Barrière critique de compacité en élasticité bidimensionnelle à renforcement unidirectionnel

Mohamed CAMAR-EDDINE

INSA de Rennes & IRMAR
France

(En collaboration avec Marc BRIANE)

8e Journée d'Équipe d'Analyse Numérique, IRMAR

- Ω est un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^2$.

- Ω est un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ est une suite de fonctions à valeurs dans l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 symétriques vérifiant, pour un certain $\alpha > 0$,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x)\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}.$$

- Ω est un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ est une suite de fonctions à valeurs dans l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 symétriques vérifiant, pour un certain $\alpha > 0$,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x)\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s.$$

- $\mathbf{f} \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

- Ω est un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ est une suite de fonctions à valeurs dans l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 symétriques vérifiant, pour un certain $\alpha > 0$,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x)\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}.$$

- $\mathbf{f} \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.
- On considère la suite de problèmes d'élasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases}$$

- Ω est un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^2$.
- $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ est une suite de fonctions à valeurs dans l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 symétriques vérifiant, pour un certain $\alpha > 0$,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x)\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \geq \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}.$$

- $\mathbf{f} \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$.
- On considère la suite de problèmes d'élasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

[B&C-E(2007)] Sous l'hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{L^1}) \text{ bornée}, & \text{dans le cas non périodique} \\ \text{ou} & \\ \varepsilon^2 \|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, & \text{dans le cas périodique}, \end{array} \right. \tag{1}$$

sur la suite des tenseurs d'élasticité $(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

[B&C-E(2007)] Sous l'hypothèse

$$\begin{cases} (\|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L}^1}) \text{ bornée,} & \text{dans le cas non périodique} \\ \text{ou} & \\ \varepsilon^2\|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L}^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, & \text{dans le cas périodique,} \end{cases} \tag{1}$$

sur la suite des tenseurs d'élasticité $(\mathbf{A}^{\varepsilon})$ le problème limite de

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon}) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

est de la forme

[B&C-E(2007)] Sous l'hypothèse

$$\begin{cases} (\|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{L^1}) \text{ bornée}, & \text{dans le cas non périodique} \\ \text{ou} & \\ \varepsilon^2 \|\mathbf{A}^{\varepsilon}\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, & \text{dans le cas périodique,} \end{cases} \tag{1}$$

sur la suite des tenseurs d'élasticité $(\mathbf{A}^{\varepsilon})$ le problème limite de

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon}) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u}^{\varepsilon} & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \end{cases}$$

est de la forme

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\mathrm{hom}}) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{hom}}\mathbf{e}(\mathbf{u})\right) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u} & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases}$$

[B&C-E(2007)] Sous l'hypothèse

$$\begin{cases} (\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1}) \text{ bornée}, & \text{dans le cas non périodique} \\ \text{ou} & \\ \varepsilon^2\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, & \text{dans le cas périodique,} \end{cases} \tag{1}$$

sur la suite des tenseurs d'élasticité $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ le problème limite de

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

est de la forme

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\mathrm{hom}}) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{hom}} \mathbf{e}(\mathbf{u})\right) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Un contre-exemple (du cas périodique) où

$$\varepsilon^2\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty, \tag{2}$$

[B&C-E(2007)] Sous l'hypothèse

$$\begin{cases} (\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1}) \text{ bornée}, & \text{dans le cas non périodique} \\ \text{ou} & \\ \varepsilon^2\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, & \text{dans le cas périodique,} \end{cases} \tag{1}$$

sur la suite des tenseurs d'élasticité $(\mathbf{A}^\varepsilon)$ le problème limite de

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

est de la forme

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\text{hom}}) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^{\text{hom}} \mathbf{e}(\mathbf{u})\right) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Un contre-exemple (du cas périodique) où

$$\varepsilon^2\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty, \tag{2}$$

montre que, contrairement à la conduction, une forte rigidité dans les fibres peut créer des dégénérescences dans le processus d'homogénéisation.

A la recherche d'une barrière critique en dessous de laquelle il y a compacité et au-delà de laquelle des dégénérescences apparaissent.

A la recherche d'une barrière critique en dessous de laquelle il y a compacité et au-delà de laquelle des dégénérescences apparaissent.

Plan de la suite de l'exposé

A la recherche d'une barrière critique en dessous de laquelle il y a compacité et au-delà de laquelle des dégénérescences apparaissent.

Plan de la suite de l'exposé

1) Résultat de compacité et identification de la barrière.

A la recherche d'une barrière critique en dessous de laquelle il y a compacité et au-delà de laquelle des dégénérescences apparaissent.

Plan de la suite de l'exposé

1) Résultat de compacité et identification de la barrière.

2) Optimalité de la barrière pour une classe de matériaux périodiques.

A la recherche d'une barrière critique en dessous de laquelle il y a compacité et au-delà de laquelle des dégénérescences apparaissent.

Plan de la suite de l'exposé

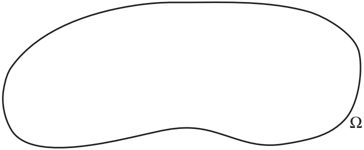
1) Résultat de compacité et identification de la barrière.

2) Optimalité de la barrière pour une classe de matériaux périodiques.

3) Influence des oscillations du milieu extérieur.

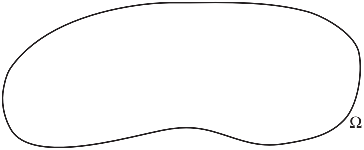
Conditions suffisantes de compacité

Conditions suffisantes de compacité

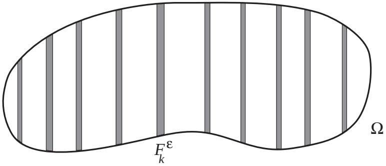


Un milieu homogène

Conditions suffisantes de compacité

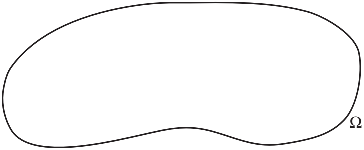


Un milieu homogène

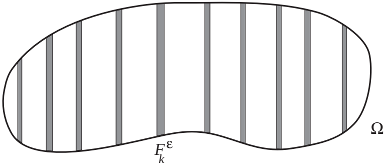


Le matériau composite

Conditions suffisantes de compacité



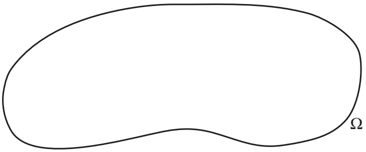
Un milieu homogène



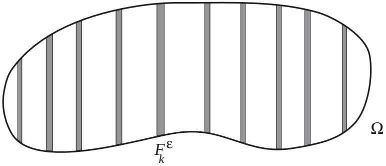
Le matériau composite

- F_k^ε est une bande rigide parallèle à l'axe (ox_2)

Conditions suffisantes de compacité



Un milieu homogène

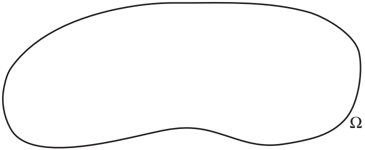


Le matériau composite

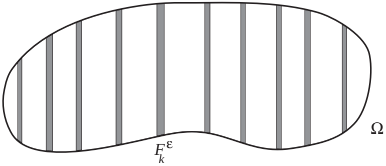
- F_k^ε est une bande rigide parallèle à l'axe (ox_2)
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ est la zone de renforcement isotrope de tenseur d'élasticité

$$\mathbf{B}^\varepsilon(x) = 2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Conditions suffisantes de compacité



