

# Autour de la condition de transversalité dans la convergence de la solution de l'équation d'Helmholtz à haute fréquence

Aurélien Klak

Université de Rennes I

08 avril 2010

- 1 Introduction
  - Une petite modélisation
  - Hypothèses et Résultats
- 2 Point clé de la démonstration dans le cas transversal (Castella 2005)
- 3 Construction d'un exemple dans le cas limite

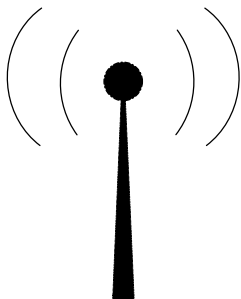
# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

- Une petite modélisation
- Hypothèses et Résultats

## 2 Point clé de la démonstration dans le cas transversal (Castella 2005)

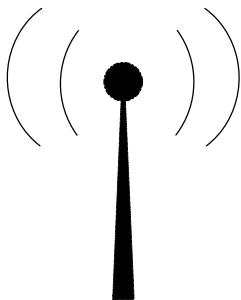
## 3 Construction d'un exemple dans le cas limite



$n^2$  : indice du milieu

$\alpha_\varepsilon$  : coefficient d'absorption

$a_\varepsilon$  : signal



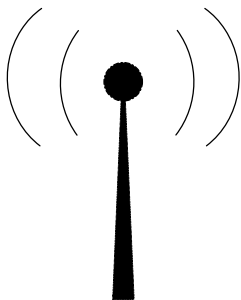
$n^2$  : indice du milieu

$\alpha_\varepsilon$  : coefficient d'absorption

$a_\varepsilon$  : signal

Le signal  $a_\varepsilon$  suit l'équation :

$$n^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_\varepsilon - \Delta_x a_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} a_\varepsilon = f_\varepsilon(x).$$



$n^2$  : indice du milieu

$\alpha_\varepsilon$  : coefficient d'absorption

$a_\varepsilon$  : signal

Le signal  $a_\varepsilon$  suit l'équation :

$$n^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_\varepsilon - \Delta_x a_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} a_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} S\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

**Ansatz**  $a_\varepsilon := u_\varepsilon e^{j\frac{t}{\varepsilon}}$ .

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon u^\varepsilon(x) + \frac{\varepsilon^2 \Delta_x}{2} u^\varepsilon(x) + n^2(x)u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} S\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1)$$

On fait le changement de variable  $u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . On obtient l'équation d'Helmholtz à basse fréquence :

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon w^\varepsilon(x) + \frac{\Delta_x}{2} w^\varepsilon(x) + n^2(\varepsilon x)w^\varepsilon(x) = S(x), \quad (2)$$

**Ansatz**  $a_\varepsilon := u_\varepsilon e^{j\frac{t}{\varepsilon}}$ .

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon u^\varepsilon(x) + \frac{\varepsilon^2 \Delta_x}{2} u^\varepsilon(x) + n^2(x)u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} S\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1)$$

On fait le changement de variable  $u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . On obtient l'équation d'Helmholtz à basse fréquence :

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon w^\varepsilon(x) + \frac{\Delta_x}{2} w^\varepsilon(x) + n^2(\varepsilon x)w^\varepsilon(x) = S(x), \quad (2)$$



**Ansatz**  $a_\varepsilon := u_\varepsilon e^{j\frac{t}{\varepsilon}}$ .

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon u^\varepsilon(x) + \frac{\varepsilon^2 \Delta_x}{2} u^\varepsilon(x) + n^2(x)u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} S\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1)$$

On fait le changement de variable  $u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . On obtient l'équation d'Helmholtz à basse fréquence :

$$i\varepsilon\alpha_\varepsilon w^\varepsilon(x) + \frac{\Delta_x}{2} w^\varepsilon(x) + n^2(\varepsilon x)w^\varepsilon(x) = S(x), \quad (2)$$

# But

- L'étude de la convergence lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.
- Comprendre l'hypothèse de transversalité des rayons.

# Hypothèses

- $\alpha_\varepsilon$  est une constante positive qui converge vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\alpha_\varepsilon \longrightarrow 0^+, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

- $n^2$  est une fonction positive. On suppose de plus que  $n^2$  satisfait :

$$|\partial_x^\alpha (n^2(x) - n_\infty^2)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho-\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

avec  $\rho > 0$  et  $n_\infty^2 \geq 0$ .

# Hypothèses

- $\alpha_\varepsilon$  est une constante positive qui converge vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\alpha_\varepsilon \longrightarrow 0^+, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

- $n^2$  est une fonction positive. On suppose de plus que  $n^2$  satisfait :

$$|\partial_x^\alpha (n^2(x) - n_\infty^2)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho-\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

avec  $\rho > 0$  et  $n_\infty^2 \geq 0$ .

