

# Étude de deux modèles pour le phénomène d'évaporation en Gravitation.

L'équation de Landau sur un domaine de vitesse borné.

Pierre Carcaud  
Florian Méhats et Mohammed Lemou

IRMAR

Université de Rennes1

Journée de l'Équipe d'Analyse Numérique du 25 novembre  
2010.

# Outline

- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

# Plan

- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

# Un modèle de Vlasov-Landau-Poisson avec évaporation

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla \phi \cdot \nabla_v f = Q_L(f) \\ \Delta \phi = \int f \, dv, \quad \phi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \geq 0, \\ f(t, x, v) = 0 \text{ si } e := |v|^2/2 + \phi(x, t) \geq 0, \end{array} \right. \quad (\text{VLP})$$

- $f(t, x, v)$  est la distribution de densité
- $Q_L$  est le noyau de collision de Landau:

$$Q_L(f) := \nabla_v \cdot \int |v - v_*|^\gamma \Pi(v - v_*) (f_* \nabla_v f - f \nabla_v f_*) \, dv_*,$$

avec  $\gamma \in [-3, 1[$  et  $\Pi(z)$  la projection orthogonale sur  $(z\mathbb{R})^\perp$ .

# L'équation de Landau avec évaporation

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes:

- $f$  est homogène (ne dépend pas de la variable d'espace  $x$ ),
- la vitesse d'évaporation est une fonction  $R(t)$  régulière donnée,
- le potentiel est dur:  $\gamma \in [0, 1[$ .

$$\begin{cases} \partial_t f = Q_L(f), \\ f|_{t=0} = f_0 \geq 0, \\ f(t, v) = 0 \text{ si } |v| \geq R(t), \end{cases} \quad (\text{L})$$

La loi d'évaporation physique s'obtient à partir du Viriel:

$$R = \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{\frac{E_f}{M_f}}. \quad (\text{V})$$

# Un modèle encore simplifié

On suppose de plus que:

- $f$  est à symétrie sphérique,
- le potentiel d'interaction est Maxwellien, i.e.  $\gamma = 0$ ,
- la vitesse d'évaporation est une constante  $R$ .

On obtient alors le modèle suivant:

$$\begin{cases} \partial_t f = Q_{FP}(f) := \nabla \cdot (E_f \nabla f + 3v M_f f), \\ f|_{t=0} = f_0 \geq 0, \\ f(t, v) = 0 \text{ si } |v| \geq R, \end{cases} \quad (\text{FP})$$

- $E_f$  est l'énergie:  $E_f := \int_{|v| \leq R} f v^2 \, dv$ ,
- $M_f$  est la masse:  $M_f := \int_{|v| \leq R} f \, dv$ .

# Plan

- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

# Résultat d'existence pour le modèle Landau

## Théorème

Soit  $\ell \in ]0, 1[$ ,  $R : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$   $\mathcal{C}^{1,\ell}$ ,  $f_0 \in \mathcal{B}^{\ell+2}(B_{R(0)})$ . Alors il existe  $T^* \in ]0, +\infty]$  tel que

- ① Il existe une unique solution  $f \in \mathcal{B}^{\ell+2, \frac{\ell}{2}+1}(D_{[0, T^*]})$  de (L),
- ② on a soit  $T^* = +\infty$  soit  $\lim_{t \rightarrow T^*} M_f(t) = 0$ .

De plus,  $R^2 M_f' = E_f'$  et donc, si  $R$  est constant alors la quantité  $R^2 M_f - E_f$  est conservée. Si maintenant  $R$  suit la loi (V) alors  $R$  est décroissant et on a

$$\frac{E_f}{E_{f_0}} = \left( \frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{1-\gamma}, \quad \frac{R}{R(0)} = \left( \frac{M_f}{M_{f_0}} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

## Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck

## Théorème (DCDSB '10)

$$E_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty R^2}{2 \log t}, \quad R^2 M_f - E_f = R^2 M_\infty > 0.$$