Un milieu homogène



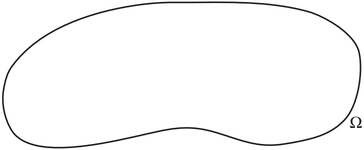
Le matériau composite

- F_k^ε est une bande rigide parallèle à l'axe (ox_2)
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ est la zone de renforcement isotrope de tenseur d'élasticité

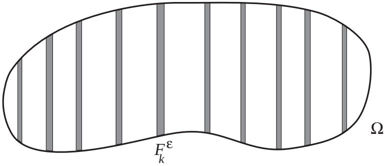
$$\mathbf{B}^\varepsilon(x) = 2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

- $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$ matériau élastique homogène de tenseur d'élasticité $\mathbf{A}$

Conditions suffisantes de compacité



Un milieu homogène



Le matériau composite

- F_k^ε est une bande rigide parallèle à l'axe (ox_2)
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ est la zone de renforcement isotrope de tenseur d'élasticité

$$\mathbf{B}^\varepsilon(x) = 2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

- $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$ matériau élastique homogène de tenseur d'élasticité $\mathbf{A}$
- Ω est occupé par un matériau élastique hétérogène de tenseur d'élasticité

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \mathbf{B}^\varepsilon(x)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Conditions suffisantes de compacité (suite)

Conditions suffisantes de compacité (suite)

$(H1)$ Le second coefficient de Lamé μ_ε des bandes rigides F_k^ε

- est non borné dans $L^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,dx_1 = \infty,$$

Conditions suffisantes de compacité (suite)

$(H1)$ Le second coefficient de Lamé μ_ε des bandes rigides F_k^ε

- est non borné dans $L^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1 = \infty,$$

- vérifie une condition de rigidité uniforme

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\bar{\mu}_\varepsilon} \rightharpoonup \sigma \quad * \text{ faiblement dans } \mathcal{M}([0,1]), \quad \text{où} \quad \bar{\mu}_\varepsilon := \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1,$$

Conditions suffisantes de compacité (suite)

$(H1)$ Le second coefficient de Lamé μ_ε des bandes rigides F_k^ε

- est non borné dans $L^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1 = \infty,$$

- vérifie une condition de rigidité uniforme

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\bar{\mu}_\varepsilon} \rightharpoonup \sigma \quad * \text{ faiblement dans } \mathcal{M}([0,1]), \quad \text{où} \quad \bar{\mu}_\varepsilon := \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1,$$

(Pour le cas périodique $\mu_\varepsilon(x_1) = \mu_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$, où $\mu_\varepsilon^\sharp$ est 1-periodique, on a $\sigma = 1$).

Conditions suffisantes de compacité (suite)

$(H1)$ Le second coefficient de Lamé μ_ε des bandes rigides F_k^ε

- est non borné dans $L^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1 = \infty,$$

- vérifie une condition de rigidité uniforme

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\bar{\mu}_\varepsilon} \rightharpoonup \sigma \quad * \text{ faiblement dans } \mathcal{M}([0,1]), \quad \text{où} \quad \bar{\mu}_\varepsilon := \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, dx_1,$$

(Pour le cas périodique $\mu_\varepsilon(x_1) = \mu_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$, où $\mu_\varepsilon^\sharp$ est 1-periodique, on a $\sigma = 1$).

$(H2)$ Existence d'une suite (ψ_ε) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant

Conditions suffisantes de compacité (suite)

$(H1)$ Le second coefficient de Lamé μ_ε des bandes rigides F_k^ε

- est non borné dans $L^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,dx_1 = \infty,$$

- vérifie une condition de rigidité uniforme

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\bar{\mu}_\varepsilon} \rightharpoonup \sigma \quad * \text{ faiblement dans } \mathcal{M}([0,1]), \quad \text{où} \quad \bar{\mu}_\varepsilon := \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,dx_1,$$

(Pour le cas périodique $\mu_\varepsilon(x_1) = \mu_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$, où $\mu_\varepsilon^\sharp$ est 1-periodique, on a $\sigma = 1$).

$(H2)$ Existence d'une suite (ψ_ε) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 & \text{fortement dans } \mathrm{H}^1(\Omega), \\ \nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1 & \text{p.p. dans } F_\varepsilon. \end{cases}$$

Théorème (B&C-E)

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$*,*

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, et pour tout* $i \in \{1, 2\}$*, on a l'estimation*

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, et pour tout* $i \in \{1, 2\}$*, on a l'estimation*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx = \int_\Omega \mathbf{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla \varphi)\, dx + o(1),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, et pour tout* $i \in \{1, 2\}$*, on a l'estimation*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx = \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Si, en plus de (H1)-(H2), on suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi^2_\varepsilon(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0,$$

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, et pour tout* $i \in \{1, 2\}$*, on a l'estimation*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx = \int_\Omega \mathbf{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Si, en plus de (H1)-(H2), on suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0,$$

alors u_1 *est la solution du problème limite*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_1 \nabla u_1) & = & f_1 & in & \Omega \\ u_1 & = & 0 & on & \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathbf{A}_1$ *est la matrice symétrique positive définie par*

Théorème (B&C-E)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), la solution $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du prolème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *converge faiblement vers un certain* $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *dans* $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$, *et pour tout* $i \in \{1, 2\}$, *on a l'estimation*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx = \int_\Omega \mathbf{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Si, en plus de (H1)-(H2), on suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi^2_\varepsilon(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0,$$

alors u_1 *est la solution du problème limite*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_1 \nabla u_1) & = & f_1 & \text{in} & \Omega \\ u_1 & = & 0 & \text{on} & \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathbf{A}_1$ *est la matrice symétrique positive définie par*

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{v} := \mathbf{A}\,(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{v})\, \mathbf{e}_1, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Quelques remarques

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x)\max\left(\mu_\varepsilon(x),\lambda_\varepsilon(x)+\mu_\varepsilon(x)\right)dx=0 \qquad (*)$$

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0 \qquad (*)$$

est plus faible que

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1} \leq c.$$

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0 \qquad (*)$$

est plus faible que

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1} \leq c.$$

Donc ce théorème est une extension du cas non périodique de [BC] à une classe plus large de tenseurs $\mathbf{A}^\varepsilon$.

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0 \qquad (*)$$

est plus faible que

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1} \le c.$$

Donc ce théorème est une extension du cas non périodique de [BC] à une classe plus large de tenseurs $\mathbf{A}^\varepsilon$.

(R2) La condition $(*)$ est **optimale** dans "le cas périodique".

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx = 0 \qquad (*)$$

est plus faible que

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1} \leq c.$$

Donc ce théorème est une extension du cas non périodique de [BC] à une classe plus large de tenseurs $\mathbf{A}^\varepsilon$.

(R2) La condition $(*)$ est **optimale** dans “le cas périodique”.

