

Opérateur de Schrödinger avec conditions de Neumann sur le demi-plan

V. Bonnaillie-Noël
avec M. Dauge, N. Popoff et N. Raymond

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Univ. Rennes 1



8^e JEAN
Rennes, 25 novembre 2010



Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Spectre
- 3 Localisation des fonctions propres
- 4 Densification du spectre
- 5 Asymptotique

Contexte

Étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique $(ih\nabla - \mathcal{A})^2$ dans un domaine régulier de \mathbb{R}^3

- Approximation du champ par un champ constant
- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: angle entre le champ et le bord du domaine
- On se ramène à étudier l'opérateur

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (hD_r + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$

- Transformation de Fourier en r :

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

Contexte

Étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique $(ih\nabla - \mathcal{A})^2$ dans un domaine régulier de \mathbb{R}^3

- Approximation du champ par un champ constant
- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: angle entre le champ et le bord du domaine
- On se ramène à étudier l'opérateur

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (hD_r + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$

- Transformation de Fourier en r :

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

Contexte

Étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique $(ih\nabla - \mathcal{A})^2$ dans un domaine régulier de \mathbb{R}^3

- Approximation du champ par un champ constant
- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: angle entre le champ et le bord du domaine
- On se ramène à étudier l'opérateur

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (hD_r + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$

- Transformation de Fourier en r :

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

Contexte

Étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique $(ih\nabla - \mathcal{A})^2$ dans un domaine régulier de \mathbb{R}^3

- Approximation du champ par un champ constant
- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: angle entre le champ et le bord du domaine
- On se ramène à étudier l'opérateur

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (hD_r + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^3 = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$

- Transformation de Fourier en r :

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2, \theta = 0$$

Opérateur de de Gennes

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t)^2$$

On se ramène à l'opérateur de **de Gennes sur la demi-droite**

$$H(\zeta) = D_t^2 + (t - \zeta)^2$$

Domaine de la réalisation de Neumann :

$$\{v \in H^2(\mathbb{R}_+), t^2 v \in L^2(\mathbb{R}_+), v'(0) = 0\}$$

$(\mu(\zeta), v_\zeta)$: plus petite valeur propre de H_ζ , vecteur propre normalisé

Proposition.[Dauge-Helffer 93]

La fonction μ atteint son minimum Θ_0 en un unique point ζ_0 . On a

$$\zeta_0^2 = \Theta_0 \quad \text{et} \quad \Theta_0 \simeq 0.590106125$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (t - \zeta_0) |v_{\zeta_0}(t)|^2 dt = 0$$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2, \theta = 0$$

Opérateur de de Gennes

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t)^2$$

On se ramène à l'opérateur de **de Gennes sur la demi-droite**

$$H(\zeta) = D_t^2 + (t - \zeta)^2$$

Domaine de la réalisation de Neumann :

$$\{v \in H^2(\mathbb{R}_+), t^2 v \in L^2(\mathbb{R}_+), v'(0) = 0\}$$

$(\mu(\zeta), v_\zeta)$: plus petite valeur propre de H_ζ , vecteur propre normalisé

Proposition.[Dauge-Helffer 93]

La fonction μ atteint son minimum Θ_0 en un unique point ζ_0 . On a

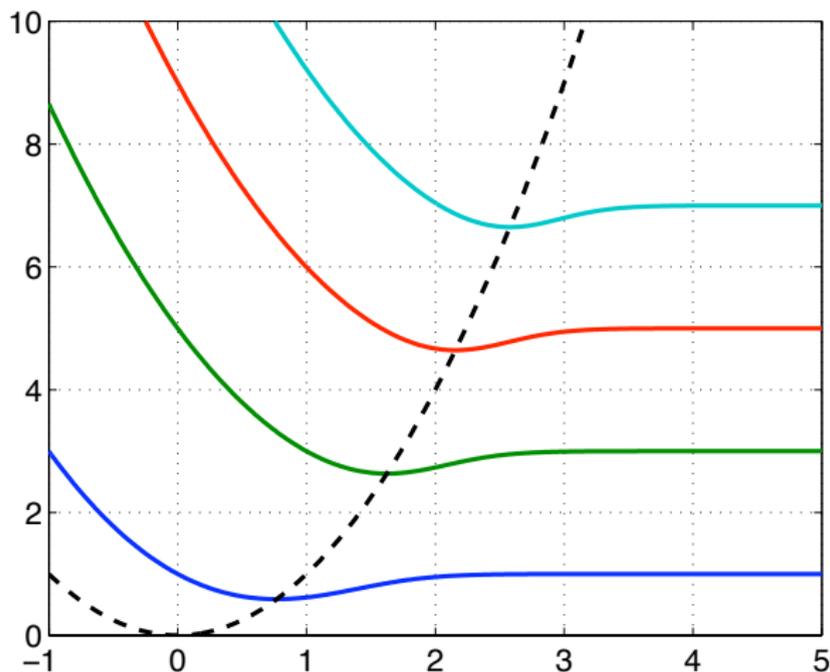
$$\zeta_0^2 = \Theta_0 \quad \text{et} \quad \Theta_0 \simeq 0.590106125$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (t - \zeta_0) |v_{\zeta_0}(t)|^2 dt = 0$$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2, \theta = 0$$

Opérateur de de Gennes

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \mu(\zeta) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \mu(\zeta) = +\infty$$



$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2, \theta \neq 0$$

- **Translation en s** : on se ramène à un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

- **Changement d'échelle** : on se ramène au cas $h = 1$

$$D_s^2 + D_t^2 + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (h\rho + t \cos \theta - s \sin \theta)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2, \theta \neq 0$$

- **Translation en s** : on se ramène à un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique sur le demi-plan $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

$$h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2 + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

- **Changement d'échelle** : on se ramène au cas $h = 1$

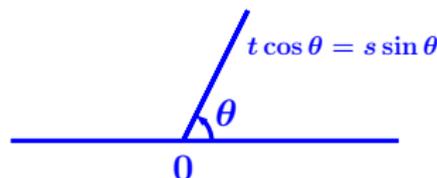
$$D_s^2 + D_t^2 + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

Notations

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{x = (s, t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$$

$$V_\theta: x = (s, t) \in \Omega \longmapsto (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$: angle entre $\partial\Omega$ et la demi-droite d'équation $t \cos \theta = s \sin \theta$ où le potentiel $(t \cos \theta - s \sin \theta)^2$ atteint son minimum



$$\mathcal{L}_\theta = -\Delta + V_\theta = D_s^2 + D_t^2 + V_\theta \quad \text{défini sur } D_N(\mathcal{L}_\theta)$$

$$q_\theta(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + V_\theta |u|^2) dx$$

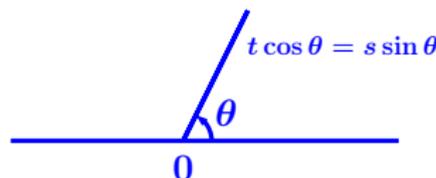
définie sur $D(q_\theta) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), \sqrt{V_\theta} u \in L^2(\Omega)\}$

Notations

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{x = (s, t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$$

$$V_\theta: x = (s, t) \in \Omega \longmapsto (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$: angle entre $\partial\Omega$ et la demi-droite d'équation $t \cos \theta = s \sin \theta$ où le potentiel $(t \cos \theta - s \sin \theta)^2$ atteint son minimum



$$\mathcal{L}_\theta = -\Delta + V_\theta = D_s^2 + D_t^2 + V_\theta \quad \text{défini sur } D_N(\mathcal{L}_\theta)$$

$$q_\theta(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + V_\theta |u|^2) dx$$

définie sur $D(q_\theta) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), \sqrt{V_\theta} u \in L^2(\Omega)\}$

Premiers résultats

$\sigma_n(\theta)$ n^{e} valeur propre de \mathcal{L}_θ définie par le principe de min-max
 $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta)$ spectre essentiel de \mathcal{L}_θ

Proposition. [Helffer-Morame 02, Lu-Pan 00]

- $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty)$
- $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$ croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$ avec monotonie stricte pour $n = 1$
- $\sigma_1(\theta) < 1$, simple et associée à une fonction propre positive
- $\theta \mapsto \sigma_1(\theta)$ analytique

Premiers résultats

$\sigma_n(\theta)$ n^{e} valeur propre de \mathcal{L}_θ définie par le principe de min-max
 $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta)$ spectre essentiel de \mathcal{L}_θ

