'une suite minimisante fermant toutes les branches de l'arbre sauf une)
- Cas d'un arbre traversé par un fluide Navier-Stokes (avec Benjamin Mauroy, CNRS) : étude numérique. (confirmation du résultat obtenu dans le cas Poiseuille)

Comment dissiper un fluide à travers un arbre ? (2)



$\longrightarrow$ un tube

FIGURE: Un exemple d'arbre dichotomique à trois générations

Perspectives (1)

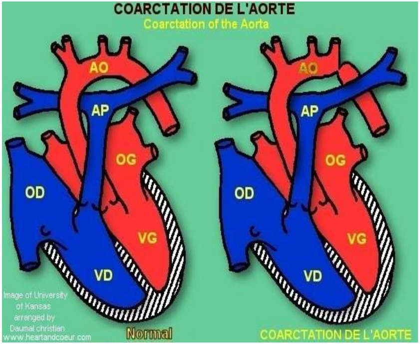
- Le conduit cylindrique serait-il optimal pour d'autres données raisonnables en entrée et en sortie ?
- L'étude d'un autre critère peut sembler intéressante :

$$J_1(\Omega) := \int_S p(s)\mathrm{d}s - \int_E p(s)\mathrm{d}s \text{ (perte de charge)}$$

  - Retrouve t-on la forme de l'arbre bronchique si l'on minimise ce critère dans une classe raisonnable ?
  - Également intéressant pour traiter des problèmes de design optimal (optimisation de la forme d'une pompe de fonds de puits).

Perspectives (2)

- $J_2(\Omega) := \int_{\partial\Omega} |\sigma(\mathbf{u}, p)|^2 \mathrm{d}x.$ (contraintes)
  Application au problème de la coarctation de l'aorte.
  $\Longrightarrow$ Travail en cours avec Benjamin MAUROY.



Merci de votre attention