

Intégrateurs KAM-faible rapides pour les équations de Hamilton-Jacobi

Erwan Faou

INRIA

Rennes, 20 décembre 2012

Travail en collaboration avec [Anne Bouillard \(ENS Ulm\)](#),
[Maxime Zavidovique \(Univ. Paris 6\)](#).

Equations de Hamiton-Jacobi

$$\partial_t u + H(t, x, \nabla_x u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

- $u_0(x)$ globalement Lipschitzienne, $x \in \mathbb{R}^n$.
- **Applications** : Contrôle optimal, propagation de front (équation eikonale), théorie des jeux, calculs des variations, optique géométrique (développement BKW), etc...
- **Solutions de viscosité** (Crandall & Lions 84).
- **Cas séparable** : $H(t, x, p) = K(p) + V(t, x)$.
 K convexe, V bornée et régulière.
Hamiltoniens “mécaniques” :

$$H(t, x, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + V(t, x)$$

Bicaracteristiques Hamiltoniennes

Soit $u(t, x)$ une solution régulière de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q(t), \frac{\partial u}{\partial q}(t, q(t))) \quad (= \frac{\partial u}{\partial q}(t, q(t)) \text{ pour } K = \frac{1}{2}\|p\|^2)$$

Alors $(q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $p(t) = \frac{\partial u}{\partial q}(t, q(t))$ solution du système

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(t, q(t), p(t)), \\ \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q(t), p(t)). \end{cases}$$

Corollaire : $\Gamma_t = \{(q, \partial_q u(t, q)) \mid q \in \mathbb{R}^n\}$, φ_s^t flot Hamiltonien.

$$\implies \Gamma_t = \varphi_s^t(\Gamma_s).$$

En dimension 1 : $\partial_t u = \frac{1}{2}|\partial_x u|^2 + V(x)$, alors $U = \partial_x u$ est solution d'une équation du type Burgers

$$\partial_t U = U\partial_x U + \partial_x V.$$

Lagrangien

- Le Lagrangien est obtenu par transformée de Legendre

$$L(t, x, v) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} (p \cdot v - H(t, x, p)).$$

- Dans le cas séparable $L(t, x, v) = K^*(v) - V(t, x)$, où $K^*(v)$ est la transformée de Legendre de K .
- Quand $K(p) = \frac{1}{2} \|p\|^2$, alors $K^*(p) = K(p)$.
- Action** d'une courbe $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$A(\gamma) := \int_0^t L(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

Pour $\gamma(0) = x$ et $\gamma(t) = y$ donnés, les courbes Hamiltoniennes minimisent l'action.

Semi-groupe de Lax-Oleinik

Les solutions de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi satisfont, pour tout $t_1 > t_0 > 0$, (Lions 82, Fathi 05)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t_1, x) &= T_{t_0}^{t_1} u(t_0, x) \\ &= \inf_{\gamma(t_1)=x} u(t_0, \gamma(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} L(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.\end{aligned}$$

- Infimum est pris sur les courbes absolument continues $\gamma : (t_1, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\gamma(t_1) = x$.
- Le minimum est atteint en $\gamma_{t_0}^{t_1}(s; x)$ qui est \mathcal{C}^2 et satisfait les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v}(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) = \frac{\partial L}{\partial x}(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)).$$

- Quand $K(p) = \frac{1}{2} \|p\|^2$, on trouve

$$\ddot{\gamma}(s) = -\partial_x V(t, \gamma(s)).$$

Semi-groupe de Lax-Oleinik

Solutions de viscosité données par

$$u(t_1, x) = T_{t_0}^{t_1} u(t_0, x) = \inf_{\gamma(t_1)=x} u(t_0, \gamma(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} L(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Sous les hypothèses (pas les plus générales) :

(i) $K^* \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ est uniformément strictement convexe

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial^2 K^*}{\partial v^2}(v)(Y, Y) \geq c|Y|^2.$$

