

# Méthodes numériques eulériennes d'ordre élevé pour des modèles hybrides fluide-cinétique

A. Crestetto <sup>1,2</sup>   N. Crouseilles <sup>2,3</sup>   J. Massot <sup>4</sup>

<sup>1</sup>LMJL, Univ. Nantes

<sup>2</sup>Inria Univ Rennes 1 – MINGuS & IRMAR Rennes

<sup>3</sup>IRMAR, Univ. Rennes (France)

<sup>4</sup>Ecole Polytechnique, CMAP

Journée ananum, 24 mai 2022

The logo for Inria, featuring the word "Inria" in a stylized, cursive blue font.

## 1 Modélisation

## 2 Intégrateurs temporels

- Splitting
- Méthode exponentielle
- Méthode de pas de temps adaptatifs

## 3 Résultats numériques

- Validation numérique de LHM (1dx-1dv)
- Comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)
- LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

## 4 Conclusion

## 1 Modélisation

## 2 Intégrateurs temporels

- Splitting
- Méthode exponentielle
- Méthode de pas de temps adaptatifs

## 3 Résultats numériques

- Validation numérique de LHM (1dx-1dv)
- Comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)
- LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

## 4 Conclusion

On considère un plasma composé de 2 populations de différentes températures  $T_c, T_h$  telles que  $\frac{T_c}{T_h} \ll 1$

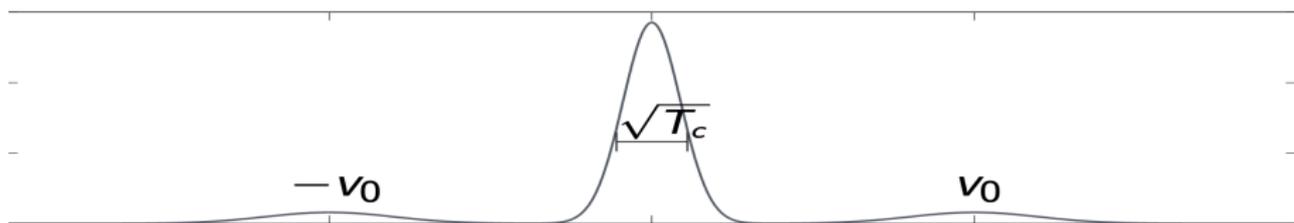


Figure:  $\mathcal{M}_{\rho_c, 0, T_c}(v) + \frac{1}{2} \left[ \mathcal{M}_{\rho_h, -v_0, T_h}(v) + \mathcal{M}_{\rho_h, v_0, T_h}(v) \right]$

avec  $\mathcal{M}_{\rho, u, T}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2T}\right)$

Sous de telles hypothèses (plasma de fusion, interaction vent solaire avec magnétosphère), les simulations Vlasov deviennent très coûteuses et des modèles dits réduits sont nécessaires.

Le modèle complet serait le modèle de Vlasov-Maxwell pour les électrons ( $f(t, x, v)$ ,  $E(t, x)$ ,  $B(t, x)$ ):

$$\begin{aligned}\partial_t f + v \cdot \nabla f + \frac{q_e}{m_e} (E + v \times (B + B_0)) \cdot \nabla_v f &= 0, \\ \partial_t B &= -\nabla \times E, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t E &= \nabla \times B - \mu_0 q_e \int_{\mathbb{R}^3} v f dv, \\ \nabla \cdot E &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ q_i \rho_i + q_e \int_{\mathbb{R}^3} f dv \right], \quad \nabla \cdot B = 0.\end{aligned}$$

Les quantités dites macroscopiques sont obtenues via des moyennes en vitesse de  $f$

$$\begin{aligned}\rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad u(t, x) = \frac{1}{\rho(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv, \\ T(t, x) &= \frac{1}{3\rho(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u(t, x)|^2 f(t, x, v) dv.\end{aligned}$$

Lorsque  $f(t, x, v) \approx \mathcal{M}_{\rho(t, x), u(t, x), T(t, x)}(v)$ , des équations sur  $\rho, u, T$  suffisent puisque le profil en vitesse est donné.

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_c + \nabla \cdot (\rho_c u_c) &= 0, \\
\partial_t u_c + (u_c \cdot \nabla) u_c &= \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E} + u_c \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)), \\
\partial_t f_h + \mathbf{v} \cdot \nabla f_h + \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_h &= 0, \\
\partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\
\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 q_e \rho_c u_c - \mu_0 q_e \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_h d\mathbf{v}, \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left[ q_i \rho_i + q_e \rho_c + q_e \int_{\mathbb{R}^3} f_h d\mathbf{v} \right], \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.
\end{aligned}$$

Ici, on a fait l'approximation dite "plasma froid" de sorte que

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \approx \rho_c(t, \mathbf{x}) \delta_{\mathbf{v} - u_c(t, \mathbf{x})}(\mathbf{v}) + f_h(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

C'est la version non-linéaire. On peut linéariser autour d'un état stationnaire homogène ( $\rho_c = \rho_c^{(0)}$ ,  $u_c = 0$ ,  $\mathbf{E} = 0$ ,  $f_h = f_h^0(v_x^2 + v_y^2, v_z)$ ).

En variables adimensionnées, on obtient le modèle dit **LHM** system<sup>1</sup>  
( $\mathbf{j}_c = \rho_c \mathbf{u}_c$ )

$$\partial_t \mathbf{j}_c = \bar{\Omega}_{pe}^2 \mathbf{E} - \mathbf{j}_c \times \mathbf{B}_0, \quad (1)$$

$$\partial_t f_h + \mathbf{v} \cdot \nabla f_h - (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_h = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j}_c + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_h \, d\mathbf{v}, \quad (4)$$

avec  $\bar{\Omega}_{pe}^2 = \Omega_{pe}^2 / \Omega_{ce}^2$ .