## Résultat de convergence (Castella (2005))

**Sous des hypothèses sur le potentiel**, la solution  $w_\varepsilon$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  vers la solution de l'équation d'Helmholtz avec condition de radiation à l'infini :

$$i0^+ w_{out}(x) + \frac{\Delta_x}{2} w_{out} + n^2(0) w_{out}(x) = S(x),$$

i.e.

$$\begin{aligned} w_{out} &:= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( i\delta + \frac{\Delta_x}{2} + n^2(0) \right)^{-1} S(x) \\ &= i \int_0^{+\infty} e^{it(\frac{\Delta_x}{2} + n^2(0))} S(x) dt. \end{aligned}$$

## Idées de la preuve

Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

$$\langle w_\varepsilon, \phi \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle w_{out}, \phi \rangle.$$

En particulier,

$$\langle w_\varepsilon, \phi \rangle = \langle u_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= \left( i\varepsilon\alpha_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x + n^2(x) \right)^{-1} S_\varepsilon(x) \\ &= i \int_0^{+\infty} \exp \left( it \left( i\varepsilon\alpha_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x + n^2(x) \right) \right) S_\varepsilon dt. \end{aligned}$$

## Idées de la preuve-Notations

On peut définir le propagateur semi-classique :

$$U_\varepsilon(t) := \exp \left( i \frac{t}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta_x + n^2(x) \right) \right) = \exp \left( -i \frac{t}{\varepsilon} H_\varepsilon \right),$$

où  $H_\varepsilon$  est l'opérateur de Schrödinger semi-classique :

$$H_\varepsilon := -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta_x - n^2(x).$$

Alors,

$$\langle w_\varepsilon, \phi \rangle = \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

## Idées de la preuve-Notations

On peut définir le propagateur semi-classique :

$$U_\varepsilon(t) := \exp \left( i \frac{t}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta_x + n^2(x) \right) \right) = \exp \left( -i \frac{t}{\varepsilon} H_\varepsilon \right),$$

où  $H_\varepsilon$  est l'opérateur de Schrödinger semi-classique :

$$H_\varepsilon := -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta_x - n^2(x).$$

Alors,

$$\langle w_\varepsilon, \phi \rangle = \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$



# Décomposition de l'intégrale

On décompose l'intégrale suivant les différents scaling de temps :

$$0 \leq t \leq T_0\varepsilon, \quad T_0\varepsilon \leq t \leq T_1, \quad T_1 \leq t \leq +\infty.$$

## Hypothèse de non-capture $n^2$

On notera  $H := \frac{\Delta_x}{2} - n^2(x)$  de symbole classique  $h(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} - n^2(x)$ .

On définit le niveau d'énergie 0 :

$$H_0 := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \text{ s.t. } h(x, \xi) = 0\}.$$

### Définition

*Les trajectoires hamiltoniennes associées au potentiel  $n^2$  sont les courbes :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, x, \xi) = \Xi(t, x, \xi), & X(0, x, \xi) = x, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, x, \xi) = \nabla_x n^2(X(t, x, \xi)), & \Xi(0, x, \xi) = \xi, \end{cases} \quad (3)$$

### Définition

*On dit que le potentiel est non-captif (au niveau d'énergie 0) si pour tout  $(x, \xi) \in H_0$ ,*

$$|X(t, x, \xi)| \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

## Hypothèse de non-capture $n^2$

On notera  $H := \frac{\Delta_x}{2} - n^2(x)$  de symbole classique  $h(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} - n^2(x)$ .

On définit le niveau d'énergie 0 :

$$H_0 := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \text{ s.t. } h(x, \xi) = 0\}.$$

### Définition

*Les trajectoires hamiltoniennes associées au potentiel  $n^2$  sont les courbes :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, x, \xi) = \Xi(t, x, \xi), & X(0, x, \xi) = x, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, x, \xi) = \nabla_x n^2(X(t, x, \xi)), & \Xi(0, x, \xi) = \xi, \end{cases} \quad (3)$$

### Définition

*On dit que le potentiel est non-captif (au niveau d'énergie 0) si pour tout  $(x, \xi) \in H_0$ ,*

$$|X(t, x, \xi)| \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

## Hypothèse de non-capture $n^2$

On notera  $H := \frac{\Delta_x}{2} - n^2(x)$  de symbole classique  $h(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} - n^2(x)$ .

On définit le niveau d'énergie 0 :

$$H_0 := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \text{ s.t. } h(x, \xi) = 0\}.$$

### Définition

*Les trajectoires hamiltoniennes associées au potentiel  $n^2$  sont les courbes :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, x, \xi) = \Xi(t, x, \xi), & X(0, x, \xi) = x, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, x, \xi) = \nabla_x n^2(X(t, x, \xi)), & \Xi(0, x, \xi) = \xi, \end{cases} \quad (3)$$

### Définition

*On dit que le potentiel est non-captif (au niveau d'énergie 0) si pour tout  $(x, \xi) \in H_0$ ,*

$$|X(t, x, \xi)| \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

# Une condition de transversalité des rayons

On veut prévenir les accumulations d'énergie en 0 par des trajectoires Hamiltoniennes différentes.