(ii) $V(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et

$$\forall j + q \leq 2, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad |\partial_t^j \partial_x^q V(t, x)| \leq B.$$

Semi-groupe de Lax-Oleinik

$$T_{t_0}^{t_1} u(t_0, x) = \inf_{\gamma(t_1)=x} u(t_0, \gamma(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} L(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

- Propriété de Markov : $T_{t_1}^{t_2} \circ T_{t_0}^{t_1}(u) = T_{t_0}^{t_2}(u)$ pour $t_2 \geq t_1 \geq t_0$.
- Monotonie : $u \leq v \implies T_{t_0}^{t_1}(u) \leq T_{t_0}^{t_1}(v)$.
- Opérateur borné : u global Lipschitz $\implies T_{t_0}^{t_1}(u)$ global Lipschitz.
- Invariance par translation : $T_{t_0}^{t_1}(u + c) = T_{t_0}^{t_1}(u) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Non expansivité

$$|T_0^t u - T_0^t v|_\infty \leq |u - v|_\infty$$

- Le minimiseur est atteint, mais pas toujours unique (chocs)
- Contrôle du comportement en temps long pour des potentiels périodiques

Comportement en temps long

Théorème (KAM-faible, Fathi 97)

Potentiel périodique :

$$\forall (m, M) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n, \quad V(t + m, x + M) = V(t, x),$$

$\exists \bar{H} \in \mathbb{R}, \exists u^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$ -periodique et continue telle que

$$T_t^{t+1} u^*(t, \cdot) = \bar{H} + u^*(t, \cdot).$$

De plus pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et uniformément bornée

$$\forall t > 0, \quad |T_0^t u - t\bar{H}|_\infty \leq C_u.$$

Comportement en temps long

Cas autonome :

- Au niveau de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$u(t, x) = t\bar{H} + u^*(x)$$

- Equivalent à u^* solution de viscosité de

$$H(x, \nabla_x u^*) = \bar{H}$$

(Lions, Papanicolaou & Varadhan 87, Fathi 97)

- De plus pour toute fonction u bornée et uniformément continue

$$|T_0^t u - t\bar{H} - u^*|_\infty \rightarrow 0$$

(questions ouvertes pour la vitesse de convergence)

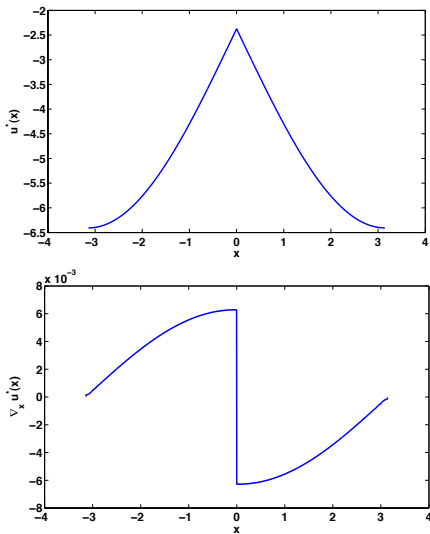


FIGURE : Solution KAM-faible, pendule

KAM vs. KAM-faible ?

Equation $H(x, \nabla u^*) = \bar{H}$ équivalente à la réduction à coefficient constant en théorie KAM.

Commentaire anonyme (Collègue de système dynamique)

“Il n’y a pas de connexion entre la théorie KAM-faible et ce qu’on fait : pas de petits dénominateurs à contrôler, rien !”

KAM vs. KAM-faible ?

Equation $H(x, \nabla u^*) = \overline{H}$ équivalente à la réduction à coefficient constant en théorie KAM.

Commentaire anonyme (Collègue de système dynamique)

“Il n’y a pas de connexion entre la théorie KAM-faible et ce qu’on fait : pas de petits dénominateurs à contrôler, rien !”

Commentaire anonyme (Collègue en théorie KAM-faible)

“L’expression “KAM-faible” doit être appréhendée à un niveau philosophique”

KAM vs. KAM-faible ?

