

UN MODÈLE D'ÉCOULEMENT FLUIDE-PARTICULES AVEC ÉCHANGES D'ÉNERGIE

Benjamin BOUTIN



Journée d'Équipe
25 novembre 2010

UN MODÈLE D'ÉCOULEMENT FLUIDE-PARTICULES AVEC ÉCHANGES D'ÉNERGIE

Contexte et objet de cette étude :



Travail en collaboration avec T. GOUDON et P. LAFITTE,
au sein de l'équipe-projet SIMPAF.

Applications :

- Moteurs diesel, propulseurs (code KIVA II, Los Alamos)
- Ingénierie chimique, processus de décantation de polluants
- Fluides biomédicaux

Related works :

- Schéma préservant une asymptotique
- Décomposition micro/macro
- Transfert radiatif

JIN, DEGOND, LEMOU, [CARRILLO, GOUDON, LAFITTE]

- 1 MODÉLISATION
- 2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE
- 3 VERS UN SCHÉMA NUMÉRIQUE
- 4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

- 1 MODÉLISATION
- 2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE
- 3 VERS UN SCHÉMA NUMÉRIQUE
- 4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

Soumis uniquement à son déplacement propre le spray non-collisionnel est décrit par la densité microscopique des particules $f(t, x, v)$, satisfaisant à une équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Quantités macroscopiques déduites :

Densité macro. : $n = \int_{\mathbb{R}^N} f \, dv,$

Temperature : $\Theta_p = \frac{1}{Nn} \int_{\mathbb{R}^N} |v - V|^2 f \, dv,$

Vitesse macro. : $V = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^N} v f \, dv,$

Pression cinétique : $\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f \, dv,$

Flux de chaleur : $q = \int_{\mathbb{R}^N} v \frac{|v|^2}{2} f \, dv.$

Équations aux moments :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla_x \cdot (nV) = 0 \\ \partial_t (nV) + \nabla_x \cdot \mathbb{P} = 0, \\ \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f \, dv \right) + \nabla_x \cdot q = 0, \\ \partial_t q + \dots \end{cases}$$

Exemple canonique :

la maxwellienne $M(v)$

$$\frac{n(t, x)}{(2\pi\Theta_p(t, x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v - V(t, x)|^2}{2\Theta_p(t, x)}\right)$$

Soumis uniquement à son déplacement propre le spray non-collisionnel est décrit par la densité microscopique des particules $f(t, x, v)$, satisfaisant à une équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Quantités macroscopiques déduites :

Densité macro. : $n = \int_{\mathbb{R}^N} f \, dv,$

Temperature : $\Theta_p = \frac{1}{Nn} \int_{\mathbb{R}^N} |v - V|^2 f \, dv,$

Vitesse macro. : $V = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^N} v f \, dv,$

Pression cinétique : $\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f \, dv,$

Flux de chaleur : $q = \int_{\mathbb{R}^N} v \frac{|v|^2}{2} f \, dv.$

Équations aux moments :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla_x \cdot (nV) = 0 \\ \partial_t (nV) + \nabla_x \cdot \mathbb{P} = 0, \\ \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f \, dv \right) + \nabla_x \cdot q = 0, \\ \partial_t q + \dots \end{cases}$$

Exemple canonique :
la maxwellienne $M(v)$

$$\frac{n(t, x)}{(2\pi\Theta_p(t, x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v - V(t, x)|^2}{2\Theta_p(t, x)}\right)$$

Soumis uniquement à son déplacement propre le spray non-collisionnel est décrit par la densité microscopique des particules $f(t, x, v)$, satisfaisant à une équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Quantités macroscopiques déduites :

Densité macro. : $n = \int_{\mathbb{R}^N} f \, dv,$

Temperature : $\Theta_p = \frac{1}{Nn} \int_{\mathbb{R}^N} |v - V|^2 f \, dv,$

Vitesse macro. : $V = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^N} v f \, dv,$

Pression cinétique : $\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f \, dv,$

Flux de chaleur : $q = \int_{\mathbb{R}^N} v \frac{|v|^2}{2} f \, dv.$

Équations aux moments :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla_x \cdot (nV) = 0 \\ \partial_t (nV) + \nabla_x \cdot \mathbb{P} = 0, \\ \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f \, dv \right) + \nabla_x \cdot q = 0, \\ \partial_t q + \dots \end{cases}$$

Exemple canonique :

la maxwellienne $M(v)$

$$\frac{n(t, x)}{(2\pi\Theta_p(t, x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v - V(t, x)|^2}{2\Theta_p(t, x)}\right)$$

SPRAY : $f(t, x, v)$, VLASOV-FOKKER-PLANCK

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

FLUIDE AMBIANT : $(\rho, u, E)(t, x)$, EULER COMPRESSIBLE

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x p = 0 \\ \partial_t (\rho E) + \nabla_x \cdot ((\rho E + p)u) = 0 \end{cases}$$

Loi d'état : $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Couplage :

$$\mathcal{F} = \int_{\mathbb{R}^d} (v - u) f(t, x, v) dv = n(V - u),$$

$$\mathcal{G} = nV \cdot (V - u) + Nn(\Theta_p - \Theta).$$

Forces extérieures : $\nabla_x \Phi$

gravité, force centrifuge, champ électrique ou magnétique, ...