(R3) Identification du terme

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx$$

Quelques remarques

(R1) La condition

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x)\max\left(\mu_\varepsilon(x),\lambda_\varepsilon(x)+\mu_\varepsilon(x)\right)dx = 0 \qquad (*)$$

est plus faible que

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon\|_{L^1}\leq c.$$

Donc ce théorème est une extension du cas non périodique de [BC] à une classe plus large de tenseurs $\mathbf{A}^\varepsilon$.

(R2) La condition $(*)$ est **optimale** dans “le cas périodique”.

(R3) Identification du terme

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx$$

qui mesure l'apparition des dégénérescences dans le processus d'homogénéisation.

Idée de la preuve

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^{\varepsilon}$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^{\varepsilon}$

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^\varepsilon$ comme fonction test $+$ α-coercivité de $\mathbf{A}^\varepsilon$

$$\alpha \left\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)}\left\|\mathbf{u}^\varepsilon\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^\varepsilon$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^\varepsilon$

$$\alpha \left\| \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Poincaré + Korn $\Rightarrow$ $(\mathbf{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et donc converge faiblement vers un certain $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^\varepsilon$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^\varepsilon$

$$\alpha \left\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Poincaré + Korn $\Rightarrow$ $(\mathbf{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et donc converge faiblement vers un certain $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Preuve de $u_2 = 0$:

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^{\varepsilon}$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^{\varepsilon}$

$$\alpha \, \|\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)} \|\mathbf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Poincaré + Korn $\Rightarrow$ $(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et donc converge faiblement vers un certain $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Preuve de $u_2 = 0$:

$$v_{\varepsilon}(x_1) := \int_0^1 |u_2^{\varepsilon}(x_1,x_2)| \, dx_2 \text{ et } v(x_1) := \int_0^1 |u_2(x_1,x_2)| \, dx_2 \quad \text{p.p. } x_1 \in]0,1[.$$

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^\varepsilon$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^\varepsilon$

$$\alpha\,\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)}\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Poincaré + Korn $\Rightarrow$ $(\mathbf{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et donc converge faiblement vers un certain $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Preuve de $u_2 = 0$:

$$v_\varepsilon(x_1) := \int_0^1 |u_2^\varepsilon(x_1,x_2)|\,dx_2 \text{ et } v(x_1) := \int_0^1 |u_2(x_1,x_2)|\,dx_2 \quad \text{p.p. } x_1 \in]0,1[.$$

$v_\varepsilon \in \mathrm{H}^1_0(0,1)$ converge faiblement vers v dans $\mathrm{H}^1_0(0,1)$. La suite de fonctions continues (v_ε) converge uniformément vers v dans $]0,1[$.

Idée de la preuve

$\mathbf{u}^\varepsilon$ comme fonction test + α-coercivité de $\mathbf{A}^\varepsilon$

$$\alpha\,\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^{2\times 2}_s)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^2)}\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Poincaré + Korn $\Rightarrow$ $(\mathbf{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et donc converge faiblement vers un certain $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Preuve de $u_2 = 0$:

$$v_\varepsilon(x_1) := \int_0^1 |u_2^\varepsilon(x_1,x_2)|\,dx_2 \text{ et } v(x_1) := \int_0^1 |u_2(x_1,x_2)|\,dx_2 \quad \text{p.p. } x_1 \in]0,1[.$$

$v_\varepsilon \in \mathrm{H}^1_0(0,1)$ converge faiblement vers v dans $\mathrm{H}^1_0(0,1)$. La suite de fonctions continues (v_ε) converge uniformément vers v dans $]0,1[$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)v_\varepsilon(x_1)\,dx_1 &= \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\left(\int_0^1 |u_2^\varepsilon(x_1,x_2)|\,dx_2\right)dx_1\\ &\leq \left(\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,dx_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \mu_\varepsilon(x_1)\left|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \leq c\, \sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}):\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \leq c\,\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Par convergence uniforme de (v_ε) vers v

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \leq c\, \sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Par convergence uniforme de (v_ε) vers v

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 &= \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, (v_\varepsilon - v)(x_1)\, dx_1 + \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v(x_1)\, dx_1 \\ &\leq \bar{\mu}_\varepsilon\, o(1) + c\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \le c\,\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Par convergence uniforme de (v_ε) vers v

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 &= \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,(v_\varepsilon - v)(x_1)\, dx_1 + \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v(x_1)\, dx_1 \\ &\le \bar{\mu}_\varepsilon\, o(1) + c\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 v_\varepsilon(x_1)\,\frac{\mu_\varepsilon(x_1)}{\bar{\mu}_\varepsilon}\, dx_1 \le o(1) + \frac{c}{\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \leq c\, \sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Par convergence uniforme de (v_ε) vers v

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 &= \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, (v_\varepsilon - v)(x_1)\, dx_1 + \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v(x_1)\, dx_1 \\ &\leq \bar{\mu}_\varepsilon\, o(1) + c\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 v_\varepsilon(x_1)\, \frac{\mu_\varepsilon(x_1)}{\bar{\mu}_\varepsilon}\, dx_1 \leq o(1) + \frac{c}{\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

et

$$\int_0^1 v(x_1)\, \sigma(dx_1) = 0.$$

Or la densité d'énergie élastique $\mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 \leq c\,\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.$$

Par convergence uniforme de (v_ε) vers v

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v_\varepsilon(x_1)\, dx_1 &= \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\,(v_\varepsilon - v)(x_1)\, dx_1 + \int_0^1 \mu_\varepsilon(x_1)\, v(x_1)\, dx_1 \\ &\leq \bar{\mu}_\varepsilon\, o(1) + c\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 v_\varepsilon(x_1)\,\frac{\mu_\varepsilon(x_1)}{\bar{\mu}_\varepsilon}\, dx_1 \leq o(1) + \frac{c}{\sqrt{\bar{\mu}_\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

et

$$\int_0^1 v(x_1)\,\sigma(dx_1) = 0.$$

Comme $\mathrm{supp}(\sigma) = [0,1]$, on a $v(x_1) = 0$ sur $[0,1]$ et $u_2(x) = 0$, p.p. $x \in \Omega$.

Preuve de l'estimation de ξ^ε :

Preuve de l'estimation de $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}$:

$$
\begin{aligned}
o(1) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_i\,\psi_\varepsilon\,\varphi\,dx &= \int_\Omega \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : \mathbf{e}(\psi_\varepsilon\,\varphi\,\mathbf{e}_i)\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.
\end{aligned}
$$

Preuve de l'estimation de $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$:

$$o(1) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i \, \psi_\varepsilon \, \varphi \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : \mathbf{e}(\psi_\varepsilon \, \varphi \, \mathbf{e}_i) \, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_1} \, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1) \, \varphi \, dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon \, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi) \, dx.$$

Or $\nabla \psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1$ dans F_ε,

Preuve de l'estimation de $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} o(1) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_i\,\psi_\varepsilon\,\varphi\,dx &= \int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : \mathbf{e}(\psi_\varepsilon\,\varphi\,\mathbf{e}_i)\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx. \end{aligned}$$

Or $\nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1$ dans F_ε,

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx \\ &\qquad + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx. \end{aligned}$$

Preuve de l'estimation de $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$:

$$o(1) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_i\,\psi_\varepsilon\,\varphi\,dx = \int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : \mathbf{e}(\psi_\varepsilon\,\varphi\,\mathbf{e}_i)\,dx$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.$$

Or $\nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1$ dans F_ε,

$$o(1) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx$$
$$+\int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.$$