Equation $H(x, \nabla u^*) = \overline{H}$ équivalente à la réduction à coefficient constant en théorie KAM.

Commentaire anonyme (Collègue de système dynamique)

"Il n'y a pas de connexion entre la théorie KAM-faible et ce qu'on fait : pas de petits dénominateurs à contrôler, rien !"

Commentaire anonyme (Collègue en théorie KAM-faible)

"L'expression "KAM-faible" doit être appréhendée à un niveau philosophique"

Analyse numérique : OK, mais comment résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi en préservant la structure en temps long ?

Méthodes numériques pour l'équation de Hamilton-Jacobi

- Beaucoup de schemas basés sur des approximations de type différences finies, et relation avec les lois de conservation hyperboliques
- Viscosité évanescence, ENO, WENO, etc..
Lions, Souganidis, Barles, Jakobsen, Tadmor & Li, Abgrall, Bryson & Levy, Shu, Jin & Xin, Lin & Tadmor, Jin & Osher, etc..
- Méthodes basées sur les bicaractéristiques (Résoudre le système d'EDO Hamiltoniennes + interpolation) (Benamou)
- Elements finis max-plus et contrôle optimal (Akian & Gaubert)
- Schémas semi-Lagrangien (Falcone & Ferretti)
- Peu d'estimations d'erreur. Notion d'ordre élevé?

Discretisation su semi-groupe de Lax-Oleinik

Pas de temps $\tau > 0$. Dans le cas autonome

$$T^\tau u(x) = \inf_{\gamma(\tau)=x} u(\gamma(0)) + \int_0^\tau L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

Grille en espace $G_\varepsilon = \varepsilon\mathbb{Z}^n = \{x_j = \varepsilon j \mid j \in \mathbb{Z}^n\}$. L'ensemble

$$\{\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma(\tau) = x\}$$

est discrétisé par

$$\left\{ s \mapsto y + s \frac{x - y}{\tau} \mid y \in G_\varepsilon, s \in [0, \tau] \right\}.$$

Premier niveau d'approximation :

$$x \in G_\varepsilon, \quad T_\varepsilon^\tau u(x) = \inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + \int_0^\tau L\left(y + s \frac{x - y}{\tau}, \frac{x - y}{\tau}\right) ds$$

Estimation d'erreur

Approximation de l'intégrale :

$$\int_0^\tau L\left(y + s \frac{x-y}{\tau}, \frac{x-y}{\tau}\right) ds \simeq \tau L\left(x, \frac{x-y}{\tau}\right)$$

Algorithme complètement discrétisé :

$$x \in G_\varepsilon, \quad \mathcal{T}_\varepsilon^\tau u(x) = \inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + \tau L\left(x, \frac{x-y}{\tau}\right)$$

Théorème

Soit $T > 0$, ε_0 , τ_0 and $h_0 > 0$ et $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz bornée. $\exists M$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\tau < \tau_0$, $\varepsilon/\tau < h_0$

$$\left| (T^{N\tau} u)|_{G_\varepsilon} - \mathcal{T}_\varepsilon^{N\tau}(u|_{G_\varepsilon}) \right|_\infty \leq M(T) \left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau \right), \quad \text{for } N\tau \leq T.$$

où

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{N\tau} u(x) = \mathcal{T}_\varepsilon^\tau \circ \dots \circ \mathcal{T}_\varepsilon^\tau u(x).$$

Estimation d'erreur

Idée de preuve

- Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ un minimiseur du problème continu :

$$T^{N\tau} u(x) = u(\gamma(0)) + \int_0^T L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

- Projection de $\gamma(s)$ sur la grille : $y_i = \varepsilon \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \gamma_t(t_i) \rfloor$ et on définit la fonction continue linéaire par morceaux $t_i = i\tau$,

$$\gamma_{\varepsilon, \tau}(s) = y_i + (s - t_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{\tau}, \quad \text{pour } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

Contrôle de

$$|\dot{\gamma}_{\varepsilon, \tau}(s) - \dot{\gamma}(s)| \leq C(\tau + \frac{\varepsilon}{\tau}).$$

- Estimées crucial : contrôle a priori de $\ddot{\gamma}(s)$ et surtout $\dot{\gamma}(s)$.