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \exists C_{R, f_0, \varepsilon}, \quad \|f(t, \cdot) - \mathcal{P}(t, \cdot)\|_{L^1(B_R)} \leq \frac{C_{R, f_0, \varepsilon}}{1 + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}},$$

avec  $\mathcal{P}(t, v) = \frac{M_f(t)}{(\pi\beta(t))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}}$ , et où  $\beta$  est solution de

$$\begin{cases} \beta' = 4E_f - 6M_f\beta, \\ \beta(0) = \frac{2E_{f_0}}{3M_{f_0}}, \end{cases} \quad \text{et vérifie } \beta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R^2}{\log(t)}.$$

En particulier

$$f \rightharpoonup M_\infty \delta_{v=0},$$

et le taux de convergence est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(t)}\right)$ .

# Plan

- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

## Domaine borné vs Domaine non borné

Domaine non borné ( $v \in \mathbb{R}^3$ ) (équation de Landau)

- $E_f$ ,  $M_f$  et  $\int f v \, dv$  sont conservés.
- l'entropie  $\int f \log f$  est décroissante.
- $f \in L^\infty(L \log L)$ .

Domaine borné ( $|v| \leq R$ ) ((L) et (FP))

- $E_f$  et  $M_f$  sont décroissants.
- $\int f v \, dv$  n'est plus conservé et l'entropie n'est plus décroissante en général.
- $f \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^3)$  pour  $T > 0$  fixé (ici on utilise  $\gamma \geq 0$ ).

Comme  $R^2 \partial_t f - v^2 \partial_t f$  s'annule au bord, par intégration par partie on a

$$R^2 M_f' - E_f' = 0.$$

Ainsi, si  $R$  est constant (dans le cas de (FP))

$$M_f \geq M_0 + \frac{E_0}{R^2} > 0.$$

et il est facile de prouver que

$$E_f(t) \geq C \|f(t, \cdot)\|_{L^\infty}^{-\frac{2}{3}} M_f(t)^{\frac{5}{3}}.$$

Sinon (dans le cas de (L)), tant que  $M_f$  ne s'annule pas, on montre l'ellipticité de la même façon que dans le cas non borné.

# L'énergie tend vers 0.

## Lemme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) = 0.$$

## Idée

*Si on suppose  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_f(t) =: E_\infty > 0$ , alors*

*$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_f(t) =: M_\infty > 0$ , et (FP) est équivalent pour  $t \rightarrow +\infty$  à*

$$\partial_t f = \nabla \cdot (E_\infty \nabla f + 3vM_\infty f).$$

*On devrait donc avoir  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ , ce qui contredit  $\inf M_f > 0$ .*

## Comportement asymptotique de l'énergie (1/3)

On a

$$\frac{d}{dt} E_f = -4\pi R^4 E_f |\partial_r f(t, R)|.$$

Ainsi

$$E_f(t) = E_0 e^{-4\pi R^4 \int_0^t |\partial_r f(s, R)| ds}.$$

Grace à une sursolution qui s'annule sur  $\partial B$  on prouve que

$$\partial_r f(t, R) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On peut en conclure que la décroissance  $E_f$  n'est pas exponentielle.

## Comportement asymptotique de l'énergie (2/3)

Plus précisément on considère la Maxwellienne suivante

$$\mathcal{M}(t, v) := \frac{\alpha}{\beta^{\frac{3}{2}}(t)} e^{-\frac{v^2}{\beta(t)}} + C,$$

avec des constantes  $\alpha$  et  $C$  bien choisies. Il s'agit d'une sursolution (i.e.  $0 \leq f \leq \mathcal{M}$ ) ssi

$$\beta' = 4E_f - 6M_f\beta.$$

De cette EDO on déduit

$$\beta \underset{+\infty}{\sim} \frac{2E_f}{3M_\infty}.$$

## Comportement asymptotique de l'énergie (3/3)

De ce qui précède on déduit une majoration en valeur absolue pour  $\partial_r f(., R)$  en fonction de  $E_f$  ce qui conduit à une inégalité différentielle sur  $E_f$ :

$$-\frac{E'_f}{E_f^2} e^{\frac{c_1}{E_f}} \leq c_2,$$

pour certaines constantes strictement positives  $c_1$  et  $c_2$ . Ceci permet de montrer une minoration de l'énergie en  $\frac{1}{\log(t)}$ . On trouve:

$$E_f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3M_\infty R^2}{2 \log t}.$$