J.F. Bony a montré la convergence de la mesure de Wigner associée à (1).  
Il impose une **condition de viriel** :

$$mes_{d-1} \{ \xi, (0, \xi) \in H_0; \exists t > 0 \quad X(t, 0, \xi) = 0 \} = 0.$$

# Une condition de transversalité des rayons

**On veut prévenir les accumulations d'énergie en 0 par des trajectoires Hamiltoniennes différentes.**

J.F. Bony a montré la convergence de la mesure de Wigner associée à (1).  
Il impose une condition de viriel :

$$mes_{d-1} \{ \xi, (0, \xi) \in H_0; \exists t > 0 \quad X(t, 0, \xi) = 0 \} = 0.$$

# Une condition de transversalité des rayons

On veut prévenir les accumulations d'énergie en 0 par des trajectoires Hamiltoniennes différentes.

J.F. Bony a montré la convergence de la mesure de Wigner associée à (1).  
Il impose une **condition de viriel** :

$$mes_{d-1} \{ \xi, (0, \xi) \in H_0; \exists t > 0 \quad X(t, 0, \xi) = 0 \} = 0.$$

# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

- Une petite modélisation
- Hypothèses et Résultats

## 2 Point clé de la démonstration dans le cas transversal (Castella 2005)

## 3 Construction d'un exemple dans le cas limite



Étude en temps petit :  $0 \leq t \leq T_0 \varepsilon$

### Proposition

Soit  $n^2(x)$  borné et continu. Si  $S$  et  $\phi$  appartiennent à  $S(\mathbb{R}^d)$  alors :

- $\forall T_0 > 0$  :

$$\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{2T_0 \varepsilon} \chi\left(\frac{t}{T_0 \varepsilon}\right) e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2T_0} \chi\left(\frac{t}{T_0}\right) \left\langle \exp\left(it\left(\frac{\Delta_x}{2} + n^2(0)\right)\right), \phi \right\rangle dt.$$

# Localisation en espace : près du niveau d'énergie 0

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue distance. Soit  $S$  et  $\phi$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Alors il existe une constante  $C_\delta > 0$ , qui dépend seulement de  $\delta$ , telle que pour tout  $\varepsilon \leq 1$  et  $T_0 \geq 0$  :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{+\infty} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle (1 - \chi_\delta(H_\varepsilon)) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon(t) \rangle dt \right| \leq C_\delta \left( \frac{1}{T_0} + \alpha_\varepsilon^2 \right).$$

## Clés de la démonstration

- Calcul symbolique
- Méthode de la phase stationnaire

# Localisation en espace : près du niveau d'énergie 0

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue distance. Soit  $S$  et  $\phi$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Alors il existe une constante  $C_\delta > 0$ , qui dépend seulement de  $\delta$ , telle que pour tout  $\varepsilon \leq 1$  et  $T_0 \geq 0$  :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{+\infty} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle (1 - \chi_\delta(H_\varepsilon)) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon(t) \rangle dt \right| \leq C_\delta \left( \frac{1}{T_0} + \alpha_\varepsilon^2 \right).$$

## Clés de la démonstration

- Calcul symbolique
- Méthode de la phase stationnaire

Contribution en temps grand :  $T_1 \leq t \leq +\infty$ 

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue distance. Soit  $S$  et  $\phi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Alors il existe  $\delta > 0$  et  $T_1(\delta)$  deux constantes telles que :

$\forall T_1 \geq T_1(\delta)$ , il existe une constante  $C_\delta$  telle que asymptotiquement :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_1}^{+\infty} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_1} \right) e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt \right| \leq C_\delta \varepsilon.$$

Clés de la démonstration

- Calcul symbolique : exprimer  $\chi_\delta(H_\varepsilon)$ .
- Étude du support de  $\varphi_\varepsilon$  : Son support est asymptotiquement proche de 0.
- Étude du support de  $\chi_\delta(H_\varepsilon) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon$  : il est supporté près des bicaractéristiques.

Contribution en temps grand :  $T_1 \leq t \leq +\infty$ 

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue distance. Soit  $S$  et  $\phi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Alors il existe  $\delta > 0$  et  $T_1(\delta)$  deux constantes telles que :

$\forall T_1 \geq T_1(\delta)$ , il existe une constante  $C_\delta$  telle que asymptotiquement :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_1}^{+\infty} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_1} \right) e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt \right| \leq C_\delta \varepsilon.$$

Clés de la démonstration

- Calcul symbolique : exprimer  $\chi_\delta(H_\varepsilon)$ .
- Étude du support de  $\varphi_\varepsilon$  : Son support est asymptotiquement proche de 0.
- Étude du support de  $\chi_\delta(H_\varepsilon) U_\varepsilon(t) S_\varepsilon$  : il est supporté près des bicaractéristiques.