SPRAY : $f(t, x, v)$, VLASOV-FOKKER-PLANCK

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \nabla_v \cdot ((v - u)f + \Theta \nabla_v f)$$

FLUIDE AMBIANT : $(\rho, u, E)(t, x)$, EULER COMPRESSIBLE

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x p = \mathcal{F} \\ \partial_t (\rho E) + \nabla_x \cdot ((\rho E + p)u) = \mathcal{E} \end{cases}$$

Loi d'état : $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Couplage :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{\mathbb{R}^N} (v - u)f(t, x, v) \, dv = n(V - u), \\ \mathcal{E} &= nV \cdot (V - u) + Nn(\Theta_p - \Theta). \end{aligned}$$

Forces extérieures : $\nabla_x \Phi$

gravité, force centrifuge, champ électrique ou magnétique, ...

SPRAY : $f(t, x, v)$, VLASOV-FOKKER-PLANCK

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \nabla_v \cdot ((v - u)f + \Theta \nabla_v f) - \eta_p \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v f$$

FLUIDE AMBIANT : $(\rho, u, E)(t, x)$, EULER COMPRESSIBLE

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x p = \mathcal{F} - \eta_f \rho \nabla_x \Phi \\ \partial_t (\rho E) + \nabla_x \cdot ((\rho E + p)u) = \mathcal{E} - \eta_f \rho u \cdot \nabla_x \Phi \end{cases}$$

Loi d'état : $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Couplage :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{\mathbb{R}^N} (v - u)f(t, x, v) \, dv = n(V - u), \\ \mathcal{E} &= nV \cdot (V - u) + Nn(\Theta_p - \Theta). \end{aligned}$$

Forces extérieures : $\nabla_x \Phi$

gravité, force centrifuge, champ électrique ou magnétique, ...

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

L'énergie totale du système fluide+particules est conservée :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho E \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f \, dv \, dx \right) = 0.$$

où l'entropie du fluide est définie comme suit $S = -\frac{R}{\gamma-1} \ln(\rho \rho^{-\gamma})$.

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

L'énergie totale du système fluide+particules est conservée :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho E \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f \, dv \, dx \right) = 0.$$

DÉCROISSANCE DE L'ENTROPIE

L'entropie totale du système fluide+particules est dissipée :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho S \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f \ln f \, dv \, dx \right) = \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sqrt{\Theta} \frac{\nabla f}{\sqrt{f}} + \frac{v - V}{\sqrt{\Theta}} \sqrt{f} \right)^2 \, dv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{|V - u|^2}{\Theta} \, dv \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

où l'entropie du fluide est définie comme suit $S = -\frac{R}{\nu-1} \ln(\rho \rho^{-\nu})$.

SYSTÈME P^ϵ :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x f^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla_v \cdot ((v - \epsilon u^\epsilon) f^\epsilon + \Theta^\epsilon \nabla_v f^\epsilon), \\ \partial_t \rho^\epsilon + \nabla_x \cdot (\rho^\epsilon u^\epsilon) = 0, \\ \partial_t (\rho^\epsilon u^\epsilon) + \nabla_x \cdot (\rho^\epsilon u^\epsilon \otimes u^\epsilon) + \nabla_x p^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} n^\epsilon (V^\epsilon - \epsilon u^\epsilon), \\ \partial_t (\rho^\epsilon E^\epsilon) + \nabla_x \cdot ((\rho^\epsilon E^\epsilon + p^\epsilon) u^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} (n^\epsilon V^\epsilon (V^\epsilon - \epsilon u^\epsilon) + N n^\epsilon (\Theta_p^\epsilon - \Theta^\epsilon)), \end{cases}$$

$$J^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v}{\epsilon} f^\epsilon \, dv, \quad q^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v}{\epsilon} \frac{|v|^2}{2} f^\epsilon \, dv.$$