---

<sup>1</sup>Holderied et al. 20', Tronci et al. 20', Morrisson 18'

LHM possède une structure de Poisson avec le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx}_{\mathcal{H}_E} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{B}|^2 dx}_{\mathcal{H}_B} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\bar{\Omega}_{pe}^2} |j_c|^2 dx}_{\mathcal{H}_{j_c}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 f_h dx dv}_{\mathcal{H}_{f_h}}$$

et le crochet de Poisson

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}[j_c, \mathbf{B}, \mathbf{E}, f_h] = \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{VM} + \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{jE},$$

avec

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{jE} = \int_{\Omega} \bar{\Omega}_{pe}^2 \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta j_c} \cdot \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{E}} - \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta j_c} \cdot \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{E}} \right) dx + \int_{\Omega} \bar{\Omega}_{pe}^2 \mathbf{B}_0 \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta j_c} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta j_c} \right) dx.$$

Ainsi LHM se reformule  $U = (j_c, \mathbf{B}, \mathbf{E}, f_h)^2$

$$\partial_t U = \{U, \mathcal{H}\}.$$

<sup>2</sup>Voir aussi Tronci et al. 14', Morisson et al. 18' ou Holderied et al. 20'.

# Un autre point de vue

Avec les notations  $\nabla \times \mathbf{u} = \hat{\nabla} \mathbf{u}$ ,  $\mathcal{L} := \mathbf{v} \cdot \nabla - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}$ ,  
 $\hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{j}_c = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{j}_c$ ,  $\tilde{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$ , on reformule LHM en séparant les termes  
linéaires et non-linéaires, avec  $\mathbf{U} = (\mathbf{j}_c, \mathbf{B}, \mathbf{E}, f_h)$

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A} \mathbf{U} + \mathbf{N}(t, \mathbf{U}) = 0$$

et  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{10,10}$

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{B}}_0 & 0_3 & -\bar{\Omega}_{pe}^2 \mathbf{I}_3 & \tilde{\mathbf{0}}^T \\ 0_3 & 0_3 & \hat{\nabla} & \tilde{\mathbf{0}}^T \\ \mathbf{I}_3 & -\hat{\nabla} & 0_3 & \tilde{\mathbf{0}}^T \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \mathcal{L} \end{pmatrix} \mathbf{U},$$

et

$$\mathbf{N}(t, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{0}}^T \\ \tilde{\mathbf{0}}^T \\ -\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_h \, d\mathbf{v} \\ -(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_h \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de construire des méthodes numériques pour LHM telles que

- ordre élevé en temps, espace et vitesse
- efficace d'un point vue computationnel (évitons les CFL)

Les deux formulations suggèrent l'utilisation de deux intégrateurs

- splitting Hamiltonien
- intégrateur exponentiel

On verra

- comment construire des méthodes numériques
- pour valider LHM par rapport au modèle complet (1dx-1dv) quand  $T_c \rightarrow 0$
- pour comparer les deux approches (1dx-1dv et 1dx-3dv)

## 1 Modélisation

## 2 Intégrateurs temporels

- Splitting
- Méthode exponentielle
- Méthode de pas de temps adaptatifs

## 3 Résultats numériques

- Validation numérique de LHM (1dx-1dv)
- Comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)
- LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

## 4 Conclusion

# Splitting Hamiltonien

*Splitting Hamiltonien* → utile pour trier les termes d'un modèle complexe

Rappelons

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |E|^2 dx}_{\mathcal{H}_E} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |B|^2 dx}_{\mathcal{H}_B} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\bar{\Omega}_{pe}^2} |j_c|^2 dx}_{\mathcal{H}_{j_c}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_h dx dv}_{\mathcal{H}_{f_h}}.$$

$U = (j_c, B, E, f_h)$ , and  $\{\cdot, \cdot\}$  est le crochet

$$\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_E\} + \{U, \mathcal{H}_B\} + \{U, \mathcal{H}_{j_c}\} + \{U, \mathcal{H}_{f_h}\}.$$

Par exemple, les équations correspondant à  $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_E\}$  s'écrivent

$$\partial_t f_h = E \cdot \nabla_v f_h, \quad \partial_t E = 0, \quad \partial_t B = -\nabla \times E, \quad \partial_t j_c = \bar{\Omega}_{pe}^2 E.$$

et les équations correspondant à  $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_B\}$  s'écrivent

$$\partial_t f_h = 0, \quad \partial_t E = \nabla \times B, \quad \partial_t B = 0, \quad \partial_t j_c = 0.$$

... (les équations pour  $\mathcal{H}_{f_h}$  sont un peu plus compliquées) mais ...

... chaque sous-système  $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_*\}$  peut être résolu *exactement* en temps.

En notant  $\varphi_{\Delta t}^{[*]}(U^n)$  with  $U^n \approx U(t^n)$ ,  $t^n = n\Delta t$ , le splitting s'écrit alors

$$U^{n+1} \approx \varphi_{\Delta t}^{[E]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[j_c]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[f_h]}(U^n),$$

(ordre élevé par composition)

Pour l'approximation en  $(x, v)$ : Fourier (FFT) en espace et interpolation de Lagrange en vitesse (via la méthode semi-Lagrangienne).