Contribution en temps moyen :  $T_0\varepsilon \leq t \leq T_1$ 

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue distance non-captif.

On suppose que la condition de transversalité est vérifiée. Alors,

- ❶ Pour  $\theta$ ,  $T_1$  et  $\delta > 0$  :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\theta}^{T_1} \left(1 - \chi\left(\frac{t}{\theta}\right)\right) e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4)$$

- ❷ Pour  $\theta$  assez petit, il existe  $C_\theta > 0$  une constante telle que pour tout  $\varepsilon \leq 1$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{\theta} \chi\left(\frac{t}{T_0}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{t}{T_0\varepsilon}\right)\right) e^{-\alpha_\varepsilon t} \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt \\ \leq C_\delta T_0^{-d/2+1} \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (5)$$

## Démonstration dans le cas des temps moyens :

On veut estimer :

$$I_\varepsilon := \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

On note  $\tilde{\chi}_\delta(t) := e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right)$  pour simplifier :

$$I_\varepsilon = \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} \tilde{\chi}_\delta(t) \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

- Quelle est l'action de  $U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon$  ?

## Démonstration dans le cas des temps moyens :

On veut estimer :

$$I_\varepsilon := \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

On note  $\tilde{\chi}_\delta(t) := e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right)$  pour simplifier :

$$I_\varepsilon = \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} \tilde{\chi}_\delta(t) \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

- Quelle est l'action de  $U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon$  ?



## Démonstration dans le cas des temps moyens :

On veut estimer :

$$I_\varepsilon := \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

On note  $\tilde{\chi}_\delta(t) := e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right)$  pour simplifier :

$$I_\varepsilon = \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} \tilde{\chi}_\delta(t) \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

- Quelle est l'action de  $U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon$  ?

On ne sait pas faire dans le cas général!!

## Démonstration dans le cas des temps moyens :

On veut estimer :

$$I_\varepsilon := \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right) \langle U_\varepsilon(t) \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

On note  $\tilde{\chi}_\delta(t) := e^{-\alpha_\varepsilon t} (1 - \chi) \left( \frac{t}{T_0\varepsilon} \right)$  pour simplifier :

$$I_\varepsilon = \frac{i}{\varepsilon} \int_{T_0\varepsilon}^{T_1} \tilde{\chi}_\delta(t) \langle \chi_\delta(H_\varepsilon) S_\varepsilon, U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon \rangle dt.$$

- Quelle est l'action de  $U_\varepsilon(-t) \phi_\varepsilon$  ?

On sait faire sur les gaussiennes !!

# Introduction du paquet d'ondes

On définit :

$$\varphi_{q,p}^\varepsilon(x) := \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{d/4}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}p \cdot \left(x - \frac{q}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{(x-q)^2}{2\varepsilon}\right).$$

## Proposition

*La famille  $(\varphi_{q,p}^\varepsilon)_{q,p \in \mathbb{R}^2}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

## Quelques notations

- $T_\varepsilon(q_t, p_t)$  opérateur de localisation le long des trajectoires hamiltoniennes  $(q_t, p_t) = (X(t, x, \xi), \Xi(t, x, \xi))$

$$(T_\varepsilon(q_t, p_t)u)(x) = \varepsilon^{-d/4} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} p_t \cdot \left(\frac{x - \frac{q_t}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) u\left(\frac{x - q_t}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

- On définit la phase  $\delta(t, q, p)$  :

$$\delta(t, q, p) = \int_0^t \left(\frac{p_s^2}{2} + n^2(q_s)\right) ds - \frac{q_t \cdot p_t - p \cdot q}{2},$$

- On définit l'opérateur metaplectique  $M(F(t, q, p))$  associé à la matrice symplectique  $F(t, q, p)$ . Il agit sur les gaussiennes :

$$M(F(t, q, p)) \left( \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) \right) = \det(A(t, q, p) + iB(t, q, p))_c^{-1/2} \exp \left( i \frac{\Gamma(t, q, p)x \cdot x}{2} \right).$$

Finalement  $\Gamma(t, q, p)$  est définie par :

$$\Gamma(t, q, p) = (C(t, q, p) + iD(t, q, p))(A(t, q, p) + iB(t, q, p))^{-1}.$$

## Théorème (D. Robert, M. Combesure)

Soit  $n^2(x)$  un potentiel à longue portée. Il existe  $Q_N^\varepsilon(t, q, p, x)$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ , on a :