Estimation d'erreur

Idée de preuve

- $x = x_N$, il existe x_{N-1} minimiseur du problème discret

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\varepsilon^\tau \circ \mathcal{T}_\varepsilon^{(N-1)\tau} u(x_N) &= \mathcal{T}_\varepsilon^{(N-1)\tau} u(x_{N-1}) + \tau L(x_N, \frac{x_N - x_{N-1}}{\tau}) \\ &= \mathcal{T}_\varepsilon^{(N-1)\tau} u(x_{N-1}) + c_\tau(x_{N-1}, x_N)\end{aligned}$$

- Il existe une suite $\{x_i\}$, $i = 0, \dots, N$ telle que $x_N = x$ et

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{N\tau}(x_N) = u(x_0) + \sum_{i=0}^{N-1} c_\tau(x_i, x_{i+1})$$

- On construit la courbe linéaire par morceaux ($t_i = i\tau$),

$$\eta_{\varepsilon, \tau}(s) = x_i + (s - t_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{\tau}, \quad \text{pour } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

- Comparaison des actions de $\eta_{\varepsilon, \tau}(s)$ et $\gamma_{\varepsilon, \tau}(s)$ en utilisant les propriétés minimisantes et contrôle des dérivées $\dot{\gamma}(s)$.

Estimation d'erreur

Lemme

Pour tout $T > 0$, $R > 0$, $\exists C(R, T)$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| \leq R$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout solution de l'équation d'Euler-Lagrange minimisant l'action

$$\int_0^T L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds,$$

avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(T) = y$ fixés, satisfait $|\dot{\gamma}(s)| \leq C(R, T)$ for all $s \in [0, T]$.

Propriété cruciale du Lagrangien : superlinearité. Pour une constante A ,

$$L(x, v) \geq |v| - A$$

Comportement du schéma en temps long

Que se passe-t'il dans le cas périodique ?

Lemme de John N. Mather :

Lemma

Dans le cas périodique, la constante $C(R, T)$ est une fonction croissante de R/T :

Pour tout $\Gamma > 0$, $\exists \Gamma'$ telle que tout minimiseur $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $b - a \geq 1$ et $|\gamma(b) - \gamma(a)| / (b - a) \leq \Gamma$ satisfait

$$\forall t \in [a, b], \quad |\dot{\gamma}(t)| \leq \Gamma'.$$

Permet d'avoir un meilleur contrôle des constantes

Comportement en temps long du schéma : cas périodique

Dans le cas où $V(t, x, v)$ est 1-périodique en x et t :

Théorème

Soit $T_0 > 1$, $\varepsilon_0, \tau_0, h_0 > 0$ et $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz bornée. $\exists M$ telle que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\tau < \tau_0$, $\varepsilon/\tau \leq h_0$ et $N\tau \geq T_0$

$$\left| (\mathcal{T}_t^{N\tau} u)|_{G_\varepsilon} - \mathcal{T}_{t,\varepsilon}^{N\tau}(u)|_{G_\varepsilon} \right|_\infty \leq M(N\tau) \left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau \right).$$

Comportement en temps long du schéma : cas périodique

$$\Lambda = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\ell} \right) \mid (k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\},$$

Théorème (Théorème KAM-faible discret, Bernard & Buffoni 07, Zavidovique 12)

Pour tout $(\varepsilon, \tau) \in \Lambda$, $\exists \bar{H}_{\varepsilon, \tau}$ et $u_{\varepsilon, \tau}^* : \tilde{G}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{T}_\varepsilon^1 u_{\varepsilon, \tau}^* = u_{\varepsilon, \tau}^* + \bar{H}_{\varepsilon, \tau}.$$

De plus pour tout u bornée sur G_ε en $t = 0$, on a

$$\frac{1}{N_\tau} \mathcal{T}_\varepsilon^{N_\tau} u \longrightarrow \bar{H}_{\varepsilon, \tau} \quad \text{in } L^\infty.$$

Cas autonome : Théorème de Perron-Frobenius pour l'algèbre $(\min, +)$.