Quelques remarques

- **Pros:** "facile" à implémenter, réutilisation de la mémoire, (presque) pas de CFL, bonnes propriétés en temps long ("near energy conservation" pour méthodes symplectiques)
- **Cons:** le nombre d'étapes de vient important pour atteindre l'ordre élevé

A partir de  $\partial_t U + AU + N(t, U) = 0$ , une formule de Duhamel donne

$$U(t^{n+1}) = e^{-\Delta t A} U(t^n) - \underbrace{\int_0^{\Delta t} e^{(s-\Delta t)A} N(t^n + s, U(t^n + s)) ds}_{\equiv \mathcal{I}}$$

Deux options possibles pour approcher l'intégrale  $\mathcal{I}$  (voir aussi <sup>3</sup>)

- $\mathcal{I} \approx \int_0^{\Delta t} e^{(s-\Delta t)A} ds N(t^n, U(t^n)) \rightarrow$  méthodes exponentielles
- $\mathcal{I} \approx \Delta t e^{-\Delta t A} N(t^n, U(t^n)) \rightarrow$  méthodes Lawson

Pour l'approximation en  $(x, v)$ : Fourier (FFT) en espace et WENO5 pour la partie non-linéaire  $(E + v \times B) \cdot \nabla_v f_h$

---

<sup>3</sup>Extension [Hochbruck-Ostermann, 10']

# Pour les problèmes hyp-hyp, *Lawson*<sup>4</sup>

Considérons  $\dot{u} = iau + \lambda u$ ,  $a \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

Formule de Duhamel  $\rightarrow u(t^{n+1}) = e^{ia\Delta t} u(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} e^{ia(t^{n+1}-s)} \lambda u(s) ds.$

- méthodes Lawson

$$u^{n+1} = e^{ia\Delta t} (1 + \lambda\Delta t) u^n \quad (\text{Lawson})$$

Plus généralement,  $u^{n+1} = e^{ia\Delta t} \phi(\lambda\Delta t) u^n$  pour laquelle la condition de stabilité  $|e^{ia\Delta t} \phi(z)| = |\phi(z)| \leq 1$  est la même que pour la méthode de Runge-Kutta pour  $\dot{y} = \lambda y$  *indépendamment de a*.

- méthodes exponentielles

$$u^{n+1} = \left[ e^{ia\Delta t} + \lambda\Delta t \frac{e^{ia\Delta t} - 1}{ia\Delta t} \right] u^n \quad (\text{Exponentielle})$$

La fonction de stabilité est plus complexe et *dépend de a*.

---

<sup>4</sup>C.-Einkemmer-Massot, JCP 20'

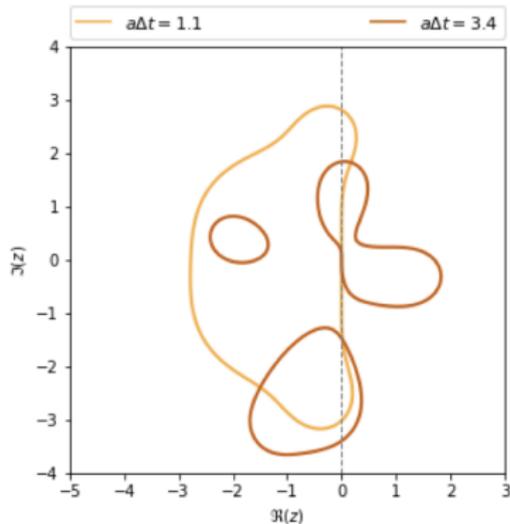
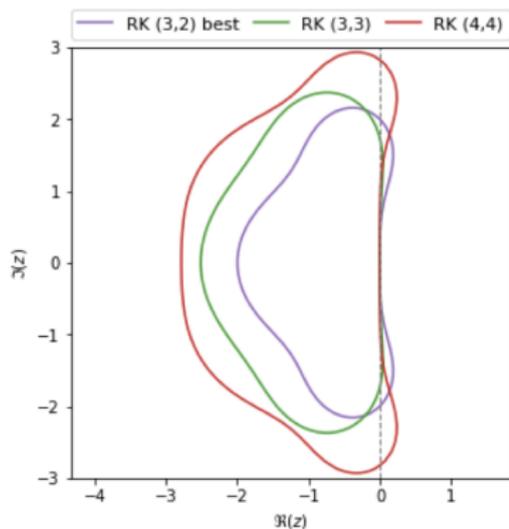


Figure: Domaine de stabilité de quelques méthodes de Runge-Kutta (left) et de l'intégrateur exponentiel pour différentes valeurs de  $a$ .

### Quelques remarques

- **Pros:** on enlève la CFL de la partie linéaire, réutilisation des méthodes RK, efficacité
- **Cons:** CFL de la partie non linéaire, mémoire (stockage d'inconnues intermédiaires)

Pour une EDO  $\dot{u} = f(t, u(t))$ , deux intégrateurs peuvent être combinés pour estimer l'erreur locale

$$u_{[\rho]}^{n+1} = u(t^{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^{\rho+1}) \quad u_{[\rho+1]}^{n+1} = u(t^{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^{\rho+2})$$

D'où l'estimation de l'erreur locale  $L_{[\rho]}^{n+1} = \left| u_{[\rho+1]}^{n+1} - u_{[\rho]}^{n+1} \right|$

- si  $L_{[\rho]}^{n+1} > \text{tol}$ : on rejette l'étape et on revient au temps  $t^n$ .
- sinon, on accepte l'itération

et dans tous les cas, le nouveau pas de temps est

$$\Delta t_{\text{new}} = \sqrt[\rho]{\frac{\text{tol}}{L_{[\rho]}^{n+1}}} \Delta t_n$$

En pratique, cette stratégie permet de détecter des instabilités numériques et calcule automatiquement la CFL non-linéaire.