Proposition. [Helffer-Morame 02, Lu-Pan 00]

- $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty)$
- $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$ croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$ avec monotonie stricte pour $n = 1$
- $\sigma_1(\theta) < 1$, simple et associée à une fonction propre positive
- $\theta \mapsto \sigma_1(\theta)$ analytique

Premiers résultats

$\sigma_n(\theta)$ n^{e} valeur propre de \mathcal{L}_θ définie par le principe de min-max
 $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta)$ spectre essentiel de \mathcal{L}_θ

Proposition. [Helffer-Morame 02, Lu-Pan 00]

- $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty)$
- $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$ croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$ avec monotonie stricte pour $n = 1$
- $\sigma_1(\theta) < 1$, simple et associée à une fonction propre positive
- $\theta \mapsto \sigma_1(\theta)$ analytique

Premiers résultats

$\sigma_n(\theta)$ n^{e} valeur propre de \mathcal{L}_θ définie par le principe de min-max
 $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta)$ spectre essentiel de \mathcal{L}_θ

Proposition. [Helffer-Morame 02, Lu-Pan 00]

- $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty)$
- $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$ croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$ avec monotonie stricte pour $n = 1$
- $\sigma_1(\theta) < 1$, simple et associée à une fonction propre positive
- $\theta \mapsto \sigma_1(\theta)$ analytique

Premiers résultats

$\sigma_n(\theta)$ n^{e} valeur propre de \mathcal{L}_θ définie par le principe de min-max
 $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta)$ spectre essentiel de \mathcal{L}_θ

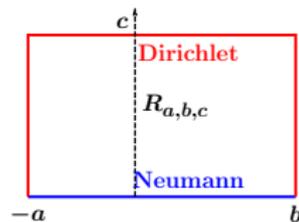
Proposition. [Helffer-Morame 02, Lu-Pan 00]

- $\text{sp}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty)$
- $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$ croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$ avec monotonie stricte pour $n = 1$
- $\sigma_1(\theta) < 1$, simple et associée à une fonction propre positive
- $\theta \mapsto \sigma_1(\theta)$ analytique

Simulations numériques

$$R_{a,b,c} = (-a, b) \times (0, c)$$

$\sigma_n(\theta; a, b, c)$: valeurs propres de $\mathcal{L}_\theta(a, b, c) = -\Delta + V_\theta$ sur $R_{a,b,c}$ avec conditions de Neumann en $t = 0$ et de Dirichlet sur les bords artificiels



$$\sigma_n(\theta) \leq \sigma_n(\theta; a, b, c)$$

Monotonie de $\sigma_n(\theta; a, b, c)$ en chaque variable a , b ou c

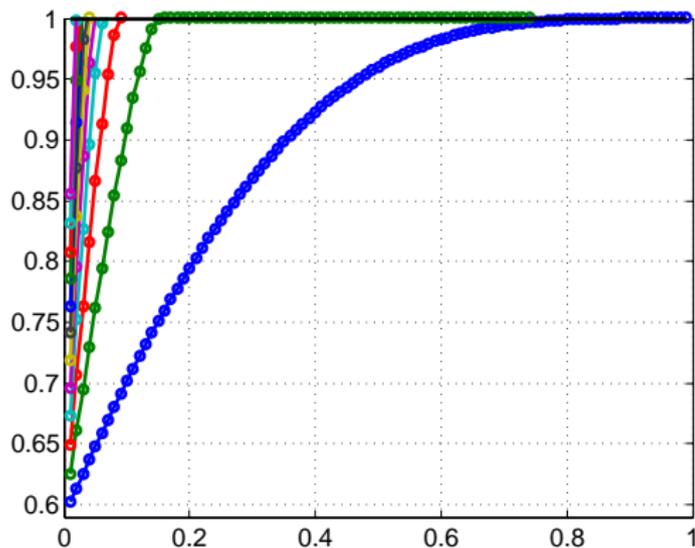
Simulations numériques

Approximation de $\sigma_n(\theta)$ pour $\theta = \vartheta\pi/2$ avec $\vartheta \in \{k/100, 1 \leq k \leq 99\}$

Méthode des éléments finis de degré \mathbb{Q}_{10}

10 ou 15 éléments dans chaque direction

$a \in \{10n, n = 1, \dots, 10\}$



Comportement en $\pi/2$

Proposition. $\sigma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$ $\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \sigma_1'(\theta) = 0$

Idées de preuve.

$$\mathcal{L}(\theta, \gamma) = D_s^2 + D_t^2 + (t(\cos \theta + \gamma) - s \sin \theta)^2, \quad \gamma \geq 0$$

$\mathcal{L}(\theta, \gamma)$ unitairement équivalent à $\rho \mathcal{L}_\alpha$ avec $\alpha = \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \gamma}\right)$

Changement d'échelle $\tilde{t} = (\cos \theta + \gamma)t$

Formule de Feynman-Hellman

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq \sigma_1'(\theta) < \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sigma_1(\theta).$$

Comportement en $\pi/2$

Proposition. $\sigma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \sigma_1'(\theta) = 0$

Idées de preuve.

$$\mathcal{L}(\theta, \gamma) = D_s^2 + D_t^2 + (t(\cos \theta + \gamma) - s \sin \theta)^2, \quad \gamma \geq 0$$

$\mathcal{L}(\theta, \gamma)$ unitairement équivalent à $\rho \mathcal{L}_\alpha$ avec $\alpha = \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \gamma}\right)$

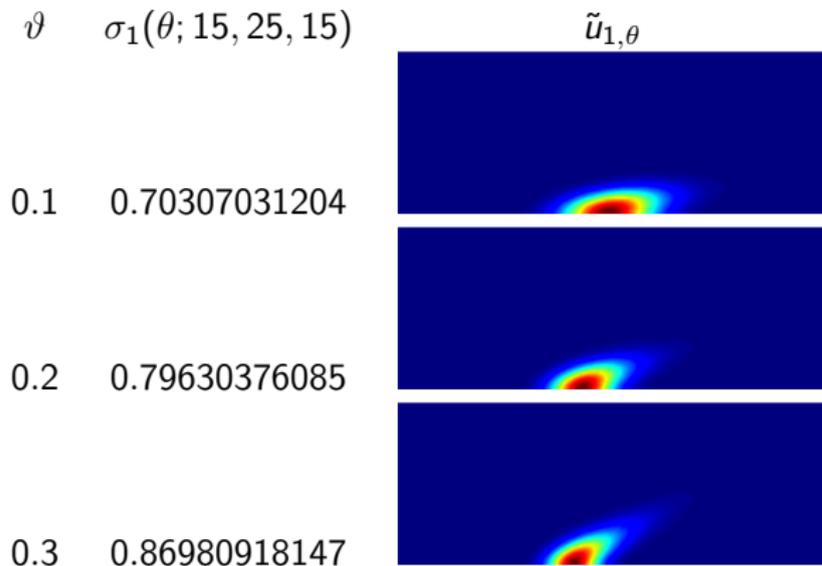
Changement d'échelle $\tilde{t} = (\cos \theta + \gamma)t$

Formule de Feynman-Hellman

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq \sigma_1'(\theta) < \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sigma_1(\theta).$$

Simulations numériques

Premier mode propre de $\mathcal{L}_\theta(15, 25, 15)$ pour $\theta = \vartheta \frac{\pi}{2}$



Éléments rectangulaires 2×1 , degré \mathbb{Q}_6

Estimation isotrope

Théorème.

Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ un mode propre de \mathcal{L}_θ avec $\sigma(\theta) < 1$. On a:

$$\forall \alpha \in (0, \sqrt{1 - \sigma(\theta)}), \exists C_{\alpha, \theta} > 0, \quad q_\theta(e^{\alpha|x|} u_\theta) \leq C_{\alpha, \theta} \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

L'estimation dégénère quand $\sigma_1(\theta) \rightarrow 1$ ou $\theta \rightarrow 0$ (car $C_{\alpha, \theta}$ explose)

Estimation isotrope

Préliminaires - formule "IMS"

Φ fonction uniformément lipschitzienne sur Ω

Si $u \in D_N(\mathcal{L}_\theta)$, alors

$$\langle \mathcal{L}_\theta u, e^{2\Phi} u \rangle = q_\theta(e^\Phi u) - \|\nabla \Phi |e^\Phi u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ une paire propre de \mathcal{L}_θ , alors

$$\int_{\Omega} |\nabla(e^\Phi u_\theta)|^2 + \int_{\Omega} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 = 0$$

Soit (Ω^+, Ω^-) une partition de Ω : $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ et $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, alors

$$\int_{\Omega^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sup_{\Omega^-} |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2| \int_{\Omega^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Soit $(\chi_i)_i$ une partition de l'unité avec $\sum_i \chi_i^2 = 1$. Alors pour $u \in D(q_\theta)$

$$\sum_i q_\theta(\chi_i u) = q_\theta(u) + \int_{\Omega} \sum_i |\nabla \chi_i|^2 |u|^2$$

Estimation isotrope

Préliminaires - formule "IMS"

Φ fonction uniformément lipschitzienne sur Ω

Si $u \in D_N(\mathcal{L}_\theta)$, alors

$$\langle \mathcal{L}_\theta u, e^{2\Phi} u \rangle = q_\theta(e^\Phi u) - \|\nabla \Phi |e^\Phi u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ une paire propre de \mathcal{L}_θ , alors

$$\int_{\Omega} |\nabla(e^\Phi u_\theta)|^2 + \int_{\Omega} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 = 0$$

Soit (Ω^+, Ω^-) une partition de Ω : $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ et $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, alors

$$\int_{\Omega^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sup_{\Omega^-} |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2| \int_{\Omega^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Soit $(\chi_i)_i$ une partition de l'unité avec $\sum_i \chi_i^2 = 1$. Alors pour $u \in D(q_\theta)$

$$\sum_i q_\theta(\chi_i u) = q_\theta(u) + \int_{\Omega} \sum_i |\nabla \chi_i|^2 |u|^2$$

Estimation isotrope

Préliminaires - formule "IMS"

Φ fonction uniformément lipschitzienne sur Ω

Si $u \in D_N(\mathcal{L}_\theta)$, alors

$$\langle \mathcal{L}_\theta u, e^{2\Phi} u \rangle = q_\theta(e^\Phi u) - \|\nabla \Phi |e^\Phi u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ une paire propre de \mathcal{L}_θ , alors

$$\int_{\Omega} |\nabla(e^\Phi u_\theta)|^2 + \int_{\Omega} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 = 0$$

Soit (Ω^+, Ω^-) une partition de Ω : $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ et $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, alors

$$\int_{\Omega^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sup_{\Omega^-} |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla \Phi|^2| \int_{\Omega^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Soit $(\chi_i)_i$ une partition de l'unité avec $\sum_i \chi_i^2 = 1$. Alors pour $u \in D(q_\theta)$

$$\sum_i q_\theta(\chi_i u) = q_\theta(u) + \int_{\Omega} \sum_i |\nabla \chi_i|^2 |u|^2$$

Estimation isotrope

Démonstration - notation

(χ_1, χ_2) : partition de l'unité sur \mathbb{R}^+ avec $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$ et

$$\begin{cases} 0 \leq \chi_1 \leq 1, & \chi_1(r) = 1 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } 0 \text{ si } r \geq 2 \\ 0 \leq \chi_2 \leq 1, & \chi_2(r) = 0 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } 1 \text{ si } r \geq 2 \end{cases}$$

On définit

$$\chi_1^R(x) = \chi_1\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{and} \quad \chi_2^R(x) = \chi_2\left(\frac{|x|}{R}\right)$$

On fixe $\alpha > 0$

On choisit comme distance d'Agmon

$$\Phi(s, t) = \alpha \sqrt{s^2 + t^2} = \alpha |x|$$

Alors $|\nabla \Phi|^2 = \alpha^2$

Estimation isotrope

Démonstration - notation

(χ_1, χ_2) : partition de l'unité sur \mathbb{R}^+ avec $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$ et

$$\begin{cases} 0 \leq \chi_1 \leq 1, & \chi_1(r) = 1 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } 0 \text{ si } r \geq 2 \\ 0 \leq \chi_2 \leq 1, & \chi_2(r) = 0 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } 1 \text{ si } r \geq 2 \end{cases}$$

On définit

$$\chi_1^R(x) = \chi_1\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{and} \quad \chi_2^R(x) = \chi_2\left(\frac{|x|}{R}\right)$$

On fixe $\alpha > 0$

On choisit comme distance d'Agmon

$$\Phi(s, t) = \alpha \sqrt{s^2 + t^2} = \alpha |x|$$

Alors $|\nabla \Phi|^2 = \alpha^2$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 1

$$\int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla\chi_j^R|^2 e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2$$

On choisit $\varepsilon \in (0, 1 - \sigma(\theta))$ et on fixe $\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon - \sigma(\theta)}$. Alors

$$\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2 = 1 - \varepsilon$$

$$\implies \int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = (1 - \varepsilon) \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{\max(\|\chi_1\|_{\infty}, \|\chi_2\|_{\infty})^2}{R^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) \\ &\leq \|\chi_1^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - q_{\theta}(\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}) \end{aligned}$$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 1

$$\int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla\chi_j^R|^2 e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2$$

On choisit $\varepsilon \in (0, 1 - \sigma(\theta))$ et on fixe $\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon - \sigma(\theta)}$. Alors

$$\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2 = 1 - \varepsilon$$

$$\implies \int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = (1 - \varepsilon) \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{\max(\|\chi_1\|_{\infty}, \|\chi_2\|_{\infty})^2}{R^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) \\ &\leq \|\chi_1^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - q_{\theta}(\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}) \end{aligned}$$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 1

$$\int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla\chi_j^R|^2 e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2$$

On choisit $\varepsilon \in (0, 1 - \sigma(\theta))$ et on fixe $\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon - \sigma(\theta)}$. Alors

$$\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2 = 1 - \varepsilon$$

$$\implies \int_{\Omega} (\sigma(\theta) + |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_{\theta}|^2 = (1 - \varepsilon) \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{\max(\|\chi_1\|_{\infty}, \|\chi_2\|_{\infty})^2}{R^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{j=1}^2 q_{\theta}(\chi_j^R e^{\Phi} u_{\theta}) \\ &\leq \|\chi_1^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - q_{\theta}(\chi_2^R e^{\Phi} u_{\theta}) \end{aligned}$$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 2

Lemme de Persson:

$$\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = \inf \left\{ \frac{q_\theta(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}, u \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \cap \mathbb{C}B_r) \right\} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \inf \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = 1$$

On choisit R assez grand de sorte que

$$q_\theta(\chi_{2R}^R e^\Phi u_\theta) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Ainsi

$$\frac{\varepsilon}{2} \|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{|x| < 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx + \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} e^{4\alpha R} \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pas d'estimation uniforme pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 2

Lemme de Persson:

$$\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = \inf \left\{ \frac{q_\theta(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}, u \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \cap \mathbb{C}B_r) \right\} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \inf \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = 1$$

On choisit R assez grand de sorte que

$$q_\theta(\chi_{2R}^R e^\Phi u_\theta) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Ainsi

$$\frac{\varepsilon}{2} \|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{|x| < 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx + \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} e^{4\alpha R} \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pas d'estimation uniforme pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 2

Lemme de Persson:

$$\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = \inf \left\{ \frac{q_\theta(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}, u \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \cap \complement B_r) \right\} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \inf \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = 1$$

On choisit R assez grand de sorte que

$$q_\theta(\chi_{2R}^R e^\Phi u_\theta) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Ainsi

$$\frac{\varepsilon}{2} \|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{|x| < 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx + \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} e^{4\alpha R} \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pas d'estimation uniforme pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Estimation isotrope

Démonstration - étape 2

Lemme de Persson:

$$\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = \inf \left\{ \frac{q_\theta(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}, u \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \cap \complement B_r) \right\} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \inf \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = 1$$

On choisit R assez grand de sorte que

$$q_\theta(\chi_{2R}^R e^\Phi u_\theta) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Ainsi

$$\frac{\varepsilon}{2} \|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{|x| < 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx + \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{|x| > 2R} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 dx$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} e^{4\alpha R} \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pas d'estimation uniforme pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Estimation isotrope uniforme

Proposition. Soit $\eta < 1$. Il existe $C > 0$ et $\gamma > 0$ tels que pour toute paire propre $(\sigma(\theta), u_\theta)$ de \mathcal{L}_θ avec $\sigma(\theta) \leq \eta$, on a

$$\int_{\Omega} e^{2\gamma t} |u_\theta|^2 ds dt \leq C \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Idée de preuve.