De plus, $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = \mathbf{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ dans Ω^ε. Donc $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$ est bornée L^2 dans Ω_ε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx = o(1),$$

Preuve de l'estimation de $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}$:

$$o(1) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_i\,\psi_\varepsilon\,\varphi\,dx = \int_\Omega \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : \mathbf{e}(\psi_\varepsilon\,\varphi\,\mathbf{e}_i)\,dx$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.$$

Or $\nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1$ dans F_ε,

$$o(1) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx$$
$$+ \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.$$

De plus, $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ dans Ω^{ε}. Donc $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}$ est bornée L^2 dans Ω_ε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_1}\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx = o(1),$$

et

$$o(1) = \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i\otimes\nabla\varphi)\,dx.$$

Il vient que,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_{\Omega} \psi_\varepsilon\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1).\end{aligned}$$

Il vient que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}^\varepsilon) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1).\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx\right| \leq c\left(\int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x)\max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).$$

Il vient que,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi \, dx + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi \, dx - \int_{\Omega} \psi_\varepsilon \, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1).\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx \right| \leq c \left(\int_{\Omega} \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} + o(1),$$

et

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi) = o(1).$$

Il vient que,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\, \varphi\, dx - \int_{\Omega} \psi_\varepsilon\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx + o(1).\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx \right| \leq c \left(\int_{\Omega} \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} + o(1),$$

et

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi) = o(1).$$

Donc

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_1)\, \varphi\, dx = \int_{\Omega} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_1)\, \varphi\, dx + o(1) = \int_{\Omega} \mathbf{A}_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{e}_i\, \varphi\, dx + o(1)$$

Il vient que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Ae}(\mathbf{u}^\varepsilon) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx + \int_{F_\varepsilon} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1).\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx\right| \leq c\left(\int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} + o(1),$$

et

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi) = o(1).$$

Donc

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx = \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_1)\,\varphi\,dx + o(1) = \int_\Omega \mathbf{A}_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{e}_i\,\varphi\,dx + o(1)$$

et

$$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon_{1i} = \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_1) \rightharpoonup \mathbf{A}_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall\, i \in \{1, 2\}.$$

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).
- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset \,]0,1[$ tq. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).
- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset \,]0,1[$ tq. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ union des bandes rigides, où

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).
- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset \,]0,1[$ tq. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ union des bandes rigides, où

$$F_k^\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\varepsilon(j + I_k^\varepsilon)) \times (0,1) \quad \text{et} \quad I_k^\varepsilon := [\tau_k^\varepsilon - R_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon + R_k^\varepsilon].$$

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).
- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset\ ]0,1[$ tq. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ union des bandes rigides, où

$$F_k^\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\varepsilon(j + I_k^\varepsilon)) \times (0,1) \quad \text{et} \quad I_k^\varepsilon := [\tau_k^\varepsilon - R_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon + R_k^\varepsilon].$$

- $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$ (la matrice)

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).

- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset]0,1[$ tq. $\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.

- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ union des bandes rigides, où

$$F_k^\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\varepsilon(j + I_k^\varepsilon)) \times (0,1) \quad \text{et} \quad I_k^\varepsilon := [\tau_k^\varepsilon - R_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon + R_k^\varepsilon].$$

- $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$ (la matrice)

- F_k^ε est occupé par un matériau élastique de coefficients de Lamé $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)$

Optimalité de la condition $(*)$ pour une classe de matériaux périodiques

Description de la classe de matériaux périodiques

- $\Omega :=]0,1[^2$ (pour simplicité).
- $(r_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ et $(\tau_k^\varepsilon)_{k\geq 1} \subset]0,1[$ tq. $\sum_{k\geq 1} R_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ où $R_k^\varepsilon := \dfrac{r_k^\varepsilon}{\varepsilon}$.
- $F_\varepsilon := \bigcup_{k\geq 1} F_k^\varepsilon$ union des bandes rigides, où

$$F_k^\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\varepsilon(j + I_k^\varepsilon)) \times (0,1) \quad \text{et} \quad I_k^\varepsilon := [\tau_k^\varepsilon - R_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon + R_k^\varepsilon].$$

- $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$ (la matrice)
- F_k^ε est occupé par un matériau élastique de coefficients de Lamé $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)$
- Ω_ε est occupé par un matériau élastique de coefficients de Lamé (λ, μ)

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p.}\, x \in \Omega,$$

où

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \mu_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \lambda_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \mu_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \lambda_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ choisi tq.

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k \geq 1} \mu_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k \geq 1} \lambda_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ choisi tq.

$$\frac{\lambda_k^\varepsilon}{\mu_k^\varepsilon} = \ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_k^\varepsilon\,(r_k^\varepsilon)^3}{\varepsilon} = \nu_k^\varepsilon,$$

où $(\nu_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ est une suite de réels positifs vérifiant

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \mu_k^{\varepsilon}\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \lambda_k^{\varepsilon}\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ choisi tq.

$$\frac{\lambda_k^\varepsilon}{\mu_k^\varepsilon} = \ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_k^\varepsilon\,(r_k^\varepsilon)^3}{\varepsilon} = \nu_k^\varepsilon,$$

où $(\nu_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$$\nu := \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k\geq 1} \nu_k^\varepsilon \in]0, \infty[.$$

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \mu_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \lambda_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ choisi tq.

$$\frac{\lambda_k^\varepsilon}{\mu_k^\varepsilon} = \ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_k^\varepsilon\,(r_k^\varepsilon)^3}{\varepsilon} = \nu_k^\varepsilon,$$

où $(\nu_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$$\nu := \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k\geq 1} \nu_k^\varepsilon \in]0, \infty[.$$

Remarques :

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon}}(x) + \big(2\mu_{\varepsilon}(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_{\varepsilon}(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_{\varepsilon}}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_{\varepsilon}(x) := \sum_{k \geq 1} \mu_k^{\varepsilon}\ \mathbf{1}_{F_k^{\varepsilon}}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\varepsilon}(x) := \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{\varepsilon}\ \mathbf{1}_{F_k^{\varepsilon}}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^{\varepsilon}, \mu_k^{\varepsilon}, r_k^{\varepsilon})$ choisi tq.

$$\frac{\lambda_k^{\varepsilon}}{\mu_k^{\varepsilon}} = \ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_k^{\varepsilon}\,(r_k^{\varepsilon})^3}{\varepsilon} = \nu_k^{\varepsilon},$$

où $(\nu_k^{\varepsilon})_{k \geq 1}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$$\nu := \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k \geq 1} \nu_k^{\varepsilon} \in]0, \infty[.$$

Remarques :

- Les coefficients $(\lambda_k^{\varepsilon}, \mu_k^{\varepsilon})$ sont non bornés.

• Ω est donc occupé par un matériau élastique isotrope dont le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{A}^{\varepsilon}(x) := \mathbf{A}\ \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(x) + \big(2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2\big)\mathbf{1}_{F_\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \mu_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) := \sum_{k\geq 1} \lambda_k^\varepsilon\ \mathbf{1}_{F_k^\varepsilon}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

• $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ choisi tq.

$$\frac{\lambda_k^\varepsilon}{\mu_k^\varepsilon} = \ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_k^\varepsilon\,(r_k^\varepsilon)^3}{\varepsilon} = \nu_k^\varepsilon,$$

où $(\nu_k^\varepsilon)_{k\geq 1}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$$\nu := \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k\geq 1} \nu_k^\varepsilon \in]0, \infty[.$$

Remarques :

- Les coefficients $(\lambda_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)$ sont non bornés.