# Comment choisir les *deux integrateurs* ?

- Pour un splitting qui contient suffisamment d'étages

$$U_{[4]}^{n+1} = \mathcal{S}_{\Delta t}(U^n) = S_{\alpha_1 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_3 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_1 \Delta t}(U^n).$$

The diagram illustrates the nesting of brackets under the operators in the equation above. The innermost bracket is labeled  $U^{(1)}$  and covers the last operator  $S_{\alpha_1 \Delta t}$ . The next bracket is labeled  $U^{(2)}$  and covers the last two operators  $S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_1 \Delta t}$ . The next bracket is labeled  $U^{(3)}$  and covers the last three operators  $S_{\alpha_3 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_1 \Delta t}$ . The outermost bracket is labeled  $U^{(4)}$  and covers all four operators  $S_{\alpha_1 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_3 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_1 \Delta t}$ .

[Blanes et al, 19']:  $U_{[3]}^{n+1} = \text{C.L.}(U^n, U^{(s)})$  sans coût supplémentaire

$$\text{Et } L_{[3]}^{n+1} = \left\| U_{[4]}^{n+1} - U_{[3]}^{n+1} \right\|$$

# Comment choisir les *deux integrateurs* ?

- Pour la méthode de Lawson : méthodes de Runge-Kutta emboîtées (ici DP4(3) (Dormand-Prince méthode d'ordre 4, avec une méthode emboîtée d'ordre 3) sans (ou presque) coût supplémentaire.

0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
1	0	0	1		
<hr/>					
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\rightarrow U_{[4]}^{n+1}$ RK(4, 4) classique
<hr/>					
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{10}$ $\rightarrow U_{[3]}^{n+1}$ RK(4, 3)

On calcule une approximation d'ordre 3<sup>rd</sup> à partir des  $U^n$ ,  $U^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$  avec la dernière ligne du tableau.

$$\text{Puis } L_{[3]}^{n+1} = \left\| U_{[4]}^{n+1} - U_{[3]}^{n+1} \right\|$$

## 1 Modélisation

## 2 Intégrateurs temporels

- Splitting
- Méthode exponentielle
- Méthode de pas de temps adaptatifs

## 3 Résultats numériques

- Validation numérique de LHM (1dx-1dv)
- Comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)
- LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

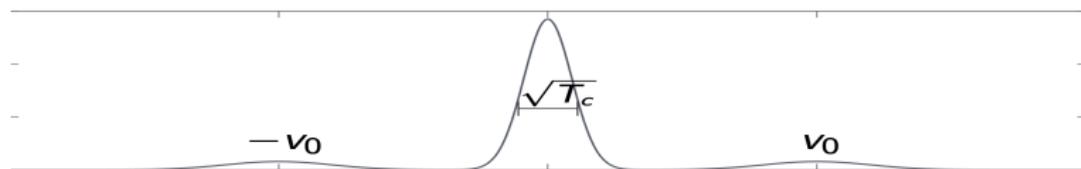
## 4 Conclusion

# Validation numérique de LHM vs cinétique (1dx-1dv)

Les conditions initiales sont ( $k=0.5, v_0=3.4, \alpha=0.2$ )

$$\text{(Vlasov)} \quad f(0, x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) (\mathcal{M}_{\alpha/2, v_0, 1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2, -v_0, 1}(v)) + \mathcal{M}_{1-\alpha, 0, T_c}(v)$$

$$\text{(LHM)} \quad f_h(0, x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) (\mathcal{M}_{\alpha/2, v_0, 1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2, -v_0, 1}(v)), \quad j_c(0, x) = 0, \quad \rho_c(0, x) = 1 - \alpha$$

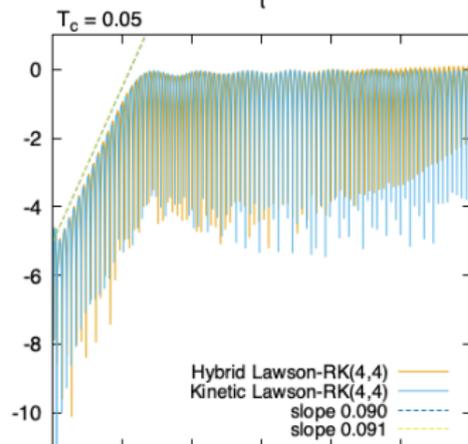
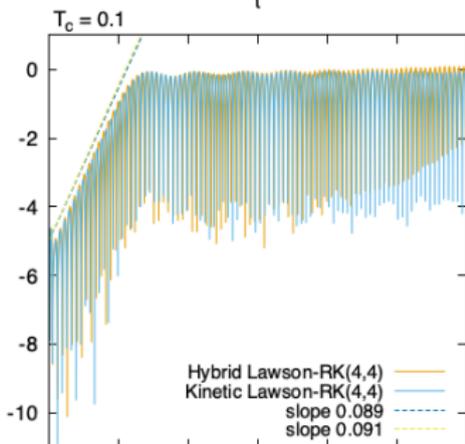
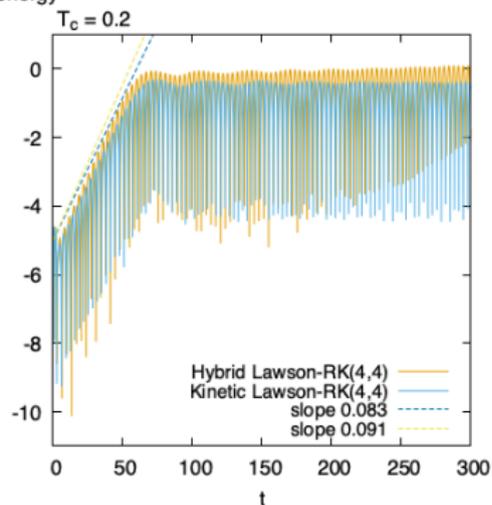
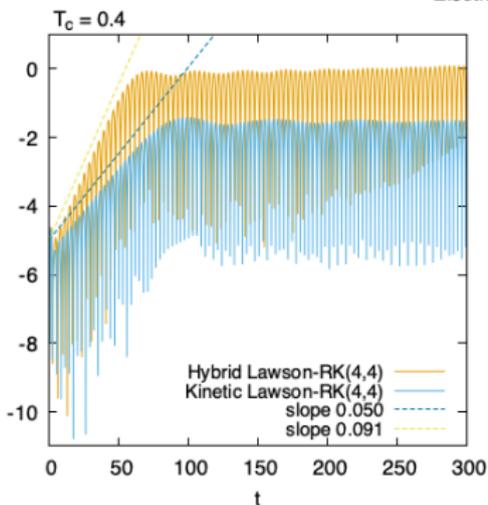