## Profil asymptotique

Grace à un changement de variable qui dépend de  $f$  (FP) devient

$$\begin{cases} \partial_t f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + vf), \\ f = 0, \text{ pour } v \geq R(t). \end{cases}$$

où

$$R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2 \log(t)}$$

En temps grand,  $f$  devient proportionnelle au premier mode propre qui est une Maxwellienne. Le changement de variable inverse sur cette Maxwellienne donne le profil.

# Plan

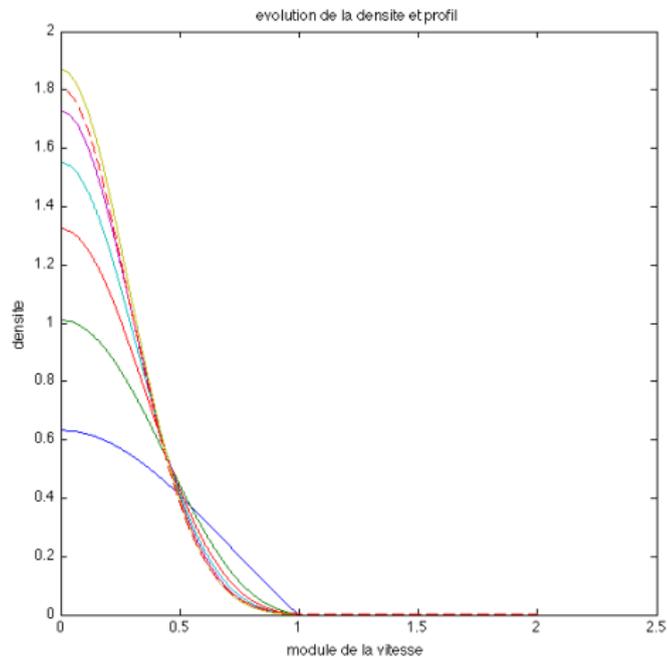
- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

On utilise un schéma conservatif 1D (cas à symétrie sphérique):

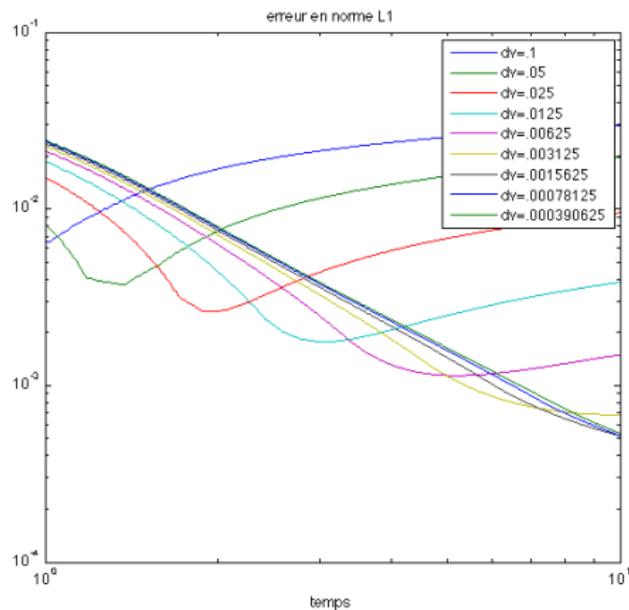
- la masse et l'énergie discrète sont décroissantes,
- la loi de conservation est respectée dans le cas Maxwellien,

On prouve que, dans le cas Maxwellien, pour un pas de vitesse fixé, Le schéma converge vers un Dirac discret. Alors que pour des schémas plus simplistes (non conservatifs), la solution converge vers 0.