De l'équation de VFP, on peut dériver des équations aux moments pour les quantités macroscopiques :

$$\begin{cases} \partial_t n^\epsilon + \nabla_x \cdot J^\epsilon = 0, \\ \epsilon^2 \partial_t J^\epsilon + \nabla_x \cdot \mathbb{P}^\epsilon = -J^\epsilon + n^\epsilon u^\epsilon, \\ \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f^\epsilon \, dv \right) + \nabla_x \cdot q^\epsilon = N n^\epsilon \frac{\Theta^\epsilon - \Theta_p^\epsilon}{\epsilon^2} + J^\epsilon \cdot \left(u^\epsilon - \frac{J^\epsilon}{n^\epsilon} \right), \\ \dots \end{cases}$$

Elles serviront de base à l'identification de la limite P de P^ϵ .

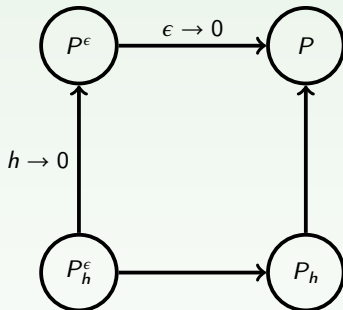
Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on s'attend aux relaxations suivantes :

$$\begin{aligned} V^\epsilon(t, x) &\sim \epsilon u^\epsilon(t, x), \\ \Theta_p^\epsilon(t, x) &\sim \Theta^\epsilon(t, x), \\ f^\epsilon(t, x, v) &\rightarrow \frac{n(t, x)}{(2\pi\Theta(t, x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2\Theta(t, x)}\right). \end{aligned}$$

[CARRILLO, GOUDON] : stabilité non-linéaire des équilibres maxwelliens pour le cas sans température.

Preuve de convergence hors de portée ? (manque de compacité pour les termes non-linéaires)

[Shi JIN]

**Enjeu :**

Pouvoir résoudre non seulement le modèle limite P mais également le modèle plus riche P^ϵ tout en assurant le passage à la limite vers P numériquement.

Utilisation de « **caractéristiques** » du modèle P (fluide) pour réduire le coût de calcul numérique du modèle P^ϵ (mixte fluide/cinétique).

~ stabilité de P_h^ϵ uniforme en ϵ

- 1 MODÉLISATION
- 2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE**
- 3 VERS UN SCHÉMA NUMÉRIQUE
- 4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

EN QUÊTE DE LA LIMITE P (FORMELLEMENT)

Supposons que $f^\epsilon(t, x, v) \rightarrow n(t, x)M_{\Theta(t, x)}(v)$.

Reprenons le système aux moments hérité de VFP :

$$\begin{cases} \partial_t n^\epsilon + \nabla_x \cdot J^\epsilon = 0, \\ \epsilon^2 \partial_t J^\epsilon + \nabla_x \cdot \mathbb{P}^\epsilon = -J^\epsilon + n^\epsilon u^\epsilon, \\ \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{2} f^\epsilon \, dv \right) + \nabla_x \cdot q^\epsilon = N n^\epsilon \frac{\Theta^\epsilon - \Theta_P^\epsilon}{\epsilon^2} + J^\epsilon \cdot \left(u^\epsilon - \frac{J^\epsilon}{n^\epsilon} \right) \\ \epsilon^2 \partial_t q^\epsilon + \dots \end{cases}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$: $\nabla_x(n\Theta) = -J + nu$, ce qui permet d'identifier J et d'obtenir les première et troisième équations ci-dessous :

LIMITE HYDRODYNAMIQUE P :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla_x \cdot (nu - \nabla_x(n\Theta)) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + p\mathbb{I}) = -\nabla_x(n\Theta), \\ \partial_t \left(\rho E + \frac{N}{2} n\Theta \right) + \nabla_x \cdot \left((\rho E + p)u + \frac{N+2}{2} n\Theta u \right) = \frac{N+2}{2} \nabla_x \cdot (\Theta^2 \nabla_x n) + \frac{2(N+2)}{3} \nabla_x \cdot (n\Theta \nabla_x \Theta). \end{cases}$$

On peut procéder de manière analogue pour obtenir une fermeture pour q à la limite et en déduire l'équation portant sur l'énergie totale.