On résout la relation de dispersion pour Vlasov( $T_c$ ) et LHM pour obtenir

$T_c$	$\omega(T_c)$
0.4	$1.06 + i0.05$
0.2	$0.98 + i0.083$
0.1	$0.94 + i0.089$
0.05	$0.92 + i0.09$
LHM ( $T_c = 0$ )	$0.90 + i0.091$

$$\rightarrow \|E(t, \cdot)\|_{L^2} \propto e^{-i\omega t}$$

Electric energy



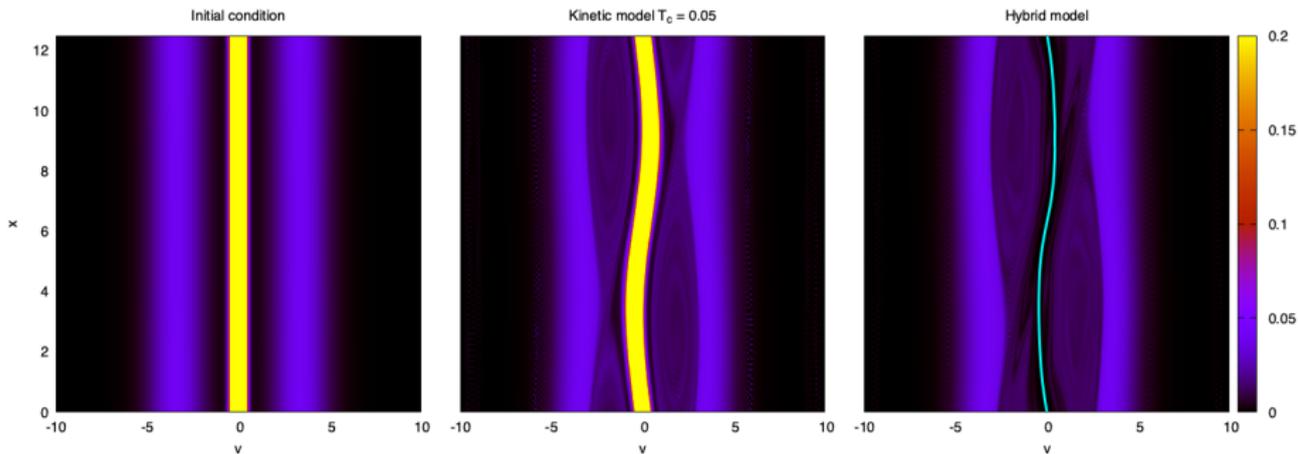
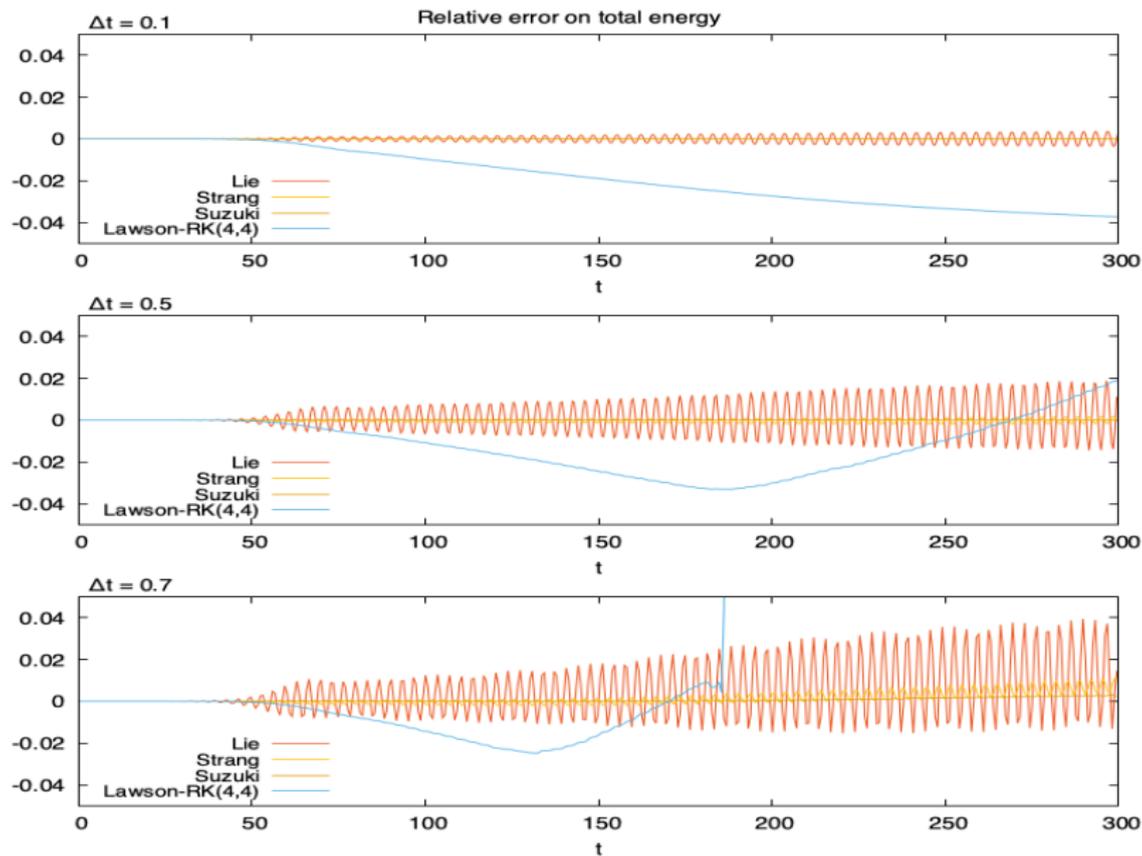