- On peut avoir la situation

$$\nu_k^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad \text{avec} \qquad \nu > 0.$$

La fonction ψ_ε définie par

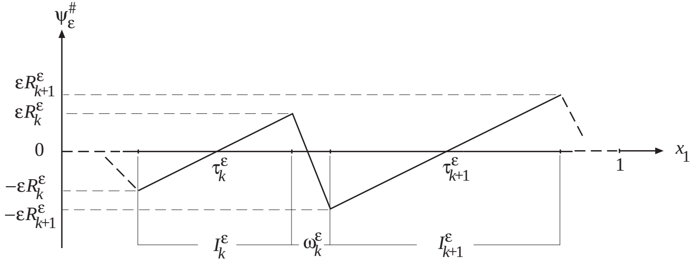
$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

où

La fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

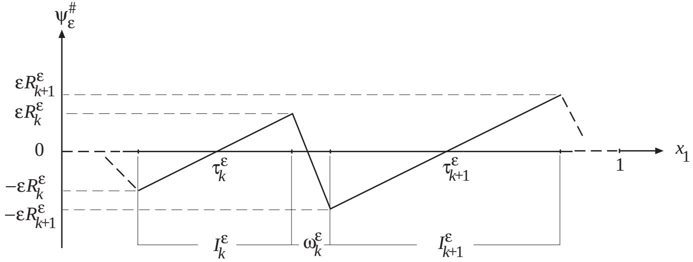
où



La fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

où



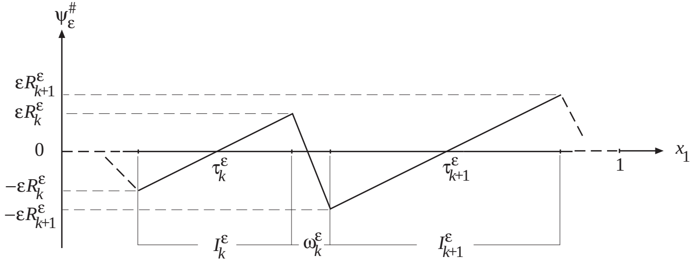
vérifie la condition de distribution des fibres

$$\|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1 \quad \text{p.p. dans} \quad F_\varepsilon.$$

La fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

où



vérifie la condition de distribution des fibres

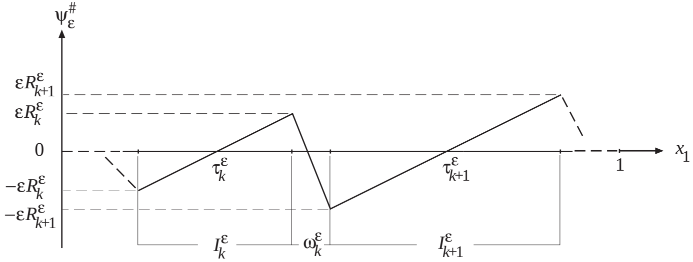
$$\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1 \quad \text{p.p. dans} \quad F_\varepsilon.$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx = \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1).$$

La fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

où



vérifie la condition de distribution des fibres

$$\|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1 \quad \text{p.p. dans} \quad F_\varepsilon.$$

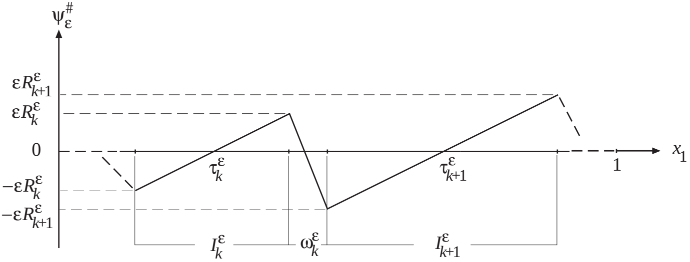
$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx = \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1).$$

Mais

La fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

où



vérifie la condition de distribution des fibres

$$\|\psi_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\psi_\varepsilon = \mathbf{e}_1 \quad \text{p.p. dans} \quad F_\varepsilon.$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx = \int_\Omega \mathbf{Ae}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1).$$

Mais

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \psi_\varepsilon^2(x) \max\left(\mu_\varepsilon(x), \lambda_\varepsilon(x) + \mu_\varepsilon(x)\right) dx \neq 0 \quad (\text{car } \nu > 0).$$

Théorème (B&C-E)

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx \right) = \begin{cases} 0 & si \qquad i = 1, \\ \\ -\,\eta \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\, dx & si \qquad i = 2, \end{cases}$$

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx \right) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 1, \\ -\eta \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\, dx & si \quad i = 2, \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *est la limite faible, dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, de la solution* $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du problème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *et*

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\, dx \right) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 1, \\ -\,\eta \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\, dx & si \quad i = 2, \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *est la limite faible, dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, de la solution* $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du problème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *et*

$$\eta := \frac{8}{3}\, \nu \left(\frac{\ell + 1}{\ell + 2} \right).$$

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega \psi_\varepsilon(x) \, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi) \, dx \right) = \begin{cases} 0 & si \quad i = 1, \\ -\eta \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \, dx & si \quad i = 2, \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *est la limite faible, dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, de la solution* $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du problème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *et*

$$\eta := \frac{8}{3} \, \nu \left(\frac{\ell + 1}{\ell + 2} \right).$$

De plus, u_1 *est l'unique solution de l'équation d'ordre* 4

Théorème (B&C-E)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\,\boldsymbol{\xi}^\varepsilon : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx\right) = \begin{cases} 0 & si \quad i=1, \\ -\,\eta\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\,dx & si \quad i=2, \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, 0)$ *est la limite faible, dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, de la solution* $\mathbf{u}^\varepsilon$ *du problème d'élasticité* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$ *et*

$$\eta := \frac{8}{3}\,\nu\left(\frac{\ell+1}{\ell+2}\right).$$

De plus, u_1 *est l'unique solution de l'équation d'ordre* 4

$$\begin{cases} -(\lambda+\mu)\,\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \mu\,\Delta u_1 + \eta\,\dfrac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} = f_1 & dans \quad \Omega, \\ u_1 = 0 & sur \quad \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 & sur \quad]0,1[\times\{0,1\}. \end{cases}$$

Les ingrédients de la preuve sont :

Les ingrédients de la preuve sont :

convergence à double échelle

Les ingrédients de la preuve sont :

convergence à double échelle

fonctions test oscillantes

Influence des oscillations du milieu extérieur

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.
- ε et r_ε sont deux suites de réels positifs tq. $R_\varepsilon := r_\varepsilon/\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.
- ε et r_ε sont deux suites de réels positifs tq. $R_\varepsilon := r_\varepsilon/\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

$$I_\varepsilon := (1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon)\,, \qquad x_\varepsilon^j := (j - 1/2)\,\varepsilon, \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*,$$

$$F_\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \left(x_\varepsilon^j - r_\varepsilon, x_\varepsilon^j + r_\varepsilon\right) \times]0,1[\qquad \text{et} \qquad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon.$$