Comportement en temps long du schéma : cas périodique

Théorème

On a

$$|\overline{H}_{\varepsilon, \tau} - \overline{H}| \leq M \left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau \right),$$

Preuve : On prend la limite en temps dans l'estimée

$$\left| (\mathcal{T}_t^{N\tau} u)|_{G_\varepsilon} - \mathcal{T}_{t, \varepsilon}^{N\tau}(u|_{G_\varepsilon}) \right|_\infty \leq M(N\tau) \left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau \right).$$

Comportement en temps long du schéma : cas périodique

Théorème

On a

$$|\overline{H}_{\varepsilon, \tau} - \overline{H}| \leq M\left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau\right),$$

Preuve : On prend la limite en temps dans l'estimée

$$\left| (\mathcal{T}_t^{N\tau} u)|_{G_\varepsilon} - \mathcal{T}_{t, \varepsilon}^{N\tau}(u)|_{G_\varepsilon} \right|_\infty \leq M(N\tau)\left(\frac{\varepsilon}{\tau} + \tau\right).$$

Conclusion : Intégrateur géométrique !

Convolution (min,plus) rapide

Algorithme discret : dans le cas $L(x, v) = K^*(v) - V(x)$

$$\begin{aligned}x \in G_\varepsilon, \quad \mathcal{T}_\varepsilon^\tau u(x) &= \inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + \tau L(x, \frac{x-y}{\tau}) \\ &= -\tau V(x) + \inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + \tau K^*(x, \frac{x-y}{\tau})\end{aligned}$$

(jusque là : méthode de splitting!)

$$\begin{aligned}\inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + K^*(\frac{x-y}{\tau}) &= \bigoplus_{y \in G_\varepsilon} \left[u(y) \otimes K_\tau(x-y) \right] \\ &= (u * K_\tau)(x)\end{aligned}$$

Algèbre (min,plus) :

$$u \oplus v = \inf(u, v), \quad u \otimes v = u + v.$$

Calcul brutal : N^2 pour N points sur la grille

Convolution (min,plus) rapide

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si f est telle que

$$\begin{cases} f(x) < \infty & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x) = \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Convolution (min,plus) :

$$f * g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} f(y) + g(x - y).$$

f affine par morceaux : $\exists a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tels que

$$f = \min_{i \in \{0, \dots, n-1\}} f_i,$$

avec $f_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ affine. Pour $i = 0, \dots, n-1$, on note

$$f'_i = \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} \quad \text{la pente de } f \text{ sur } [a_i, a_{i+1}].$$

Convolution (min,plus) rapide

Lemme (Convolution d'une fonction convexe par une fonction affine)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe affine par morceaux et $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ affine de pente g' . Alors $f * g : [a + c, b + d] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction convexe affine par morceaux définie par

$$f * g(x) = \begin{cases} f(x - c) + g(c) & \text{si } a + c \leq x \leq \alpha + c \\ f(\alpha) + g(x - \alpha) & \text{si } \alpha + c < x \leq \alpha + d \\ f(x - d) + g(d) & \text{si } \alpha + d < x \leq b + d, \end{cases}$$

où $\alpha = \min\{a_i \mid \text{dans la décomposition de } f \mid f'_i \geq g'\}$.