On choisit $\Phi = \gamma t$ et une partition de l'unité en t

Estimation isotrope uniforme

Proposition. Soit $\eta < 1$. Il existe $C > 0$ et $\gamma > 0$ tels que pour toute paire propre $(\sigma(\theta), u_\theta)$ de \mathcal{L}_θ avec $\sigma(\theta) \leq \eta$, on a

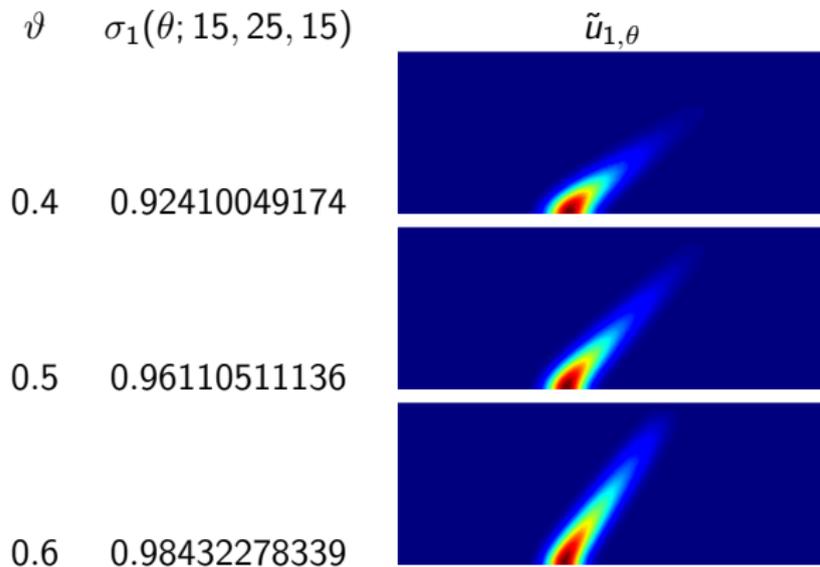
$$\int_{\Omega} e^{2\gamma t} |u_\theta|^2 ds dt \leq C \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Idée de preuve.

On choisit $\Phi = \gamma t$ et une partition de l'unité en t

Simulations numériques

Premier mode propre de $\mathcal{L}_\theta(15, 25, 15)$ pour $\theta = \vartheta \frac{\pi}{2}$



Éléments rectangulaires 2×1 , degré \mathbb{Q}_6

Estimation anisotrope

Théorème.

Soit $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ un mode propre de \mathcal{L}_θ avec $\sigma(\theta) < 1$. Alors il existe une constante $K(\beta)$ telle que

$$q_\theta(e^{\beta V_\theta} u_\theta) \leq K(\beta) \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Idées de preuve. On choisit

$$\Phi(x) = (1 - \delta) \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^{\sqrt{V_\theta(x)}} \sqrt{(|^2 - \sigma(\theta))_+} dl$$

Soit $g(d) = \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^d \sqrt{(|^2 - \sigma(\theta))_+} dl$, alors $\Phi(x) = (1 - \delta)g(\sqrt{V_\theta(x)})$.

On a $g(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} \frac{d^2}{2} + \mathcal{O}(\ln d)$ et $g'(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} d + \mathcal{O}(d^{-1})$

Il suffit donc de montrer que $q_\theta(e^\Phi u_\theta)$ est uniformément borné en θ pour tout $\delta \in (0, 1)$

Estimation anisotrope

Théorème.

Soit $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Soit $(\sigma(\theta), u_\theta)$ un mode propre de \mathcal{L}_θ avec $\sigma(\theta) < 1$. Alors il existe une constante $K(\beta)$ telle que

$$q_\theta(e^{\beta V_\theta} u_\theta) \leq K(\beta) \|u_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Idées de preuve. On choisit

$$\Phi(x) = (1 - \delta) \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^{\sqrt{V_\theta(x)}} \sqrt{(l^2 - \sigma(\theta))_+} dl$$

Soit $g(d) = \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^d \sqrt{(l^2 - \sigma(\theta))_+} dl$, alors $\Phi(x) = (1 - \delta)g(\sqrt{V_\theta(x)})$.

On a $g(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} \frac{d^2}{2} + \mathcal{O}(\ln d)$ et $g'(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} d + \mathcal{O}(d^{-1})$

Il suffit donc de montrer que $q_\theta(e^\Phi u_\theta)$ est uniformément borné en θ pour tout $\delta \in (0, 1)$

Estimation anisotrope

Démonstration

On a $|\nabla\Phi|^2 = (1 - \delta)^2(V_\theta - \sigma(\theta))_+$

Soit $\eta > 0$, on considère une partition de l'unité pour Ω :

$$A_\eta^+ = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) > \eta\} \quad \text{et} \quad A_\eta^- = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) \leq \eta\}$$

$$\text{Sur } A_\eta^+ : \quad V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2 = (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) > \eta(2\delta - \delta^2)$$

$$\text{Sur } A_\eta^- : \quad |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2| = \begin{cases} \sigma(\theta) - V_\theta & \text{si } V_\theta < \sigma(\theta) \\ (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons $0 < \eta(2\delta - \delta^2) \leq \Theta_0 < \sigma(\theta)$. Alors

$$\eta(2\delta - \delta^2) \int_{A_\eta^+} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \int_{A_\eta^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sigma(\theta) \int_{A_\eta^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{\sigma(\theta)}{\eta(2\delta - \delta^2)} + 1 \right) \exp \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^{\sqrt{\sigma(\theta) + \eta}} (1 - \delta) \sqrt{l^2 - \sigma(\theta)} \, dl = K(\eta, \delta, \sigma(\theta))$$

$$K_0(\delta) = \max_{\sigma \in [\Theta_0, 1]} \min_{\eta \in I(\delta)} K(\eta, \delta, \sigma)$$

Estimation anisotrope

Démonstration

On a $|\nabla\Phi|^2 = (1 - \delta)^2(V_\theta - \sigma(\theta))_+$

Soit $\eta > 0$, on considère une partition de l'unité pour Ω :

$$A_\eta^+ = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) > \eta\} \quad \text{et} \quad A_\eta^- = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) \leq \eta\}$$

$$\text{Sur } A_\eta^+ : \quad V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2 = (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) > \eta(2\delta - \delta^2)$$

$$\text{Sur } A_\eta^- : \quad |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2| = \begin{cases} \sigma(\theta) - V_\theta & \text{si } V_\theta < \sigma(\theta) \\ (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons $0 < \eta(2\delta - \delta^2) \leq \Theta_0 < \sigma(\theta)$. Alors

$$\eta(2\delta - \delta^2) \int_{A_\eta^+} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \int_{A_\eta^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sigma(\theta) \int_{A_\eta^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{\sigma(\theta)}{\eta(2\delta - \delta^2)} + 1 \right) \exp \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^{\sqrt{\sigma(\theta)+\eta}} (1 - \delta) \sqrt{l^2 - \sigma(\theta)} \, dl = K(\eta, \delta, \sigma(\theta))$$

$$K_0(\delta) = \max_{\sigma \in [\Theta_0, 1]} \min_{\eta \in I(\delta)} K(\eta, \delta, \sigma)$$

Estimation anisotrope

Démonstration

On a $|\nabla\Phi|^2 = (1 - \delta)^2(V_\theta - \sigma(\theta))_+$

Soit $\eta > 0$, on considère une partition de l'unité pour Ω :

$$A_\eta^+ = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) > \eta\} \quad \text{et} \quad A_\eta^- = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) \leq \eta\}$$

$$\text{Sur } A_\eta^+ : \quad V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2 = (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) > \eta(2\delta - \delta^2)$$

$$\text{Sur } A_\eta^- : \quad |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2| = \begin{cases} \sigma(\theta) - V_\theta & \text{si } V_\theta < \sigma(\theta) \\ (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons $0 < \eta(2\delta - \delta^2) \leq \Theta_0 < \sigma(\theta)$. Alors

$$\eta(2\delta - \delta^2) \int_{A_\eta^+} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \int_{A_\eta^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sigma(\theta) \int_{A_\eta^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{\sigma(\theta)}{\eta(2\delta - \delta^2)} + 1 \right) \exp \int_{\sqrt{\sigma(\theta)}}^{\sqrt{\sigma(\theta)+\eta}} (1 - \delta) \sqrt{l^2 - \sigma(\theta)} \, dl = K(\eta, \delta, \sigma(\theta))$$

$$K_0(\delta) = \max_{\sigma \in [\Theta_0, 1]} \min_{\eta \in I(\delta)} K(\eta, \delta, \sigma)$$