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.
- ε et r_ε sont deux suites de réels positifs tq. $R_\varepsilon := r_\varepsilon/\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

$$I_\varepsilon := (1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon)\,, \qquad x_\varepsilon^j := (j - 1/2)\,\varepsilon, \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*,$$

$$F_\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} (x_\varepsilon^j - r_\varepsilon, x_\varepsilon^j + r_\varepsilon) \times]0,1[\qquad \text{et} \qquad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon.$$

- $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ deux fonctions 1-périodiques définies sur $]0,1[$ t.q

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.
- ε et r_ε sont deux suites de réels positifs tq. $R_\varepsilon := r_\varepsilon/\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

$$I_\varepsilon := (1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon), \qquad x_\varepsilon^j := (j - 1/2)\,\varepsilon, \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*,$$

$$F_\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} (x_\varepsilon^j - r_\varepsilon, x_\varepsilon^j + r_\varepsilon) \times]0,1[\qquad \text{et} \qquad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon.$$

- $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ deux fonctions 1-périodiques définies sur $]0,1[$ t.q

$$1 \leq \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1), \qquad 1 \leq \mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \quad \text{p.p. } y_1 \in]0,1[,$$

Influence des oscillations du milieu extérieur

- Le milieu extérieur est supposé isotrope mais non homogène.
- ε et r_ε sont deux suites de réels positifs tq. $R_\varepsilon := r_\varepsilon/\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

$$I_\varepsilon := (1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon)\,, \qquad x_\varepsilon^j := (j - 1/2)\,\varepsilon, \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*,$$

$$F_\varepsilon := \Omega \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \left(x_\varepsilon^j - r_\varepsilon, x_\varepsilon^j + r_\varepsilon\right) \times]0,1[\qquad \text{et} \qquad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon.$$

- $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ deux fonctions 1-périodiques définies sur $]0,1[$ t.q

$$1 \leq \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1), \qquad 1 \leq \mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \quad \text{p.p. } y_1 \in]0,1[,$$

$$1 \leq \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) \leq c, \qquad 1 \leq \mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \leq c \quad \text{p.p. } y_1 \in]0,1[\setminus I_\varepsilon.$$

- Mais $\lambda_{\varepsilon}^{\sharp}$ et $\mu_{\varepsilon}^{\sharp}$ ne sont pas supposées uniformément bornées sur $]0,1[$.

- Mais $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ ne sont pas supposées uniformément bornées sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

- Mais $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ ne sont pas supposées uniformément bornées sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$$

et

$$\varepsilon^2 \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{dy_1}{\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)} \right)^2 \int_{I_\varepsilon} \left(\lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \qquad (3)$$

- Mais $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ ne sont pas supposées uniformément bornées sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

et

$$\varepsilon^2 \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{dy_1}{\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)} \right)^2 \int_{I_\varepsilon} \left(\lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3)$$

L'hypothèse technique (3) est vérifiée, par exemple, s'il existe α_ε tq.

$$1 \le \alpha_\varepsilon \le \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \le c\,\alpha_\varepsilon \quad \text{p.p. } y_1 \in I_\varepsilon.$$

- Mais $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ ne sont pas supposées uniformément bornées sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

et

$$\varepsilon^2 \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{dy_1}{\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)}\right)^2 \int_{I_\varepsilon} \left(\lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3)$$

L'hypothèse technique (3) est vérifiée, par exemple, s'il existe α_ε tq.

$$1 \le \alpha_\varepsilon \le \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \le c\,\alpha_\varepsilon \quad \text{p.p. } y_1 \in I_\varepsilon.$$

Distribution assez homogène des valeurs de $\lambda_\varepsilon^\sharp$ et $\mu_\varepsilon^\sharp$ dans $]0,1[$.

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Soit $(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon)$ la suite de tenseurs d'ordre 4, isotropes et Y-periodiques définie par

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon(y) = 2\mu^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_4 + \lambda^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Soit $(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon)$ la suite de tenseurs d'ordre 4, isotropes et Y-periodiques définie par

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon(y) = 2\mu^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_4 + \lambda^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Considérons la suite de problèmes délasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

où

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Soit $(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon)$ la suite de tenseurs d'ordre 4, isotropes et Y-periodiques définie par

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon(y) = 2\mu^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_4 + \lambda^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Considérons la suite de problèmes délasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{rclll} -\operatorname{Div}\left(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

où

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) := \mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Soit $(\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp)$ la suite de tenseurs d'ordre 4, isotropes et Y-periodiques définie par

$$\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp(y) = 2\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Considérons la suite de problèmes délasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) & = & \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases}$$

où

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) := \mathbf{A}_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

i.e.,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) = 2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

Tenseurs d'élasticité du milieu hétérogène

Soit $(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon)$ la suite de tenseurs d'ordre 4, isotropes et Y-periodiques définie par

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon(y) = 2\mu^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_4 + \lambda^\sharp_\varepsilon(y_1)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Considérons la suite de problèmes délasticité

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

où

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) := \mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

i.e.,

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) = 2\mu_\varepsilon(x)\mathbf{I}_4 + \lambda_\varepsilon(x)\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où

$$\mu_\varepsilon(x) = \mu^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{et} \qquad \lambda_\varepsilon(x) = \lambda^\sharp_\varepsilon\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{A}_*^{\varepsilon}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} := \min\left\{ \int_Y \mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}(y)\big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big) : \big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big)\, dy : \boldsymbol{\Psi} \in \mathrm{H}^1_{\#}(Y, \mathbb{R}^2) \right\}, \quad (4)$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$.

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{A}_*^{\varepsilon}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} := \min \left\{ \int_Y \mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}(y)\big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big) : \big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big)\, dy : \boldsymbol{\Psi} \in \mathrm{H}^1_{\#}(Y, \mathbb{R}^2) \right\}, \quad (4)$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Pour un ε fixé, A_*^{ε} est l'homogénéisée de $A_{\varepsilon}^{\sharp}(\frac{x}{\delta})$ quand $\delta \to 0$.

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{A}_*^{\varepsilon}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} := \min\left\{\int_Y \mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}(y)\big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big) : \big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big)\, dy : \boldsymbol{\Psi} \in \mathrm{H}^1_{\#}(Y, \mathbb{R}^2)\right\}, \quad (4)$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Pour un ε fixé, A_*^{ε} est l'homogénéisée de $A_{\varepsilon}^{\sharp}(\frac{x}{\delta})$ quand $\delta \to 0$.

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,11}$ définie par

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{A}_*^{\varepsilon}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} := \min\left\{\int_Y \mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}(y)\big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big) : \big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big)\, dy : \boldsymbol{\Psi} \in \mathrm{H}^1_{\#}(Y, \mathbb{R}^2)\right\}, \quad (4)$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Pour un ε fixé, A_*^{ε} est l'homogénéisée de $A_{\varepsilon}^{\sharp}(\frac{x}{\delta})$ quand $\delta \to 0$.