Pour tout  $T_1$ , pour tout entier  $N$  il existe  $C_{N, T_1}$  telle que pour tout  $t \in [0, T_1]$  :

$$\left\| U_\varepsilon(t) \varphi_{q,p}^\varepsilon - \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \psi(t, q, p)\right) T_\varepsilon \right. \\ \left. Q_N^\varepsilon(t, q, p, x) M(F(t, q, p)) (\pi^{-d/4} \exp(-x^2/2)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N, T_1} \varepsilon^N.$$

## Proposition

Soit  $n^2$  un potentiel à longue portée. Soient  $\chi_1(x, y)$  et  $\chi_0(q, p)$  vérifiant :

- $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $\chi_1 \equiv 1$  près de  $(0, 0)$ ,
- $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ ,

$$\begin{aligned} \text{supp } \chi_0(q, p) &\subset \{|x| \leq 2\delta\} \cup \{|\xi^2/2 - n^2(x)| \leq 2\delta\}, \\ \chi_0 &\equiv 1 \text{ on } \{|x| \leq 3/2\delta\} \cup \{|\xi^2/2 - n^2(x)| \leq 3/2\delta\}, \end{aligned}$$

On a :

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{(5d+2)/2}} \int_{T_{0\varepsilon}}^{T_1} \int_{\mathbb{R}^{6d}} e^{i\varepsilon \psi(x, y, \xi, \eta, q, p, t)} \widehat{S}(\xi) \widehat{\phi}^*(\eta) \chi_0(q, p) \chi_1(x, y) P_N \left( t, q, p, \frac{y - q_t}{\sqrt{\varepsilon}} \right) dt dX + O_{T_1, \delta}(\varepsilon^N),$$

où  $dX = dq dp dx dy d\xi d\eta$ .

## Proposition (suite)

$\psi$  est une phase complexe définie par :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, \xi, \eta, q, p, t) := & \int_0^t \left( \frac{p_s^2}{2} + n^2(q_s) \right) ds - p \cdot (x - q) + p_t \cdot (y - q_t) \\ & + x \cdot \xi - y \cdot \eta + i \frac{(x - q)^2}{2} + \frac{1}{2} \Gamma_t (x - q_t) \cdot (x - q_t) \quad (6) \end{aligned}$$



## Proposition (suite)

$\psi$  est une phase complexe définie par :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, \xi, \eta, q, p, t) := & \int_0^t \left( \frac{p_s^2}{2} + n^2(q_s) \right) ds - p \cdot (x - q) + p_t \cdot (y - q_t) \\ & + x \cdot \xi - y \cdot \eta + i \frac{(x - q)^2}{2} + \frac{1}{2} \Gamma_t(x - q_t) \cdot (x - q_t) \quad (6) \end{aligned}$$

⇒ On va appliquer une méthode de phase stationnaire à notre intégrale oscillante

## Proposition (suite)

$\psi$  est une phase complexe définie par :

$$\psi(x, y, \xi, \eta, q, p, t) := \int_0^t \left( \frac{p_s^2}{2} + n^2(q_s) \right) ds - p \cdot (x - q) + p_t \cdot (y - q_t) \\ + x \cdot \xi - y \cdot \eta + i \frac{(x - q)^2}{2} + \frac{1}{2} \Gamma_t(x - q_t) \cdot (x - q_t) \quad (6)$$

Si  $n^2$  est constant,  $\psi(t, \xi) = t \frac{\xi^2}{2}$ .

L'intégrale se comporte différemment dans la région près de  $t = 0$  et celle loin de 0 ( $t \neq 0$ ).

# Ensemble stationnaire

L'ensemble stationnaire est défini par :

$$M := \left\{ (x, y, \xi, \eta, q, p, t) \in \mathbb{R}^{6d+1}, \text{ s.t. } \nabla_{x,y,\xi,\eta,q,p,t} \psi(x, y, \xi, \eta, q, p, t) = 0 \right\}$$

# Ensemble stationnaire

L'ensemble stationnaire est défini par :

$$M := \left\{ (x, y, \xi, \eta, q, p, t) \in \mathbb{R}^{6d+1} \text{ s.t. } x = y = q = 0, \xi = p \right\} \\ \cap \left\{ (x, y, \xi, \eta, q, p, t) \in \mathbb{R}^{6d+1}, (t, p, \eta) \in \tilde{M} \right\},$$

$$\tilde{M} := \left\{ (t, p, \eta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^{2d} \text{ s.t. } \frac{\eta^2}{2} = n^2(0), X(t, 0, p) = 0, \right. \\ \left. \Xi(t, 0, p) = \eta \right\}.$$

# La phase est-elle dégénérée ?

On doit calculer la Hessienne de la phase pour  $m = (x, t, \xi, \eta, q, p, t) \in M$ .

# La phase est-elle dégénérée ?

On doit calculer la Hessienne de la phase pour  $m = (x, t, \xi, \eta, q, p, t) \in M$ .

on calcule....