Convolution (min,plus) rapide

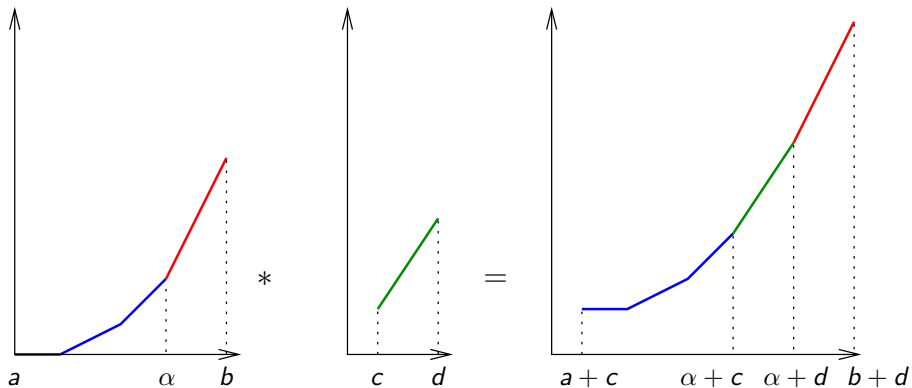


FIGURE : Convolution d'une fonction convexe par une fonction affine.

Convolution (min,plus) rapide

[Le Boudec & Thiran 04, Bouillard & Thierry 08]

Theorem (Convolution de deux fonctions convexes)

*Soient f et g convexe et affines par morceaux, alors $f * g$ est obtenue en mettant bout à bout les différentes parties affines de f et g , triées par pentes croissantes.*

Avantage : algorithme linéaire.

Convolution (min,plus) rapide

Theorem (Convolution d'une fonction convexe par une fonction concave)

La convolution (min,plus) d'une fonction convexe et d'une fonction concave se décompose en trois parties (éventuellement réduites à des points) : Une fonction convexe, une fonction concave et une fonction convexe.

Partant de là : encore un algorithme linéaire.

Convolution (min,plus) rapide

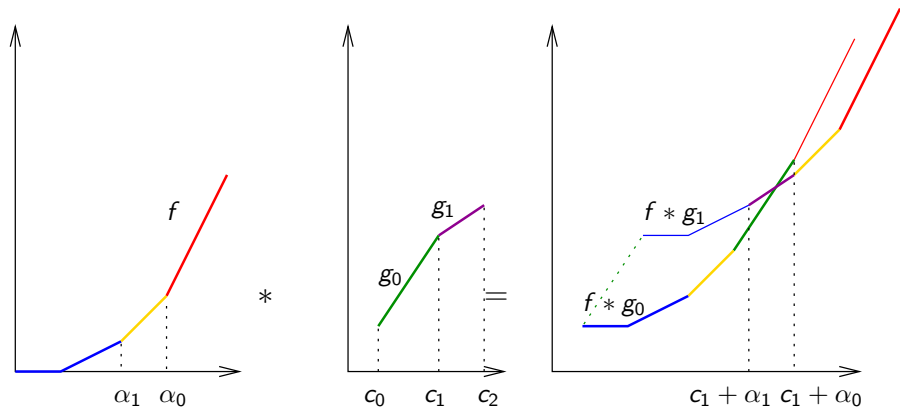


FIGURE : Convolution d'une fonction convexe par une fonction concave.

Convolution (min,plus) rapide

Calcul de

$$\inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + K^*\left(\frac{x-y}{\tau}\right) = (u * K_\tau)(x)$$

- 1 Décomposition de u en parties convexes et concave (coût linéaire)
- 2 Pour chaque parties convexes et concave, effectuer la convolution avec K_τ
- 3 Prendre le minimum de ces convolutions.
- 4 Coût global pour une grille à N points : αN où α est le nombre de composantes convexes et concaves