DÉVELOPPEMENT DE HILBERT

On cherche f^ϵ sous la forme suivante :

$$f^\epsilon(t, x, v) = n^\epsilon(t, x)M_{\Theta^\epsilon(t, x)}(v) + \epsilon r^\epsilon(t, x, v)$$

En injectant cette forme dans VFP, on obtient un système portant sur f^ϵ et sur r^ϵ qui s'écrit :

REFORMULATION MICRO/MACRO

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + v \cdot \nabla_x r^\epsilon + u \cdot \nabla_v r^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} f^\epsilon, \\ \partial_t r^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} r^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} M_{\Theta^\epsilon} S, \end{cases}$$

avec

$$S = v \cdot \left(-\nabla_x n^\epsilon + u \frac{n^\epsilon}{\Theta^\epsilon} + \frac{N}{2} \frac{n^\epsilon}{\Theta^\epsilon} \nabla_x \Theta^\epsilon \right) - v \frac{|v|^2}{2} \cdot \frac{n^\epsilon}{\Theta^{\epsilon 2}} \nabla_x \Theta^\epsilon.$$

La fluctuation r^ϵ converge vers

$$r = -vM_\Theta \cdot \left(\nabla_x n - u \frac{n}{\Theta} - \frac{N}{2} \frac{n}{\Theta} \nabla_x \Theta \right) - vM_\Theta \frac{1}{3} \left(\frac{|v|^2}{2} + (N+2)\Theta \right) \cdot \frac{n}{\Theta^2} \nabla_x \Theta.$$

Notamment,

$$J = nu - \nabla_x(n\Theta),$$

$$q = \frac{N+2}{2} n\Theta u - \frac{N+2}{2} \Theta^2 \nabla_x n - \frac{2(N+2)}{3} n\Theta \nabla_x \Theta.$$

En réutilisant les équations aux moments avec ces fermetures on retrouve alors bien le système limite P .

- 1 MODÉLISATION
- 2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE
- 3 VERS UN SCHÉMA NUMÉRIQUE**
- 4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

REFORMULATION MICRO/MACRO

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + v \cdot \nabla_x r^\epsilon + u \cdot \nabla_v r^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} f^\epsilon, \\ \partial_t r^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} r^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} M_{\Theta^\epsilon} S, \end{cases}$$

Étape cinétique : traitée par splitting

- ➊ Résolution de la partie raide par approximation des opérateurs $e^{\Delta t \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} / \epsilon^2}$,

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} f^\epsilon, \\ \partial_t r^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L}_{\Theta^\epsilon} r^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} M_{\Theta^\epsilon} S, \end{cases}$$

- ➋ Résolution de la partie transport :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + v \cdot \nabla_x r^\epsilon + u \cdot \nabla_v r^\epsilon = 0, \\ \partial_t r^\epsilon = 0. \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ AP

Un soin est apporté aux discrétisations choisies qui coïncident au mieux avec un schéma pour le modèle limite P lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

- ① Fluide : résolution de la partie Euler, avec un schéma Lagrange-projection [DESPRÉS, LAGOUTIÈRE]
Splitting pour gérer implicitement les termes raides.
- ② Spray : résolution de la partie Vlasov, via le développement asymptotique de la solution sous la forme

$$f^\epsilon(t, x, v) = n^\epsilon(t, x)M_{\Theta^\epsilon(t, x)}(v) + \epsilon r^\epsilon(t, x, v).$$

condition CFL parabolique : $\Delta t, \max(\Theta) \leq \frac{1}{2} \Delta x^2$

→ Sous-cyclage des étapes Vlasov dans une seule étape d'Euler.

- ① Fluide : résolution de la partie Euler, avec un schéma Lagrange-projection [DESPRÉS, LAGOUTIÈRE]
Splitting pour gérer implicitement les termes raides.

$$\text{condition CFL hyperbolique : } \Delta t_h \max |\lambda| \leq \Delta x$$

- ② Spray : résolution de la partie Vlasov, via le développement asymptotique de la solution sous la forme

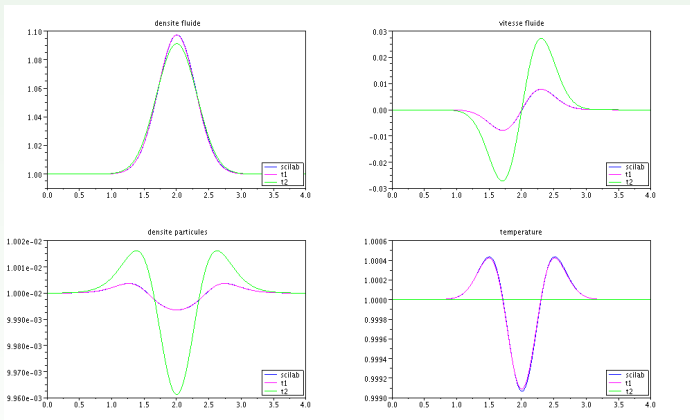
$$f^\epsilon(t, x, v) = n^\epsilon(t, x) M_{\Theta^\epsilon(t, x)}(v) + \epsilon r^\epsilon(t, x, v).$$

$$\text{condition CFL parabolique : } \Delta t_p \max(\Theta) \leq \frac{1}{2} \Delta x^2$$