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1}\left(1 - \frac{c_{\varepsilon}^1}{\lambda_{\varepsilon}^{\sharp} + 2\mu_{\varepsilon}^{\sharp}}\right) dt\right)\mathbf{e}_1, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

Correcteurs associés au problème d'élasticité $\mathcal{P}(\mathbf{A}^\varepsilon)$

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{A}_*^\varepsilon \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} := \min \left\{ \int_Y \mathbf{A}_\varepsilon^\sharp(y)\big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big) : \big(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}(\boldsymbol{\Psi})\big)\, dy : \boldsymbol{\Psi} \in \mathrm{H}^1_\#(Y, \mathbb{R}^2) \right\}, \quad (4)$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Pour un ε fixé, A_*^ε est l'homogénéisée de $A_\varepsilon^\sharp(\frac{x}{\delta})$ quand $\delta \to 0$.

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^1}{\lambda_\varepsilon^\sharp + 2\mu_\varepsilon^\sharp} \right) dt \right) \mathbf{e}_1, \ \text{p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^1 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\lambda_\varepsilon^\sharp + 2\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

Soit $\mathbf{W}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,11}(y) := y_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y), \quad \forall\ y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

Soit $\mathbf{W}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,11}(y) := y_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\,\mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big) = c^1_\varepsilon\left(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 + \frac{\lambda^\sharp_\varepsilon}{\lambda^\sharp_\varepsilon + 2\mu^\sharp_\varepsilon}\,\mathbf{e}_2 \odot \mathbf{e}_2\right), \mathrm{Div}\Big(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\,\mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big)\Big) = \mathbf{0},$$

Soit $\mathbf{W}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,11}(y) := y_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y), \quad \forall\ y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}\, \mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big) = c_{\varepsilon}^{1} \left(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 + \frac{\lambda_{\varepsilon}^{\sharp}}{\lambda_{\varepsilon}^{\sharp} + 2\mu_{\varepsilon}^{\sharp}}\, \mathbf{e}_2 \odot \mathbf{e}_2 \right), \mathrm{Div}\Big(\mathbf{A}_{\varepsilon}^{\sharp}\, \mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big)\Big) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big) = \frac{c_{\varepsilon}^{1}}{\lambda_{\varepsilon}^{\sharp} + 2\mu_{\varepsilon}^{\sharp}}\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_{*}^{\varepsilon}\,(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1) = c_{\varepsilon}^{1}.$$

Soit $\mathbf{W}^{\varepsilon,11}$ définie par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,11}(y) := y_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{X}^{\varepsilon,11}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\, \mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big) = c^1_\varepsilon \left(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 + \frac{\lambda^\sharp_\varepsilon}{\lambda^\sharp_\varepsilon + 2\mu^\sharp_\varepsilon}\, \mathbf{e}_2 \odot \mathbf{e}_2 \right), \mathrm{Div}\Big(\mathbf{A}^\sharp_\varepsilon\, \mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big)\Big) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}\big(\mathbf{W}^{\varepsilon,11}\big) = \frac{c^1_\varepsilon}{\lambda^\sharp_\varepsilon + 2\mu^\sharp_\varepsilon}\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}^\varepsilon_* \left(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1\right) : \left(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_1\right) = c^1_\varepsilon.$$

Le correcteur $\mathbf{w}^{\varepsilon,11}$ est défini par

$$\mathbf{w}^{\varepsilon,11}(x) := \varepsilon \mathbf{W}^{\varepsilon,11}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = x_1\mathbf{e}_1 - \varepsilon\mathbf{X}^{\varepsilon,11}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp}\right)\, dt\right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp}\right)^{-1}.$$

On définit $\mathbf{W}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,12}(y) := y_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) \, dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

On définit $\mathbf{W}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,12}(y) := y_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp \, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right) = 2\, c_\varepsilon^2 \, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2, \quad \operatorname{Div}\left(\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp \, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right)\right) = \mathbf{0}, \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) \, dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

On définit $\mathbf{W}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,12}(y) := y_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp \, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12} \right) = 2\, c_\varepsilon^2 \, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2, \quad \mathrm{Div}\left(\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp \, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12} \right) \right) = \mathbf{0}, \text{ dans } \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12} \right) = \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_*^\varepsilon (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) = c_\varepsilon^2.$$

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

On définit $\mathbf{W}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,12}(y) := y_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp\, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right) = 2\, c_\varepsilon^2\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2, \quad \mathrm{Div}\left(\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp\, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right)\right) = \mathbf{0}, \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right) = \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp}\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_*^\varepsilon (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) = c_\varepsilon^2.$$

On définit le correcteur $\mathbf{w}^{\varepsilon,12}$ par

Un minimiseur dans la définition (4) pour $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2)$ est la fonction Y-périodique $\mathbf{X}^{\varepsilon,12}$ définie par

$$\mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y) := \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y_1) := \left(\int_{\frac{1}{2}}^{y_1} \left(1 - \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right) dt \right) \mathbf{e}_2, \text{ p.p. } y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2,$$

où

$$c_\varepsilon^2 := \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp} \right)^{-1}.$$

On définit $\mathbf{W}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{W}^{\varepsilon,12}(y) := y_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}^{\varepsilon,12}(y), \quad \forall\, y = (y_1, y_2) \in]0,1[^2.$$

On a

$$\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp\, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right) = 2\, c_\varepsilon^2\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2, \quad \mathrm{Div}\left(\mathbf{A}_\varepsilon^\sharp\, \mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right)\right) = \mathbf{0}, \text{ dans } \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbf{e}\left(\mathbf{W}^{\varepsilon,12}\right) = \frac{c_\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon^\sharp}\, \mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_*^\varepsilon(\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2) = c_\varepsilon^2.$$

On définit le correcteur $\mathbf{w}^{\varepsilon,12}$ par

$$\mathbf{w}^{\varepsilon,12}(x) := \varepsilon \mathbf{W}^{\varepsilon,12}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = x_1 \mathbf{e}_2 - \varepsilon X^{\varepsilon,12}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

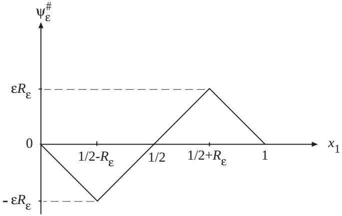
Soit $\psi^\sharp_\varepsilon$ continue, 1-périodique et affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par

Soit $\psi_\varepsilon^\sharp$ continue, 1-périodique et affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_\varepsilon^\sharp(y_1) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\, y_1 & \text{si} \quad y_1 \in (0, 1/2 - R_\varepsilon)\,, \\ \varepsilon\,(y_1 - 1/2) & \text{si} \quad y_1 \in [1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon]\,, \\ \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\,(y_1 - 1) & \text{si} \quad y_1 \in (1/2 + R_\varepsilon, 1)\,. \end{cases}$$

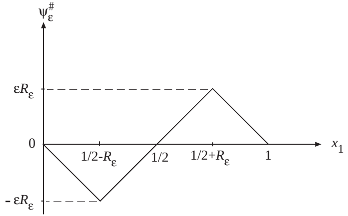
Soit $\psi_\varepsilon^\sharp$ continue, 1-périodique et affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_\varepsilon^\sharp(y_1) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\, y_1 & \text{si} \quad y_1 \in (0, 1/2 - R_\varepsilon)\,, \\ \varepsilon\,(y_1 - 1/2) & \text{si} \quad y_1 \in [1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon]\,, \\ \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\,(y_1 - 1) & \text{si} \quad y_1 \in (1/2 + R_\varepsilon, 1)\,. \end{cases}$$