Figure:  $f(t = 0, x, v)$  (gauche),  $f(t = 300, x, v)$  avec Vlasov (milieu), et  $f_h(t = 300, x, v) + \rho_c(t = 300, x)\delta_{v-u_c(t=300,x)}$  pour LHM.

# LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)



# LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

Dans le cas 1dx-3dv, LHM s'écrit, avec  $j_c(t, z)$ ,  $E(t, z)$ ,  $B(t, z)$ ,  $f_h(t, z, v)$

$$\partial_t j_c = \bar{\Omega}_{pe}^2 E - J j_c B_0 \quad (5)$$

$$\partial_t f_h + v_z \partial_z f_h - (E + v \times (B + B_0)) \cdot \nabla_v f_h = 0 \quad (6)$$

$$\partial_t B = J \partial_z E \quad (7)$$

$$\partial_t E = -J \partial_z B - j_c + \int_{\mathbb{R}^3} v_{\perp} f_h dv \quad (8)$$

avec  $v = (v_{\perp}, v_z)$  et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Le Hamiltonian est

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{[0,L]} |E|^2 dz}_{\mathcal{H}_E} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{[0,L]} |B|^2 dz}_{\mathcal{H}_B} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{[0,L]} \frac{1}{\bar{\Omega}_{pe}^2} |j_c|^2 dz}_{\mathcal{H}_{j_c}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{[0,L] \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_h dz dv}_{\mathcal{H}_{f_h}}$$

Quelques remarques préliminaires pour le cas 1dx-3dv

- le splitting Hamiltonian requiert 7 étages  $\rightarrow$  (3 étages en 1dx-1dv)  
 $\rightarrow$  ordre élevé trop coûteux
- la méthode de Lawson requiert le calcul de  $\exp(tA)$

On considère un test dit de Weibel (instabilité d'anisotropie en vitesse)

$$f_h(t=0, z, v) = \frac{\rho_h}{(2\pi)^3/2 \bar{v}_{\parallel} \bar{v}_{\perp}^2} \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\bar{v}_{\parallel}^2} - \frac{(v_x^2 + v_y^2)}{2\bar{v}_{\perp}^2}\right), \quad B_x(t=0, z) = \epsilon \sin(kz), \quad (E_{jc}, B_y)(t=0, z) = 0.$$

$z \in [0, 2\pi/k], k=2, \bar{v}_{\parallel}=0.2, \bar{v}_{\perp}=0.6, \rho_h=0.2.$

$$\partial_t U + AU + N(t, U) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -B_0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 & 0 \\ B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_z & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\partial_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_z \partial_z \end{pmatrix}, N(t, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int v_x f_h dv \\ \int v_y f_h dv \\ (E + v \times B) \cdot \nabla_v f_h \end{pmatrix}$$

**Problème:**  $\exp(tA)$  ne peut pas être calculée même avec des logiciels de calculs symboliques.

On propose 2 solutions

- enlever des termes de la partie linéaire  $A$  pour les mettre dans la partie non-linéaire  $N$   
 $\implies$  ajoute une nouvelle condition CFL
- approximation de  $\exp(tA)$