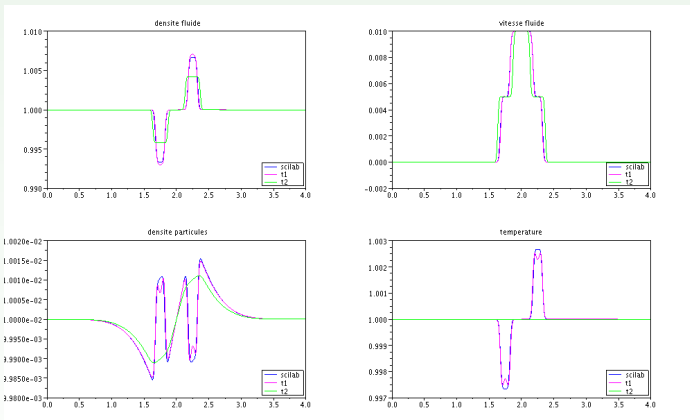
→ Sous-cyclage des étapes Vlasov dans une seule étape d'Euler.

- 1 MODÉLISATION
- 2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE
- 3 VERS UN SCHÉMA NUMÉRIQUE
- 4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES**

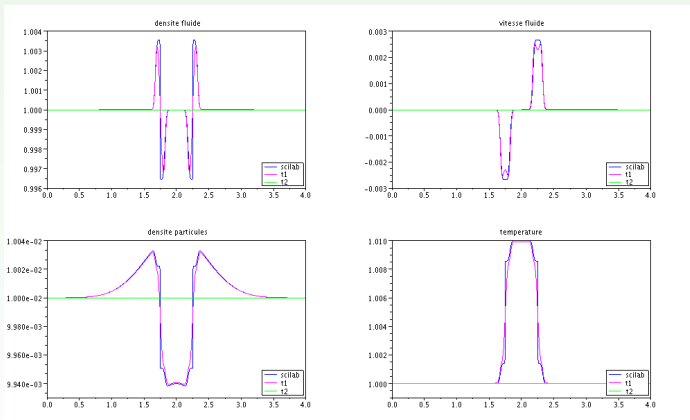
TESTS NUMÉRIQUES



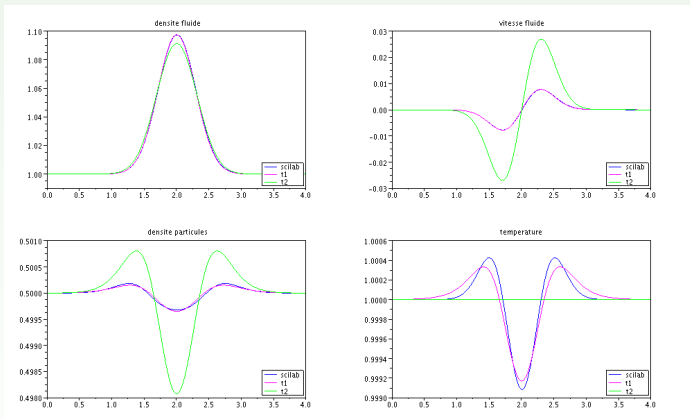
TESTS NUMÉRIQUES



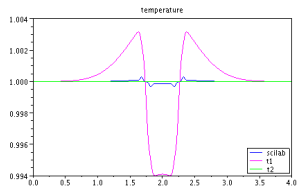
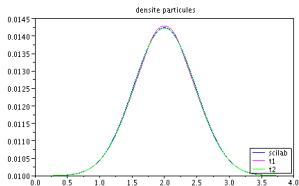
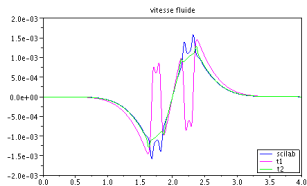
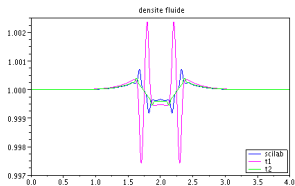
TESTS NUMÉRIQUES



MOINS SATISFAISANT



MOINS SATISFAISANT



- Comment assurer numériquement la conservation de l'énergie totale, malgré le traitement numérique splitté (prédiction-corréction ?)
- Identification des régimes de validité
- Relaxation en température et effets SORET et DUFOR ?
- En présence de gravité, régime de sédimentation et mise en défaut de la loi d'Einstein (diffusion % Θ)
- Analyse de la stabilité uniforme ?