Dimension supérieure

En dimension $n \geq 1$, Si on suppose que pour $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $K(v) = K_1(v_1) + \dots + K_n(v_n)$ avec des Lagrangiens convexes K_i^* , $i = 1, \dots, n$, alors

$$\begin{aligned} \inf_{y \in G_\varepsilon} u(y) + \tau K^*\left(\frac{x-y}{\tau}\right) &= \\ \inf_{y_n \in G_\varepsilon^n} \left[\tau K_n^*\left(\frac{x_n - y_n}{\tau}\right) + \left[\inf_{y_{n-1} \in G_\varepsilon^{n-1}} \tau K_{n-1}^*\left(\frac{x_{n-1} - y_{n-1}}{\tau}\right) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\inf_{y_1 \in G_\varepsilon^1} \tau K_1^*\left(\frac{x_1 - y_1}{\tau}\right) + u(y_1, \dots, y_n) \right] \dots \right] \right] = \\ &\quad \mathcal{T}_{t,\varepsilon}^{\tau,1} \circ \dots \circ \mathcal{T}_{t,\varepsilon}^{\tau,n} u(x), \end{aligned}$$

Coût linéaire (N^n au lieu N^{2n} sur des grilles pleines).

Simulation numérique

On prend le Hamiltonien

$$H(x, p) = \frac{1}{2}|p + 1|^2 + 1 - \cos(x)$$

$x \in [-\pi, \pi]$. $N = 600$ points ($\varepsilon = 1.7e - 3$). $\tau = \sqrt{\varepsilon} = 0.04$.

$u_0(x) = \cos(2x)$.

Remis à l'échelle, tel que $u(t, -\pi) = 0$.

Comparaison avec l'algorithme WENO5

Simulation numérique

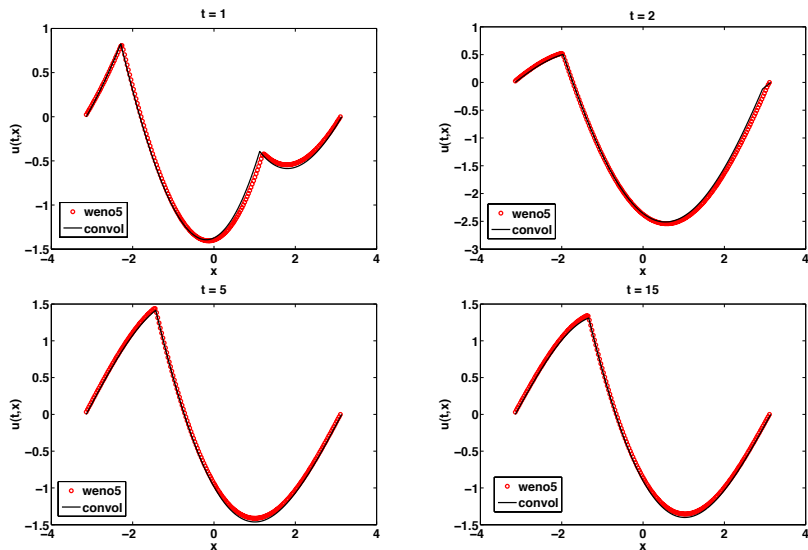


FIGURE : Solutions avec $\eta = 0$. CPU = 6s pour $t = 15$

Simulation numérique

Problème avec la décomposition convexe-concave : les lignes droites.

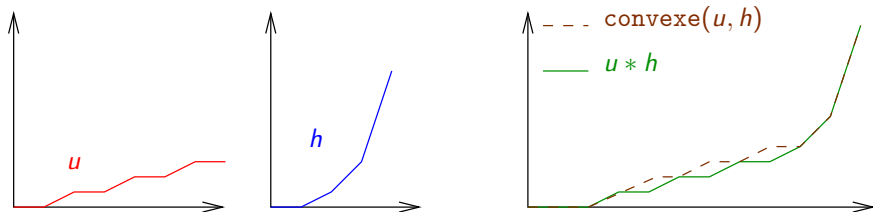


FIGURE : Régularisation des lignes droites

On introduit un paramètre de régularisation convexe η .