# Première option

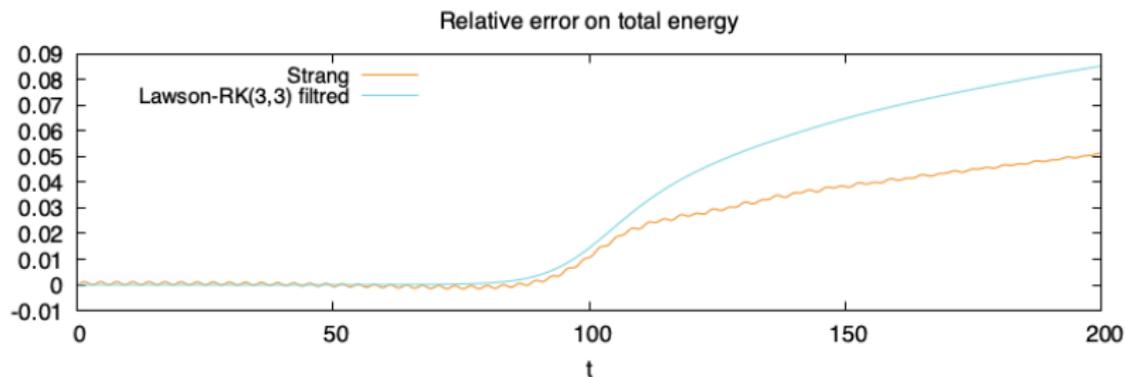
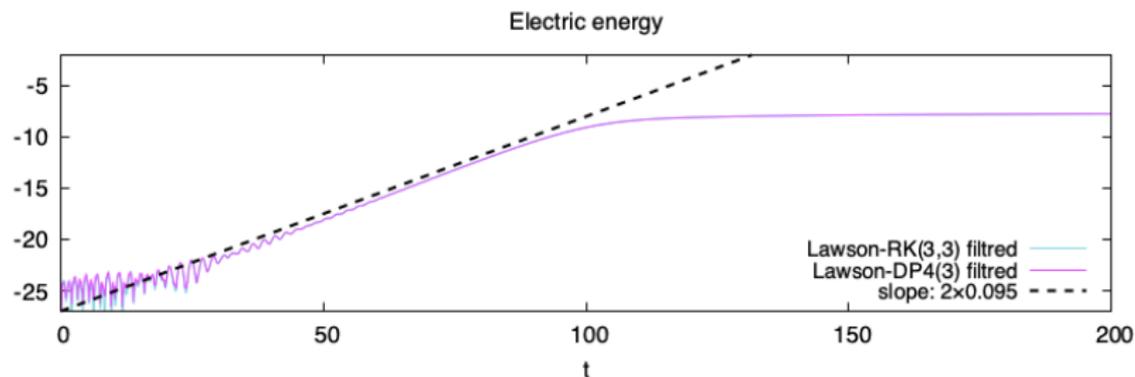
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -B_0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 & 0 \\ B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_z \partial_z \end{pmatrix}, N(t, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z E_y \\ -\partial_z E_x \\ -\partial_z B_y + \int v_x f_h dv \\ \partial_z B_x + \int v_y f_h dv \\ (E + v \times B) \cdot \nabla_v f_h \end{pmatrix}$$

$\exp(tA)$  peut maintenant être calculée, mais la partie Maxwell est maintenant explicite et une condition CFL intervient (voir aussi Korman et al. 20')

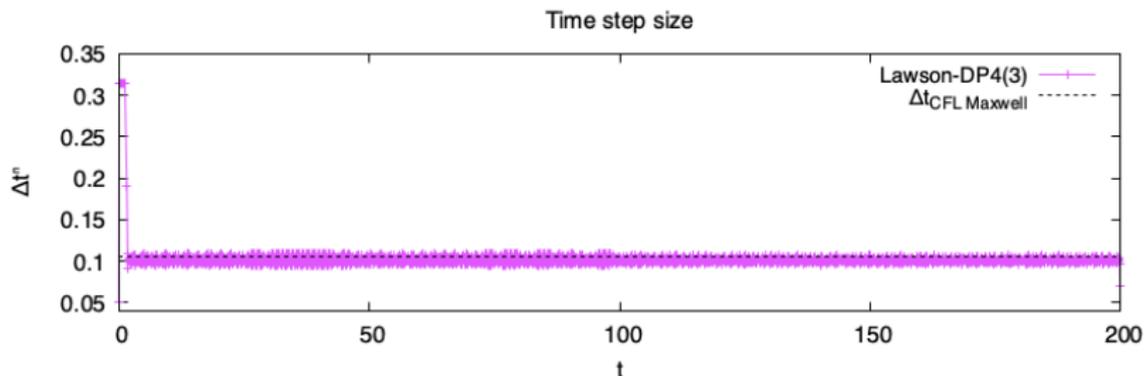
méthodes	conditions CFL
Lie	$(\sqrt{2}/\pi)\Delta z$
Strang	$(2/\pi)\Delta z$
Lawson-RK(3, 3)	$(\sqrt{3}/\pi)\Delta z$
Lawson-RK(4, 4)	$(2\sqrt{2}/\pi)\Delta z$

Table: Condition CFL pour Maxwell.

# Comparison splitting et Lawson (première option)



# Lawson avec pas de temps adaptatif (première option)



**Figure:** Evolution temporelle du pas de temps pour Lawson-DP4(3) (Maxwell dans la partie non-linéaire).  $N_z = 27$ ,  $N_{v_x} = N_{v_y} = N_{v_z} = 32$ .  
La CFL pour Maxwell est  $\Delta t_{\text{CFL}} = (2\sqrt{2}/\pi)\Delta z \approx 0.1047\dots$

## Seconde option: approximant de Padé

$$\partial_t U + AU + N(t, U) = 0$$

**Objectif:** inclure les équations de Maxwell dans la partie linéaire pour les résoudre exactement et enlever la CFL.

En Fourier en  $z$  ( $\partial_z \rightarrow ik$ ),  $A$  devient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -B_0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 & 0 \\ B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{pe}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ik & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ik & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ik & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ikv_z \end{pmatrix},$$

Première remarque:  $\forall k, \text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$  alors  $\text{Sp}(\exp(tA)) \subset \mathcal{C}(0, 1)$

$A$  est presque hermitienne (à un changement de base près).

## Seconde option: approximant de Padé

Pour approcher  $\exp(tA)$ , on utilise les approximants de Padé

$\exp(tA) \approx P_{p,q}(tA) = N_p(tA)D_q(tA)^{-1}$  avec

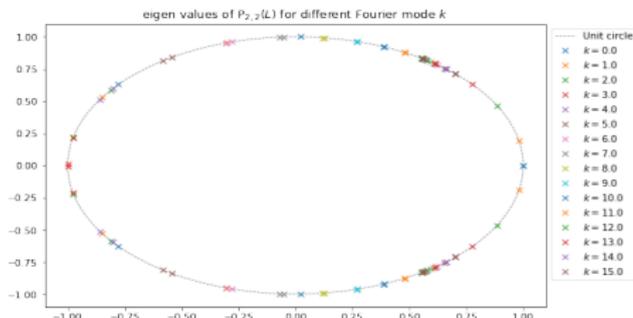
$$N_p(tA) = \sum_{j=0}^p a_j(tA)^j, \quad \text{et} \quad D_q(tA) = \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j(tA)^j,$$