Soit $\psi_\varepsilon^\sharp$ continue, 1-périodique et affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_\varepsilon^\sharp(y_1) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\, y_1 & \text{si} \quad y_1 \in (0, 1/2 - R_\varepsilon)\,, \\ \varepsilon\,(y_1 - 1/2) & \text{si} \quad y_1 \in [1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon]\,, \\ \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\,(y_1 - 1) & \text{si} \quad y_1 \in (1/2 + R_\varepsilon, 1)\,. \end{cases}$$

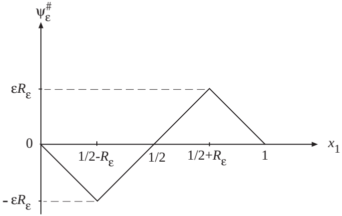


La suite ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

Soit $\psi_\varepsilon^\sharp$ continue, 1-périodique et affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_\varepsilon^\sharp(y_1) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\, y_1 & \text{si} \quad y_1 \in (0, 1/2 - R_\varepsilon)\,, \\ \varepsilon\,(y_1 - 1/2) & \text{si} \quad y_1 \in [1/2 - R_\varepsilon, 1/2 + R_\varepsilon]\,, \\ \dfrac{\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - 1/2}\,(y_1 - 1) & \text{si} \quad y_1 \in (1/2 + R_\varepsilon, 1)\,. \end{cases}$$



La suite ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi_\varepsilon^\sharp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

vérifie

$$\psi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \text{fortement dans } \mathrm{H}^1(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \nabla\psi_\varepsilon(x) = \mathbf{e}_1 \quad \text{p.p.} \quad x \in F_\varepsilon.$$

Théorème (Influence des oscillations du milieu extérieur (B&C-E))

i) *Pour tout* $i \in \{1,2\}$*, la suite de tenseurs de contraintes* $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ *vérifie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*,*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}_{1i}\,\varphi\,dx = c_*^i \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x)\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1),$$

Théorème (Influence des oscillations du milieu extérieur (B&C-E))

i) *Pour tout* $i \in \{1,2\}$, *la suite de tenseurs de contraintes* $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ *vérifie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}_{1i}\,\varphi\,dx = c_*^i \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x)\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1),$$

où

$\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *est la solution du problème* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$,

Théorème (Influence des oscillations du milieu extérieur (B&C-E))

i) *Pour tout* $i \in \{1,2\}$, *la suite de tenseurs de contraintes* $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ *vérifie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}_{1i}\,\varphi\,dx = c^{i}_{*}\int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x)\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1),$$

où

$\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *est la solution du problème* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$,

$\mathbf{u} := (u_1, 0)$ *est la limite faible de* $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$,

Théorème (Influence des oscillations du milieu extérieur (B&C-E))

i) *Pour tout* $i \in \{1,2\}$, *la suite de tenseurs de contraintes* $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ *vérifie, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon}_{1i}\,\varphi\,dx = c_*^i \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : (\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_i)\,\varphi\,dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x)\,\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : (\mathbf{e}_i \otimes \nabla\varphi)\,dx + o(1),$$

où

$\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *est la solution du problème* $\mathcal{P}(\mathbf{A}^{\varepsilon})$,

$\mathbf{u} := (u_1, 0)$ *est la limite faible de* $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ *dans* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$,

$$c_*^1 := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\lambda_{\varepsilon}^{\sharp} + 2\mu_{\varepsilon}^{\sharp}} \right)^{-1} \qquad \text{et} \qquad c_*^2 := 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\varepsilon}^{\sharp}} \right)^{-1}.$$

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) = 0,$$

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) = 0,$$

alors on a la convergence au sens des distributions

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1) \right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1) \right) dy_1 \right) = 0,$$

alors on a la convergence au sens des distributions

$$\xi_{1i}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{c_*^i}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad i \in \{1, 2\},$$

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1\right) = 0,$$

alors on a la convergence au sens des distributions

$$\xi_{1i}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{c_*^i}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right) \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad i\in\{1,2\},$$

et u_1 *est l'unique solution du problème limite*

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) = 0,$$

alors on a la convergence au sens des distributions

$$\xi_{1i}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{c_*^i}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad i \in \{1, 2\},$$

et u_1 *est l'unique solution du problème limite*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_1 \nabla u_1) & = & f_1 & in \quad \Omega \\ u_1 & = & 0 & on \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \qquad où \qquad \mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} c_*^1 & 0 \\ 0 & \dfrac{c_*^2}{2} \end{pmatrix},$$

ii) *Si l'on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1\right) = 0,$$

alors on a la convergence au sens des distributions

$$\xi_{1i}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{c_*^i}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right) \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega), \quad i\in\{1,2\},$$

et u_1 *est l'unique solution du problème limite*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_1\nabla u_1) & = & f_1 & in \quad \Omega \\ u_1 & = & 0 & on \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \qquad où \qquad \mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} c_*^1 & 0 \\ 0 & \dfrac{c_*^2}{2}\end{pmatrix},$$

avec

$$c_*^1 := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\lambda_\varepsilon^\sharp + 2\mu_\varepsilon^\sharp}\right)^{-1} \qquad et \qquad c_*^2 := 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_\varepsilon^\sharp}\right)^{-1}.$$

iii) *On suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) \neq 0$$

iii) *On suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1\right) \neq 0$$

et que les coefficients de Lamé $(\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ *sont constantes dans* F_ε *et vérifient*

iii) *On suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1)+\mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1\right) \neq 0$$

et que les coefficients de Lamé $(\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ *sont constantes dans* F_ε *et vérifient*

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell > 0 \qquad et \qquad \frac{\mu_\varepsilon\left(r_\varepsilon\right)^3}{\varepsilon} = \nu > 0.$$

iii) *On suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) \neq 0$$

et que les coefficients de Lamé $(\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ *sont constantes dans* F_ε *et vérifient*

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_\varepsilon \left(r_\varepsilon\right)^3}{\varepsilon} = \nu > 0.$$

Alors, on a les convergences au sens des distributions

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^\varepsilon \rightharpoonup \; c_*^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \boldsymbol{\xi}_{12}^\varepsilon \rightharpoonup \; \frac{c_*^2}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{4b}{\ell + 2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

iii) *On suppose que*

$$b := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^1 \left(\psi_\varepsilon^\sharp(y_1)\right)^2 \max\left(\mu_\varepsilon^\sharp(y_1), \lambda_\varepsilon^\sharp(y_1) + \mu_\varepsilon^\sharp(y_1)\right) dy_1 \right) \neq 0$$

et que les coefficients de Lamé $(\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ *sont constantes dans* F_ε *et vérifient*

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell > 0 \qquad \textit{et} \qquad \frac{\mu_\varepsilon \left(r_\varepsilon\right)^3}{\varepsilon} = \nu > 0.$$

Alors, on a les convergences au sens des distributions

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^\varepsilon \rightharpoonup c_*^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \boldsymbol{\xi}_{12}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{c_*^2}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{4b}{\ell + 2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^3} \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

et u_1 *est la solution unique de l'équation d'ordre* 4

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mathbf{A}_1 \nabla u_1\right) + \dfrac{4b}{\ell+2} \dfrac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} & = & f_1 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ u_1 & = & 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & = & 0 \quad \textit{sur} \quad]0,1[\times\{0,1\}. \end{cases}$$