Simulation numérique

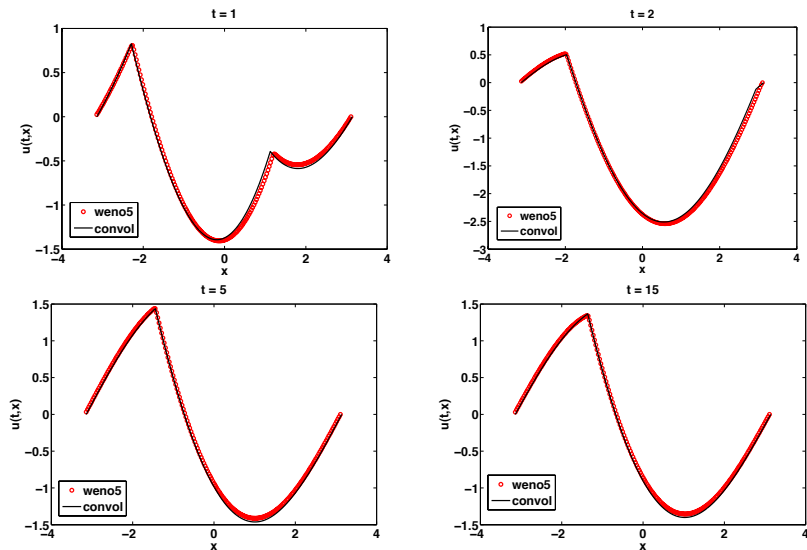


FIGURE : Solutions avec $\eta = 1.7e - 2$. CPU = 0.3s at $t = 15$

Simulation numérique

Comportement en temps longs : $K(p) = \frac{1}{2}|p + 2|^2$, $P = 2$,
 $V(t, x) = \sin(t) \cos(2x)$, $\varepsilon = 0.01$ et $\tau = 0.1$. $\eta = 0$ $u_0(x) = -\cos(3x)$.
 $\overline{H} = 2!$

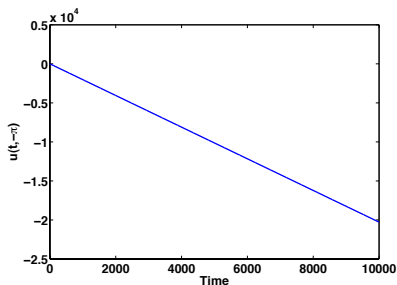


FIGURE : Evolution de $u(t, -\pi)$ en temps long

Simulation numérique

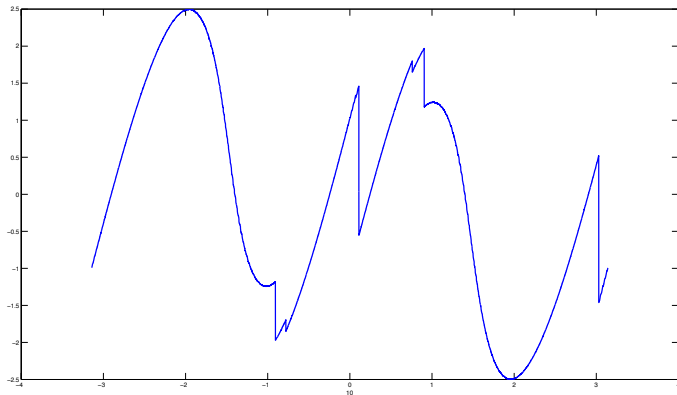


FIGURE : Une infinité de chocs ?

Conclusion et perspectives

- Nouvelle classe de schéma basés sur la discrétisation du semi groupe de Lax-Oleinik pour les équations de Hamilton-Jacobi.
- Intégrateurs géométriques (théorème KAM-faible discret)
- Implémentation rapides en 1D ou pour des Hamiltoniens tensorisés.
- Beaucoup de choses restent à faire (Implémentation rapide en 2D, estimations d'erreur, estimation d'erreur d'ordres plus élevés, etc..)