# La phase est-elle dégénérée ?

On doit calculer la Hessienne de la phase pour  $m = (x, t, \xi, \eta, q, p, t) \in M$ .

on calcule....



# La phase est-elle dégénérée ?

On doit calculer la Hessienne de la phase pour  $m = (x, t, \xi, \eta, q, p, t) \in M$ .

$$\begin{aligned} \text{Ker}(D^2\psi|_m) = \{ & (X, Y, \Xi, H, Q, P, T), X = Y = Q = 0, \\ & \Xi = P, \eta^T H = 0, B_t P + T\eta = 0, -H + D_t P + T\nabla n^2(0) = 0\}, \end{aligned}$$



## Hypothèse de transversalité $H$

On suppose que l'ensemble stationnaire  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{6d} \times ]0, +\infty[$  satisfaisant :

- $k := \text{codim } M > 5d + 2$
- En tout point  $m \in M$ , le plan tangent à  $M$  en  $m$  est donné par la linéarisation des équations définissant  $M$ .

### Remarques :

- $T_m M = \text{Ker } D_{x,y,\xi,\eta,q,p,t}^2 \psi|_m, \quad \forall m \in M.$
- Si on note

$$\tilde{M} := \left\{ (p, \eta, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times ]0, +\infty[ \right. \\ \left. \text{s.t. } \frac{\eta^2}{2} = n^2(0), X(t, 0, p) = 0, \Xi(t, 0, p) = \eta \right\},$$

alors la condition sur la codimension se traduit par :

$$\text{codim } \tilde{M} > d + 1.$$

## Hypothèse de transversalité $H$

On suppose que l'ensemble stationnaire  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{6d} \times ]0, +\infty[$  satisfaisant :

- $k := \text{codim } M > 5d + 2$
- En tout point  $m \in M$ , le plan tangent à  $M$  en  $m$  est donné par la linéarisation des équations définissant  $M$ .

### Remarques :

- $T_m M = \text{Ker } D_{x,y,\xi,\eta,q,p,t}^2 \psi|_m, \quad \forall m \in M.$
- Si on note

$$\tilde{M} := \left\{ (p, \eta, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times ]0, +\infty[ \right. \\ \left. \text{s.t. } \frac{\eta^2}{2} = n^2(0), X(t, 0, p) = 0, \Xi(t, 0, p) = \eta \right\},$$

alors la condition sur la codimension se traduit par :

$$\text{codim } \tilde{M} > d + 1.$$

## Hypothèse de transversalité $H$

On suppose que l'ensemble stationnaire  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{6d} \times ]0, +\infty[$  satisfaisant :

- $k := \text{codim } M > 5d + 2$
- En tout point  $m \in M$ , le plan tangent à  $M$  en  $m$  est donné par la linéarisation des équations définissant  $M$ .

### Remarques :

- $T_m M = \text{Ker } D_{x,y,\xi,\eta,q,p,t}^2 \psi|_m, \quad \forall m \in M.$
- Si on note

$$\tilde{M} := \left\{ (p, \eta, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times ]0, +\infty[ \right. \\ \left. \text{s.t. } \frac{\eta^2}{2} = n^2(0), X(t, 0, p) = 0, \Xi(t, 0, p) = \eta \right\},$$

alors la condition sur la codimension se traduit par :

$$\text{codim } \tilde{M} > d + 1.$$

## Hypothèse de transversalité $H$

On suppose que l'ensemble stationnaire  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{6d} \times ]0, +\infty[$  satisfaisant :

- $k := \text{codim } M > 5d + 2$
- En tout point  $m \in M$ , le plan tangent à  $M$  en  $m$  est donné par la linéarisation des équations définissant  $M$ .

### Remarques :

- $T_m M = \text{Ker } D_{x,y,\xi,\eta,q,p,t}^2 \psi|_m, \quad \forall m \in M.$
- Si on note

$$\tilde{M} := \left\{ (p, \eta, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times ]0, +\infty[ \right. \\ \left. \text{s.t. } \frac{\eta^2}{2} = n^2(0), X(t, 0, p) = 0, \Xi(t, 0, p) = \eta \right\},$$

alors la condition sur la codimension se traduit par :

$$\text{codim } \tilde{M} > d + 1.$$

## Fin de la démonstration dans le cas transversale

Si on applique la méthode de la phase stationnaire on obtient que :

$$I_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{k-5d+2}{2}}\right).$$

L'hypothèse de transversalité des rayons implique que :

$$I_\varepsilon = o(1).$$

⇒ Que se passe-t-il si la condition de transversalité n'est pas vérifiée ?