Estimation anisotrope

Démonstration

On a $|\nabla\Phi|^2 = (1 - \delta)^2(V_\theta - \sigma(\theta))_+$

Soit $\eta > 0$, on considère une partition de l'unité pour Ω :

$$A_\eta^+ = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) > \eta\} \quad \text{et} \quad A_\eta^- = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta - \sigma(\theta) \leq \eta\}$$

$$\text{Sur } A_\eta^+ : \quad V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2 = (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) > \eta(2\delta - \delta^2)$$

$$\text{Sur } A_\eta^- : \quad |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2| = \begin{cases} \sigma(\theta) - V_\theta & \text{si } V_\theta < \sigma(\theta) \\ (V_\theta - \sigma(\theta))(2\delta - \delta^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons $0 < \eta(2\delta - \delta^2) \leq \Theta_0 < \sigma(\theta)$. Alors

$$\eta(2\delta - \delta^2) \int_{A_\eta^+} e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \int_{A_\eta^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\theta|^2 \leq \sigma(\theta) \int_{A_\eta^-} e^{2\Phi} |u_\theta|^2$$

Finalement

$$\|e^\Phi u_\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{\sigma(\theta)}{\eta(2\delta - \delta^2)} + 1 \right) \exp \int_{\frac{\sqrt{\sigma(\theta)}}{\sqrt{\sigma(\theta)+\eta}} \sqrt{I^2 - \sigma(\theta)}}^{\sqrt{\sigma(\theta)+\eta}} (1 - \delta) \sqrt{I^2 - \sigma(\theta)} \, dl = K(\eta, \delta, \sigma(\theta))$$

$$K_0(\delta) = \max_{\sigma \in [\Theta_0, 1]} \min_{\eta \in I(\delta)} K(\eta, \delta, \sigma)$$

Simulations numériques

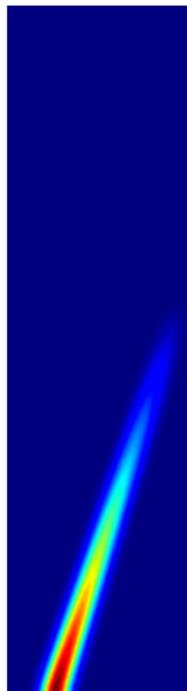
Premier mode propre de $\mathcal{L}_\theta(5, 15, 75)$, $\theta = \vartheta \frac{\pi}{2}$

$\vartheta = 0.7$



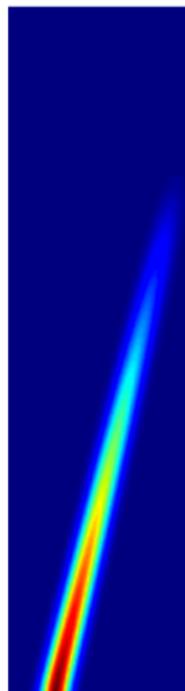
0.99445407220

$\vartheta = 0.8$



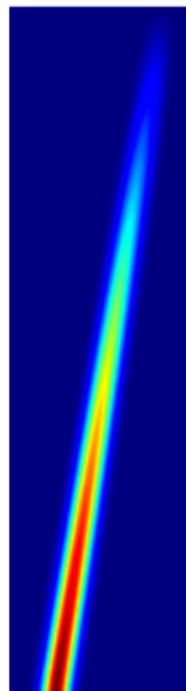
0.99910390126

$\vartheta = 0.85$



0.99987798948

$\vartheta = 0.9$

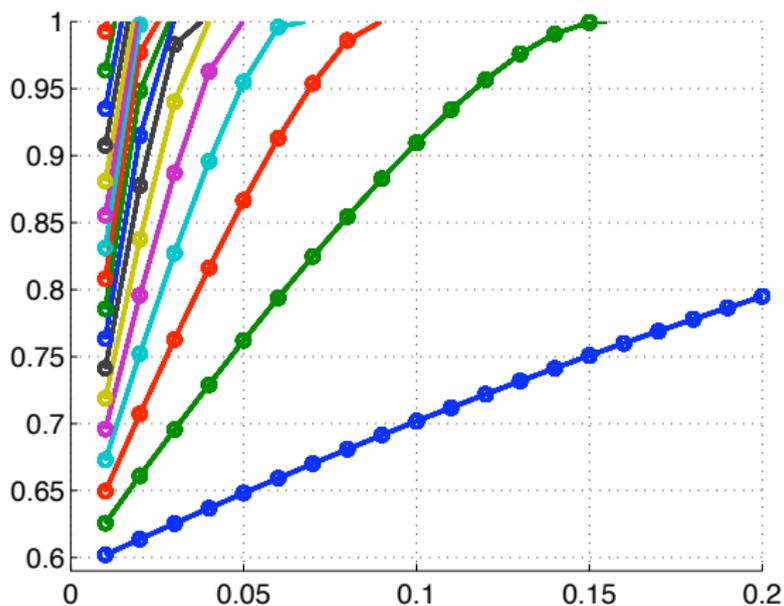


1.0001656284

Simulations numériques pour θ petit

Approximation de $\sigma_n(\theta)$ pour $\theta = \vartheta\pi/2$ with $\vartheta \in \{k/100, 1 \leq k \leq 20\}$

$a = b = 100$; $c = 50$ pour $\theta \leq \frac{\pi}{20}$ et $c = 100$ pour $\theta \in [\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{10}]$
 20×20 éléments carrés et degré \mathbb{Q}_{10}



Majoration des valeurs propres

Théorème.

$$\sigma_n(\theta) \leq \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta, \quad \forall n \geq 1$$

Soit $n(\theta)$ le nombre de valeurs propres de \mathcal{L}_θ en dessous du spectre essentiel, alors

$$n(\theta) \geq \frac{1 - \Theta_0 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2}$$

Majoration des valeurs propres

Théorème.

$$\sigma_n(\theta) \leq \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta, \quad \forall n \geq 1$$

Soit $n(\theta)$ le nombre de valeurs propres de \mathcal{L}_θ en dessous du spectre essentiel, alors

$$n(\theta) \geq \frac{1 - \Theta_0 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2}$$

Construction de quasi-modes

Lemme. Soit ψ_n la n^e fonction d'Hermite. On rappelle :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\psi_n''(x) + x^2\psi_n(x) = (2n + 1)\psi_n(x).$$

On définit les fonctions normalisées $\tilde{u}_{n,\theta}$ orthogonales pour a_θ :

$$\tilde{u}_{n,\theta}(s, t) = (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} v_{\zeta_0}(t\sqrt{\cos \theta}) \psi_n \left(s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta_0}{\sqrt{\tan \theta}} \right)$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad b_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}) = \Theta_0 \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta$$

Construction de quasi-modes

Démonstration

On utilise le changement de variables

$$\begin{cases} y = s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta_0}{\sqrt{\tan \theta}} \\ z = t\sqrt{\cos \theta} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} q_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}) &= \cos \theta \int_{\Omega} (|v'_{\zeta_0}(z)|^2 |\psi_n(y)|^2 + (z - \zeta_0)^2 |v_{\zeta_0}(z)|^2 |\psi_n(y)|^2) dy dz \\ &\quad + \sin \theta \int_{\Omega} (|\psi'_n(y)|^2 |v_{\zeta_0}(z)|^2 + y^2 |\psi_n(y)|^2 |v_{\zeta_0}(z)|^2) dy dz \\ &\quad - 2\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} \int_{\Omega} y(z - \zeta_0) |v_{\zeta_0}(z)|^2 |\psi_n(y)|^2 dy dz \\ &= \Theta_0 \cos \theta \|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + (2n + 1) \sin \theta \|v_{\zeta_0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \end{aligned}$$

Densité du spectre

Proposition. Soient $\zeta > 0$ et n un entier tels que

$$\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta < 1$$

Alors il existe $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\theta)$ et une constante $C_\zeta > 0$ telles que

$$|\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta - \lambda| \leq C_\zeta \sqrt{2 \cos \theta \sin \theta} \sqrt{n^2 + 1}$$

Idées de preuve.

$$\tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) = (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} v_\zeta(t \sqrt{\cos \theta}) \psi_n \left(s \sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}} \right)$$

+ théorème spectral

Proposition.

$$\forall \lambda_0 \in (\Theta_0, 1), \forall \varepsilon > 0, \exists \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall \theta \in (0, \theta_0], \exists \lambda \in \text{sp}(\mathcal{L}_\theta), |\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon$$