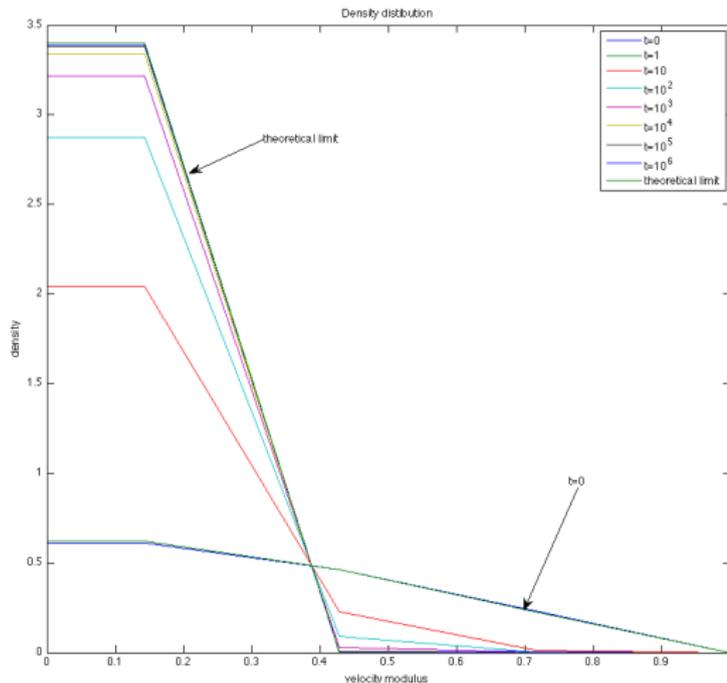
# Evolution de la densité et profil dans le cas Maxwellien



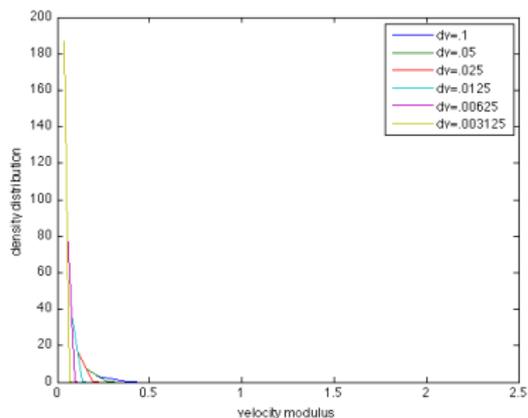
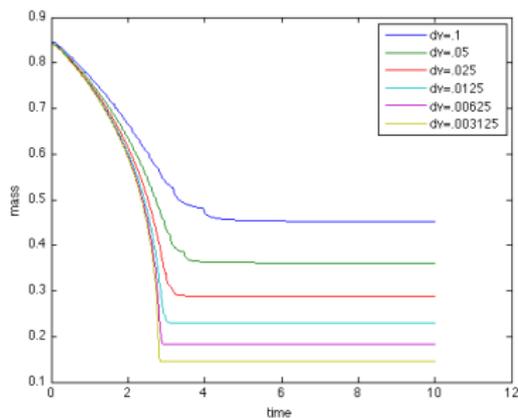
# Comparaison avec le profil



# Convergence vers un Dirac discret



avec la loi physique (V) et  $\gamma = -3$



# Plan

- 1 Les modèles
  - Le modèle général
  - Deux modèles simplifiés
- 2 Résultats théoriques
  - Existence de solutions pour le modèle Landau avec évaporation
  - Comportement asymptotique du modèle Fokker-Planck
- 3 Quelques idées de preuve
  - Estimation a priori
  - Ellipticité
  - Comportement asymptotique
- 4 Résultats Numériques
- 5 Perspectives

## Future works

- cas non homogène en espace mais sans collision.
- Dérivation de modèles hydrodynamiques avec évaporation.

Questions?