## Fin de la démonstration dans le cas transversale

Si on applique la méthode de la phase stationnaire on obtient que :

$$I_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{k-5d+2}{2}}\right).$$

L'hypothèse de transversalité des rayons implique que :

$$I_\varepsilon = o(1).$$

⇒ Que se passe-t-il si la condition de transversalité n'est pas vérifiée ?

## Fin de la démonstration dans le cas transversale

Si on applique la méthode de la phase stationnaire on obtient que :

$$I_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{k-5d+2}{2}}\right).$$

L'hypothèse de transversalité des rayons implique que :

$$I_\varepsilon = o(1).$$

**⇒ Que se passe-t-il si la condition de transversalité n'est pas vérifiée ?**

# Plan de l'exposé

## 1 Introduction

- Une petite modélisation
- Hypothèses et Résultats

## 2 Point clé de la démonstration dans le cas transversal (Castella 2005)

## 3 Construction d'un exemple dans le cas limite



**But** : on va essayer de construire un potentiel dans le cas limite  
 $k = 5d + 2$ .

A-t-on encore convergence de la solution vers  $w_{out}$  ?

Comment faire ?

Il faut faire revenir beaucoup de rayons en 0

**But** : on va essayer de construire un potentiel dans le cas limite  $k = 5d + 2$ .

A-t-on encore convergence de la solution vers  $w_{out}$  ?

Comment faire ?

Il faut faire revenir beaucoup de rayons en 0

**But** : on va essayer de construire un potentiel dans le cas limite  
 $k = 5d + 2$ .

A-t-on encore convergence de la solution vers  $w_{out}$  ?

Comment faire ?

Il faut faire revenir beaucoup de rayons en 0

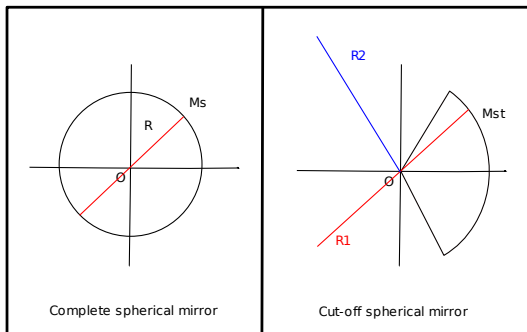
**But** : on va essayer de construire un potentiel dans le cas limite  
 $k = 5d + 2$ .

A-t-on encore convergence de la solution vers  $w_{out}$  ?

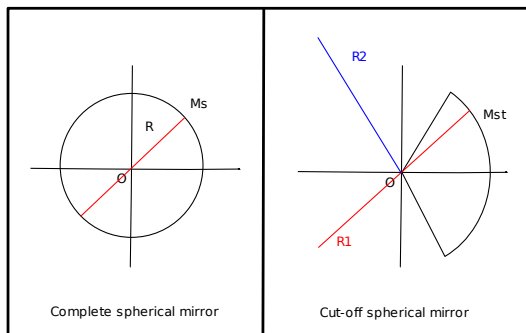
Comment faire ?

Il faut faire revenir beaucoup de rayons en 0

## Un peu d'optique....cas de la dimension 2



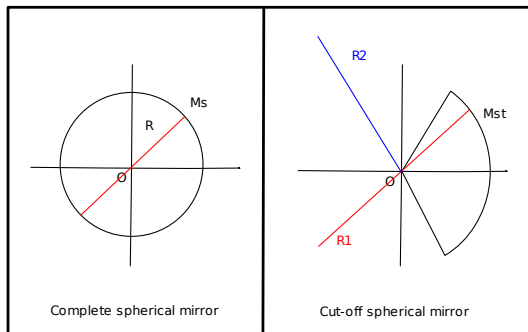
## Un peu d'optique....cas de la dimension 2



⇒ Problèmes :

- ① régularité du potentiel
- ②  $\tilde{M}$  serait une variété à bord dans ce cas.

## Un peu d'optique....cas de la dimension 2



⇒ Solutions :

- ① on va régulariser le potentiel
- ② Pas de solutions...

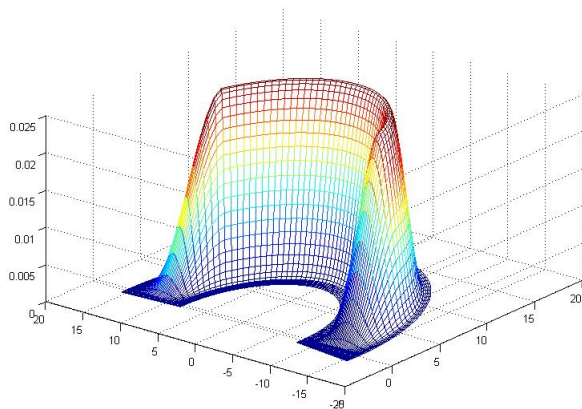


Figure:  $-n^2(x) + n_\infty^2$  en dimension  $d = 2$



# Propriétés du potentiel

## Proposition

- *Le potentiel est non-captif.*
- *Pour  $\lambda$  assez grand, l'ensemble stationnaire est :*