Densité du spectre

Proposition. Soient $\zeta > 0$ et n un entier tels que

$$\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta < 1$$

Alors il existe $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\theta)$ et une constante $C_\zeta > 0$ telles que

$$|\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta - \lambda| \leq C_\zeta \sqrt{2 \cos \theta \sin \theta} \sqrt{n^2 + 1}$$

Idées de preuve.

$$\tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) = (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} v_\zeta(t \sqrt{\cos \theta}) \psi_n \left(s \sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}} \right)$$

+ théorème spectral

Proposition.

$$\forall \lambda_0 \in (\Theta_0, 1), \forall \varepsilon > 0, \exists \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall \theta \in (0, \theta_0], \exists \lambda \in \text{sp}(\mathcal{L}_\theta), |\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon$$

Densité du spectre

Proposition. Soient $\zeta > 0$ et n un entier tels que

$$\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta < 1$$

Alors il existe $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\theta)$ et une constante $C_\zeta > 0$ telles que

$$|\mu(\zeta) \cos \theta + (2n + 1) \sin \theta - \lambda| \leq C_\zeta \sqrt{2 \cos \theta \sin \theta} \sqrt{n^2 + 1}$$

Idées de preuve.

$$\tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) = (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} v_\zeta(t \sqrt{\cos \theta}) \psi_n \left(s \sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}} \right)$$

+ théorème spectral

Proposition.

$$\forall \lambda_0 \in (\Theta_0, 1), \forall \varepsilon > 0, \exists \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall \theta \in (0, \theta_0], \exists \lambda \in \text{sp}(\mathcal{L}_\theta), |\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Valeurs propres

Théorème.

Pour tout $M_0 \geq 1$, il existe $h_0 > 0$ et $C(M_0) > 0$ tels que pour tout $0 < \theta \leq h_0$ et $1 \leq n \leq M_0$

$$\left| \sigma_n(\theta) - \left(\Theta_0 + \theta \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n-1) \right) \right| \leq C(M_0) \theta^{3/2}$$

Changement de variables :
$$\begin{cases} y = s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta_0}{\sqrt{\tan \theta}} \\ z = t\sqrt{\cos \theta} \end{cases}$$

L'opérateur \mathcal{L}_θ se réécrit $\cos \theta (\mathfrak{L}_h + \Theta_0)$ avec $h = \tan \theta$ et

$$\mathfrak{L}_h = hD_y^2 + D_z^2 + (z - \zeta_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0$$

Soit $\mathfrak{s}_n(h)$ la n^{e} vp de \mathfrak{L}_h . On a $\sigma_n(\theta) = \cos \theta (\Theta_0 + \mathfrak{s}_n(\tan \theta))$

Théorème. Pour tout $M_0 \geq 1$, il existe $C(M_0) > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $1 \leq n \leq M_0$ et $0 < h < h_0$

$$\left| \mathfrak{s}_n(h) - h \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n-1) \right| \leq C(M_0) h^{3/2}$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Valeurs propres

Théorème.

Pour tout $M_0 \geq 1$, il existe $h_0 > 0$ et $C(M_0) > 0$ tels que pour tout $0 < \theta \leq h_0$ et $1 \leq n \leq M_0$

$$\left| \sigma_n(\theta) - \left(\Theta_0 + \theta \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n-1) \right) \right| \leq C(M_0) \theta^{3/2}$$

Changement de variables :
$$\begin{cases} y = s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta_0}{\sqrt{\tan \theta}} \\ z = t\sqrt{\cos \theta} \end{cases}$$

L'opérateur \mathcal{L}_θ se réécrit $\cos \theta (\mathfrak{L}_h + \Theta_0)$ avec $h = \tan \theta$ et

$$\mathfrak{L}_h = hD_y^2 + D_z^2 + (z - \zeta_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0$$

Soit $\mathfrak{s}_n(h)$ la n^{e} vp de \mathfrak{L}_h . On a $\sigma_n(\theta) = \cos \theta (\Theta_0 + \mathfrak{s}_n(\tan \theta))$

Théorème. Pour tout $M_0 \geq 1$, il existe $C(M_0) > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $1 \leq n \leq M_0$ et $0 < h < h_0$

$$\left| \mathfrak{s}_n(h) - h \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n-1) \right| \leq C(M_0) h^{3/2}$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Vecteurs propres

Théorème.

$$\tilde{\mathbf{u}}_n^b(h)(y, z) = \psi_{n-1} \left(\left[\frac{\mu''(\zeta_0)}{2} \right]^{1/4} y \right) v_{\zeta_0}(z)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_n^\sharp(h)(y, z) = \psi_{n-1} \left(\left[\frac{\mu''(\zeta_0)}{2} \right]^{1/4} y \right) \left(v_{\zeta_0}(z) + h^{1/2} y \partial_\zeta v_\zeta \Big|_{\zeta=\zeta_0}(z) \right)$$

On pose

$$\tilde{u}_{n,\theta}^b(s, t) = \tilde{\mathbf{u}}_n^b(h)(y, z), \quad \tilde{u}_{n,\theta}^\sharp(s, t) = \tilde{\mathbf{u}}_n^\sharp(h)(y, z) \quad \text{et} \quad h = \tan \theta$$

Alors

$$\|u_{n,\theta} - \tilde{u}_{n,\theta}^b\|_{L^2(\Omega)} \leq C \theta^{1/2} \|u_{n,\theta}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|u_{n,\theta} - \tilde{u}_{n,\theta}^\sharp\|_{L^2(\Omega)} \leq C \theta \|u_{n,\theta}\|_{L^2(\Omega)}$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Construction des quasi-modes

$$\mathfrak{L}_h = P_0 + h^{1/2}P_1 + hP_2 \text{ avec } P_0 = D_z^2 + (z - \zeta_0)^2 - \Theta_0 = H_{\zeta_0} - \Theta_0$$

$$P_1 = -2(z - \zeta_0)y$$

$$P_2 = D_y^2 + y^2$$

On cherche un quasi-mode de la forme $u_h = \varphi_0 + h^{1/2}\varphi_1 + h\varphi_2$ associé à une valeur propre $\gamma_h = \gamma_0 + h^{1/2}\gamma_1 + h\gamma_2$. Ainsi

$$h^0 : (P_0 - \gamma_0)\varphi_0 = 0$$

$$h^{1/2} : (P_0 - \gamma_0)\varphi_1 = \gamma_1\varphi_0 - P_1\varphi_0$$

$$h : (P_0 - \gamma_0)\varphi_2 = \gamma_2\varphi_0 + \gamma_1\varphi_1 - P_2\varphi_0 - P_1\varphi_1$$

$$h^0 \Rightarrow \gamma_0 = 0 \text{ et } \varphi_0(y, z) = v_{\zeta_0}(z)f(y)$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Construction des quasi-modes

$$\mathfrak{L}_h = P_0 + h^{1/2}P_1 + hP_2 \text{ avec } P_0 = D_z^2 + (z - \zeta_0)^2 - \Theta_0 = H_{\zeta_0} - \Theta_0$$

$$P_1 = -2(z - \zeta_0)y$$

$$P_2 = D_y^2 + y^2$$

On cherche un quasi-mode de la forme $u_h = \varphi_0 + h^{1/2}\varphi_1 + h\varphi_2$ associé à une valeur propre $\gamma_h = \gamma_0 + h^{1/2}\gamma_1 + h\gamma_2$. Ainsi

$$h^0 : (P_0 - \gamma_0)\varphi_0 = 0$$

$$h^{1/2} : (P_0 - \gamma_0)\varphi_1 = \gamma_1\varphi_0 - P_1\varphi_0$$

$$h : (P_0 - \gamma_0)\varphi_2 = \gamma_2\varphi_0 + \gamma_1\varphi_1 - P_2\varphi_0 - P_1\varphi_1$$

$$h^0 \Rightarrow \gamma_0 = 0 \text{ et } \varphi_0(y, z) = v_{\zeta_0}(z)f(y)$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Construction des quasi-modes

$$\mathfrak{L}_h = P_0 + h^{1/2}P_1 + hP_2 \text{ avec } P_0 = D_z^2 + (z - \zeta_0)^2 - \Theta_0 = H_{\zeta_0} - \Theta_0$$

$$P_1 = -2(z - \zeta_0)y$$

$$P_2 = D_y^2 + y^2$$

On cherche un quasi-mode de la forme $u_h = \varphi_0 + h^{1/2}\varphi_1 + h\varphi_2$ associé à une valeur propre $\gamma_h = \gamma_0 + h^{1/2}\gamma_1 + h\gamma_2$. Ainsi

$$h^0 : (P_0 - \gamma_0)\varphi_0 = 0$$

$$h^{1/2} : (P_0 - \gamma_0)\varphi_1 = \gamma_1\varphi_0 - P_1\varphi_0$$

$$h : (P_0 - \gamma_0)\varphi_2 = \gamma_2\varphi_0 + \gamma_1\varphi_1 - P_2\varphi_0 - P_1\varphi_1$$

$$h^0 \Rightarrow \gamma_0 = 0 \text{ et } \varphi_0(y, z) = v_{\zeta_0}(z)f(y)$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Construction des quasi-modes