$$M := \{(x, y, \xi, \eta, q, p, t)\}$$

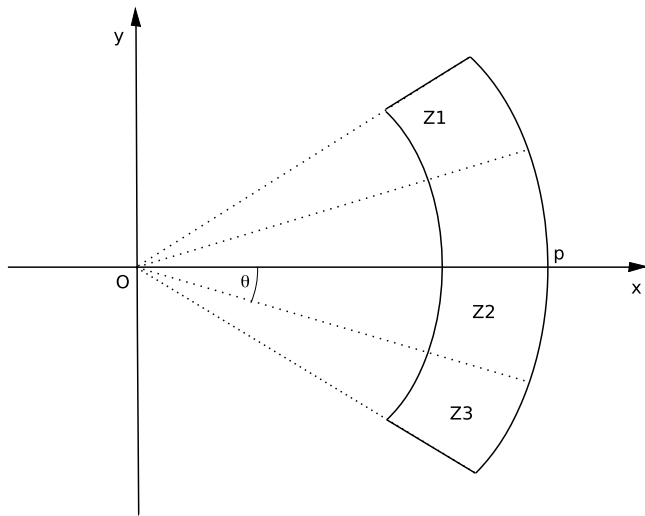
$$\text{s.t. } x = y = q = 0, \xi = p, \} \cap \{(x, y, \xi, \eta, q, p, t), (p, \eta, t) \in \tilde{M}\},$$

avec

$$\tilde{M} := \left\{ \eta = -p, t = T_R, p = (r, \theta_1), \frac{r^2}{2} = n^2(0), -\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_0 \right\}.$$

M est une variété à **bord** de dimension 2 (on est dans le cas limite).

## Idée de la preuve



calcul du plan tangent en  $m$  par rapport à  $\text{Ker } D^2\psi|_m$ ?

## Proposition

Soit  $m \in \overset{\circ}{M}$ .  $T_m M = \text{Ker}(D^2\psi|_m)$ .

Idées de la démonstration :

- Soit  $p_0 = (\sqrt{2n^2(0)}, 0)$ . Par symétrie on montre le résultat en  $m_0$  :

$$m_0 := (0, 0, p_0, -p_0, 0, p_0, T_R).$$

- Dans ce cas le plan tangent à  $m_0$  est :

$$T_{m_0} M = \{(X, Y, \Xi, H, Q, P, T), \\ \text{s.t. } X = Y = Q = T = 0, \Xi = P = -H, P \cdot p_0 = 0\}$$

- On calcule les linéarisés  $B$  et  $D$  il existe  $R \geq 0$  tel que :

$$D(T_R, 0, p_0) = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi}(T_R, 0, p_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$B(T_R, 0, p_0) = \frac{\partial X}{\partial \xi}(T_R, 0, p_0) = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $b_{11} \in \mathbb{R}$ .

- On calcule le noyau :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(D^2\psi |_{m_0}) = \{ & (X, Y, \Xi, H, Q, P, T), X = Y = Q = 0, \\ & \Xi = P, p_0^T H = 0, B_{T_R} P + T p_0 = 0, -H + D_{T_R} P + T \nabla n^2(0) = 0 \}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(D^2\psi |_{m_0}) = \{ & (X, Y, \Xi, H, Q, P, T), X = Y = Q = 0, \\ & \Xi = P, p_0^T H = 0, T = 0, H = -P \}. \end{aligned}$$

Contribution de  $I_\varepsilon$  dans le cas non-transversale

## Proposition

Soit  $n^2$  le potentiel construit. Soient  $\theta$ ,  $T_1$  et  $\delta > 0$ . Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  telle que :

$$\text{supp}(\widehat{\phi}^*) \subset \{t.x, \text{ s.t. } t > 0, x \in M_p\}.$$

Alors,

$$|J_\varepsilon^2 - L_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

avec

$$L_\varepsilon = C_{T_R, d} e^{\left( \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{T_R} \left( \frac{p_s^2}{2} + n^2(q_s) \right) ds \right)} \int_{I_\theta} \widehat{S}(p) \widehat{\phi}^*(-p) d\theta_1 \dots d\theta_{d-1},$$

Convergence de  $w_\varepsilon$  :

## Proposition

Soit  $n^2$  le potentiel construit. Soient  $\theta$ ,  $T_1$  et  $\delta$  trois constantes positives. Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  tel que

$$\text{supp}(\widehat{\phi}^*) \subset \{t.x, \text{ s.t. } t > 0, x \in M_p\}.$$

Alors

$$\left| \langle w_\varepsilon, \phi \rangle - \langle w_{out}, \phi \rangle - C_{T_R, d} L_\varepsilon \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Merci de votre attention.