Condition de compatibilité pour $h^{1/2}$:

$$\langle \gamma_1 \varphi_0 - P_1 \varphi_0, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, z)} = 0$$

On obtient $\gamma_1 = 0$ et on peut prendre

$$\varphi_1(y, z) = w_{\zeta_0}(z) y f(y), \quad \text{avec } w_{\zeta_0}(z) = (\partial_{\zeta} v_{\zeta})|_{\zeta=\zeta_0}$$

Condition de compatibilité pour h :

$$\langle \gamma_2 \varphi_0 - P_2 \varphi_0 - P_1 \varphi_1, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, z)} = 0$$

On obtient

$$\left(D_y^2 + \left(1 - 2 \int_{\mathbb{R}_+} (z - \zeta_0) w_{\zeta_0}(z) v_{\zeta_0}(z) dz \right) y^2 \right) f = \gamma_2 f$$

Alors $H_{\text{harm}} f = \gamma_2 f$ avec $H_{\text{harm}} = D_y^2 + \frac{\mu''(\zeta_0)}{2} y^2$

On prend pour f une fonction propre f_n de H_{harm} associée à

$$\lambda_{n, \text{harm}} = \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n - 1)$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Construction des quasi-modes

Condition de compatibilité pour $h^{1/2}$:

$$\langle \gamma_1 \varphi_0 - P_1 \varphi_0, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, z)} = 0$$

On obtient $\gamma_1 = 0$ et on peut prendre

$$\varphi_1(y, z) = w_{\zeta_0}(z) y f(y), \quad \text{avec } w_{\zeta_0}(z) = (\partial_{\zeta} v_{\zeta})|_{\zeta=\zeta_0}$$

Condition de compatibilité pour h :

$$\langle \gamma_2 \varphi_0 - P_2 \varphi_0 - P_1 \varphi_1, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, z)} = 0$$

On obtient

$$\left(D_y^2 + \left(1 - 2 \int_{\mathbb{R}_+} (z - \zeta_0) w_{\zeta_0}(z) v_{\zeta_0}(z) dz \right) y^2 \right) f = \gamma_2 f$$

Alors $H_{\text{harm}} f = \gamma_2 f$ avec $H_{\text{harm}} = D_y^2 + \frac{\mu''(\zeta_0)}{2} y^2$

On prend pour f une fonction propre f_n de H_{harm} associée à

$$\lambda_{n, \text{harm}} = \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}} (2n - 1)$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Approximation de Born-Oppenheimer

$$\mathfrak{L}_h = hD_y^2 + H_{\zeta_0 + y\sqrt{h}}(z) - \Theta_0$$

Pour établir une minoration, on utilise une technique de Born-Oppenheimer :

- remplacer $H_{\zeta_0 + y\sqrt{h}}$ par sa première valeur propre $\mu(\zeta_0 + y\sqrt{h})$
- implémenter l'approximation harmonique standard en limite semi-classique pour l'opérateur $1D \mathfrak{L}_{h,BO}$

$$\mathfrak{L}_{h,BO} = hD_y^2 + \mu(\zeta_0 + y\sqrt{h}) - \Theta_0$$

estimations d'Agmon
+ méthode de Grushin

$$\Pi_0 : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_y) \otimes \text{span}\{v_{\zeta_0}\}, w \mapsto \langle w, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_{+,z})} v_{\zeta_0}$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Approximation de Born-Oppenheimer

$$\mathfrak{L}_h = hD_y^2 + H_{\zeta_0 + y\sqrt{h}}(z) - \Theta_0$$

Pour établir une minoration, on utilise une technique de Born-Oppenheimer :

- remplacer $H_{\zeta_0 + y\sqrt{h}}$ par sa première valeur propre $\mu(\zeta_0 + y\sqrt{h})$
- implémenter l'approximation harmonique standard en limite semi-classique pour l'opérateur $1D \mathfrak{L}_{h,BO}$

$$\mathfrak{L}_{h,BO} = hD_y^2 + \mu(\zeta_0 + y\sqrt{h}) - \Theta_0$$

estimations d'Agmon
+ méthode de Grushin

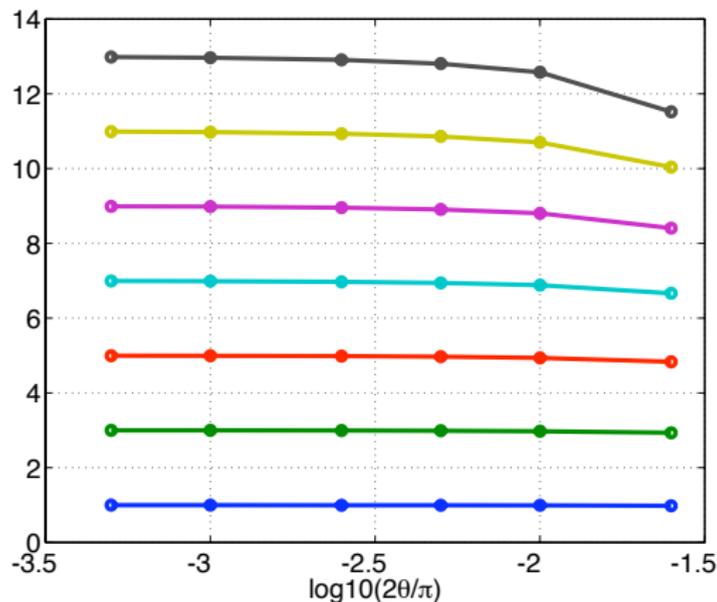
$$\Pi_0 : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_y) \otimes \text{span}\{v_{\zeta_0}\}, \quad w \longmapsto \langle w, v_{\zeta_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_{+,z})} v_{\zeta_0}$$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Simulations numériques - Convergence de $\rho_{n,1}(\theta) = \frac{\check{\sigma}_n(\theta) - \check{\Theta}_0}{\check{\alpha}_1 \theta}$, $n = 1, \dots, 7$ (bas en haut)

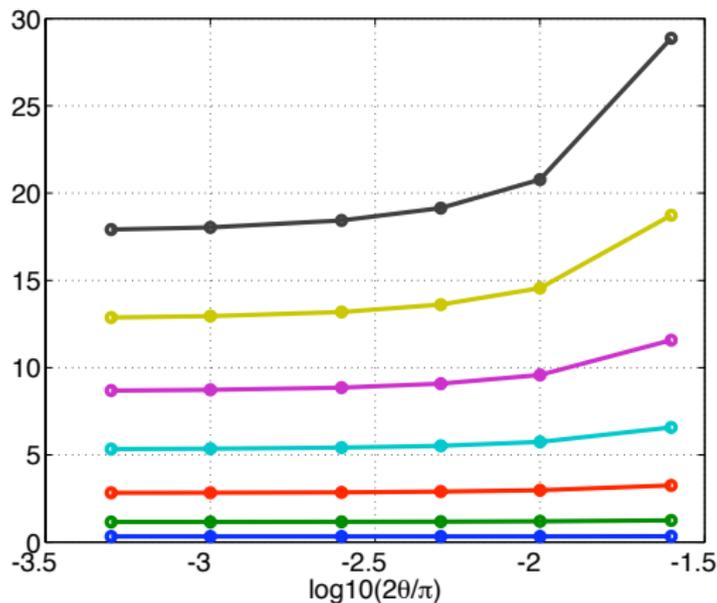
$$\frac{\sigma_n(\theta) - \Theta_0}{a_1 \theta} \rightarrow 2n - 1 \quad \text{quand } \theta \rightarrow 0 \quad \text{avec } a_1 = \sqrt{\frac{\mu''(\zeta_0)}{2}}$$

Valeurs approchées : $\check{\Theta}_0 = 0.590106125$ et $\check{\alpha}_1 \simeq 0.7651881$



Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

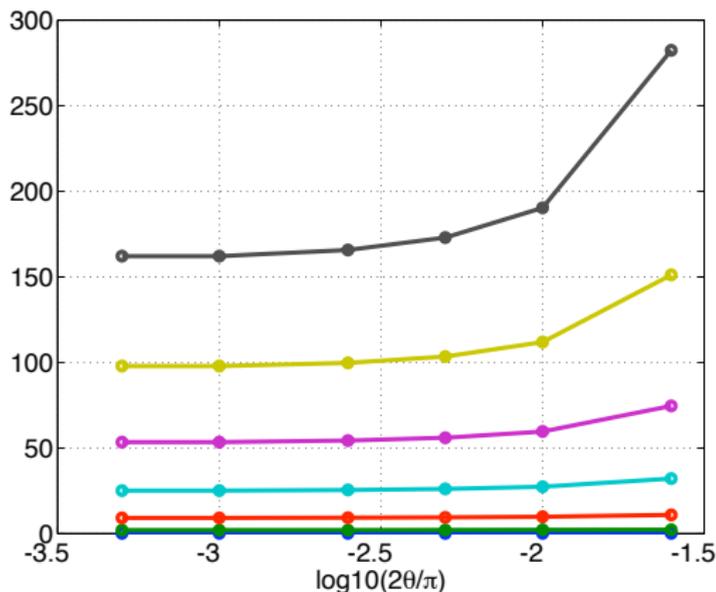
Simulations numériques - Convergence de $\rho_{n,2}(\theta) = \frac{\check{\theta}_0 + \check{a}_1(2n-1)\theta - \check{\sigma}_n(\theta)}{\theta^2}$, $n = 1, \dots, 7$



On observe que $\rho_{n,2}(\theta)$ converge vers une limite numérique $\check{a}_{n,2}$ quand $\theta \rightarrow 0$ pour $n = 1, \dots, 7$

Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

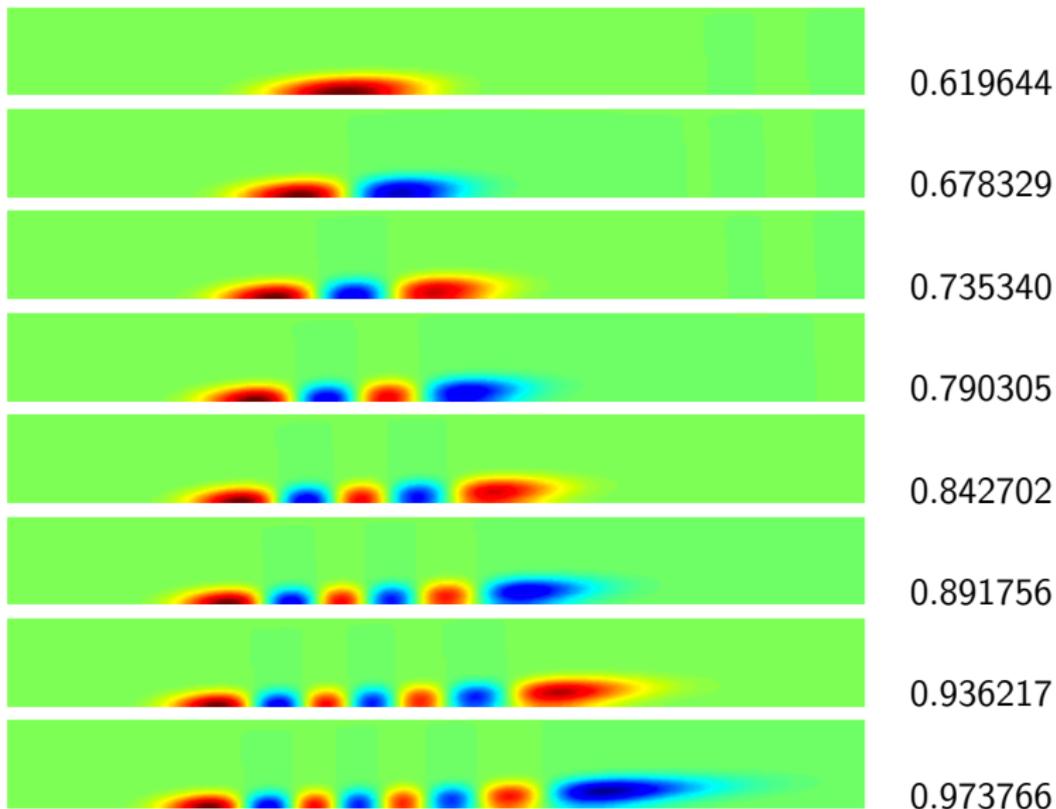
Simulations numériques - Convergence de $\rho_{n,3}(\theta) = \frac{\check{\Theta}_0 + \check{a}_1(2n-1)\theta - \check{a}_{n,2}\theta^2 - \check{a}_n(\theta)}{\theta^3}$, $n = 1, \dots, 7$



Conjecture. $\sigma_n(\theta) = \Theta_0 + a_1(2n-1)\theta - a_{n,2}\theta^2 - a_{n,3}\theta^3 + o(\theta^3)$

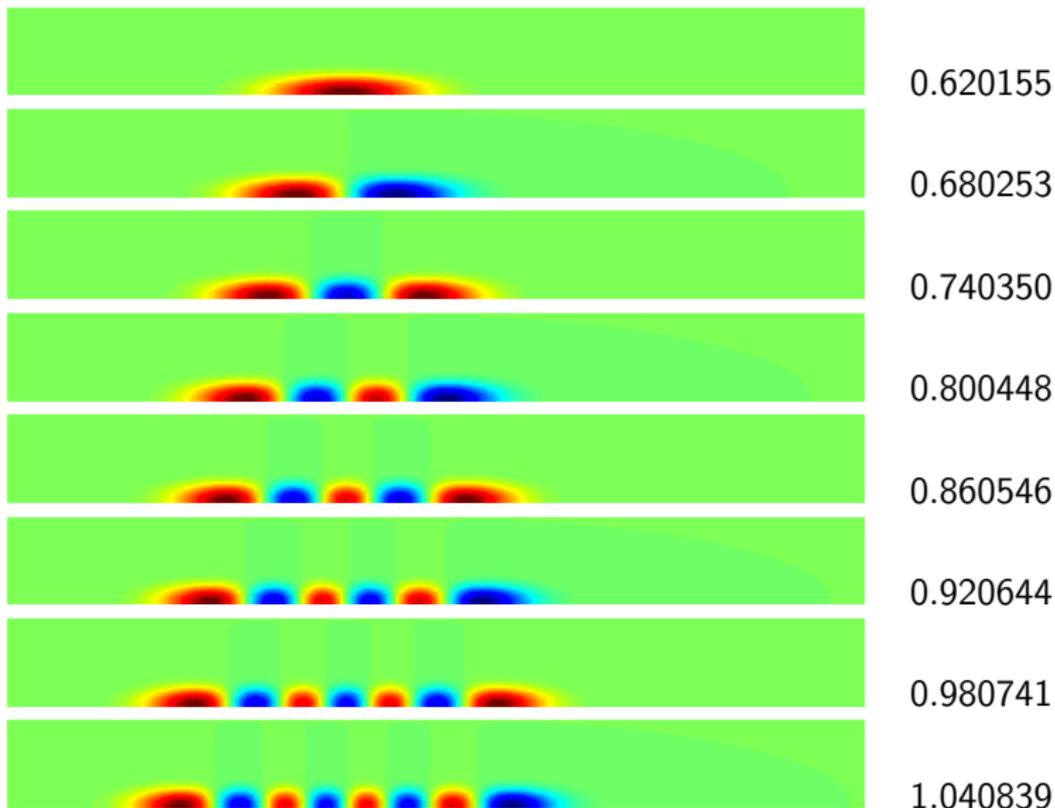
Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Simulations numériques - 8 premiers modes propres de $\mathcal{L}_\theta(20, 80, 10)$ pour $\theta = 0.0125\pi$



Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Simulations numériques - Quasimodes $\tilde{u}_{n,\theta}^b$ et $\check{\Theta}_0 + \check{a}_1(2n-1)\theta$ pour $\theta = 0.0125\pi$



Développement asymptotique quand $\theta \rightarrow 0$

Simulations numériques - Quasimodes $\tilde{u}_{n,\theta}^\sharp$ et $\check{\Theta}_0 + \check{a}_1(2n-1)\theta$ pour $\theta = 0.0125\pi$