On a

$$\exp(tA) - P_{p,q}(tA) = \mathcal{O}(t^{p+q+1}).$$

et on montre que

$$\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R} \implies \text{Sp}(P_{p,p}(A)) \subset \mathcal{C}(0,1).$$

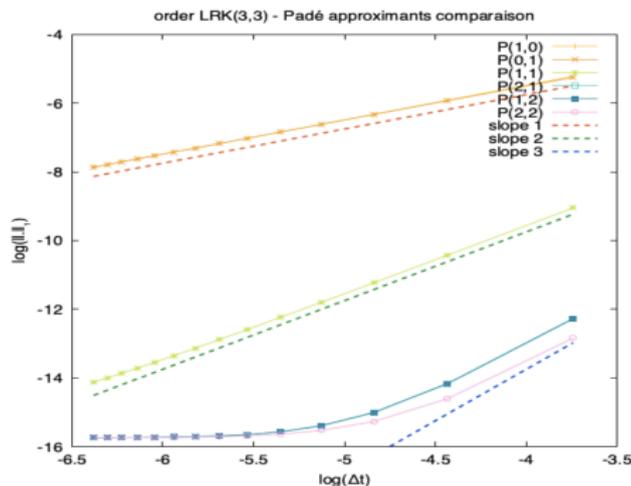


Pour une EDO  $\dot{u} + Au + N(t, u) = 0$ , on a

- Lawson  $u^n = \exp(\Delta t A) u^n + \Delta t \exp(\Delta t A) N(t^n, u^n)$ .
- Lawson modifiée  $u^n = \exp(\Delta t A) u^n + \Delta t \exp(\Delta t A) N(t^n, u^n)$   
avec  $\exp(\Delta t A) \approx \text{exp}(\Delta t A)$  l'approximant de Padé.

Généralisation aux ordres élevés

- Lawson RK( $s, m$ ) ( $s$  étages, ordre  $m$ ):  $\|u^n - u(t^n)\| \leq C \Delta t^m$ .
- MRK( $s, m$ ) Lawson *modifiée* (avec approximant de Padé d'ordre  $r = p + q + 1$ ):  $\|u^n - u(t^n)\| \leq C \Delta t^{\min(r, m)}$ .



# LHM: Lawson (première et seconde options)

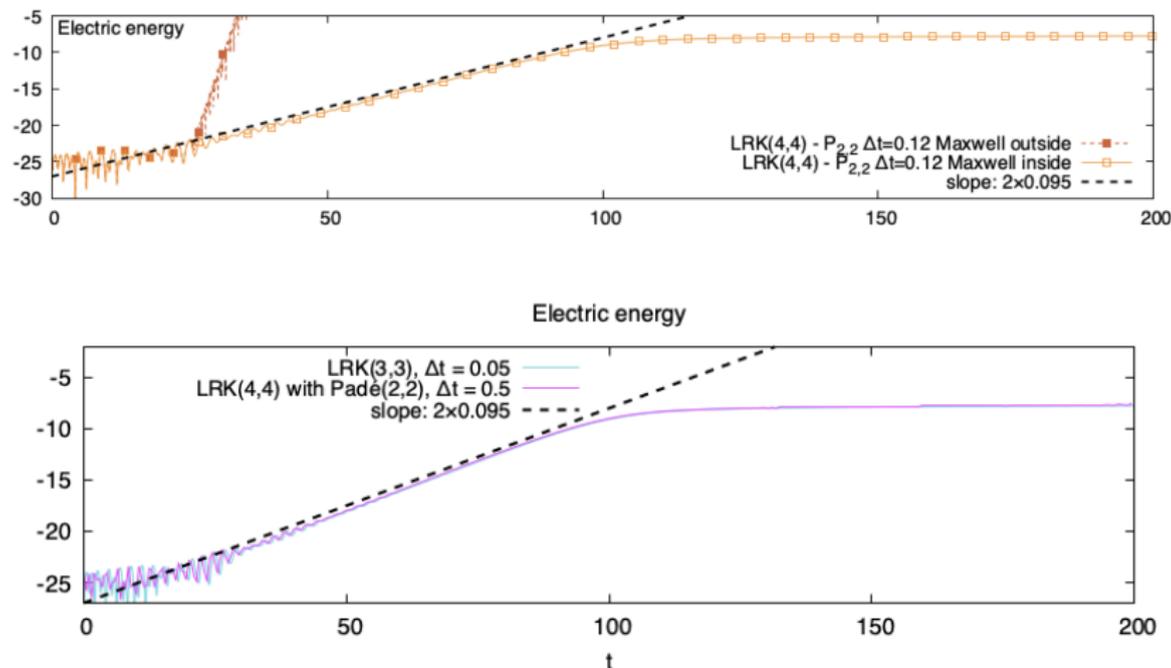


Figure: L'approche utilisant l'approximant de Padé permet d'utiliser des pas de temps plus grand (seule CFL venant de  $(E + v \times B) \cdot \nabla_v f_h$ ).

time integrator	simulation time
LRK(3,3)	11 h 29 min 09 s
LRK(3,3) - $P_{1,1}$	10 h 54 min 11 s
LRK(3,3) - $P_{2,2}$	10 h 55 min 26 s
LRK(4,4)	14 h 06 min 15 s
LRK(4,4) - $P_{2,2}$	13 h 59 min 59 s
LDP4(3)	11 h 44 min 04 s
LDP4(3) - $P_{2,2}$	04 h 09 min 44 s

## 1 Modélisation

## 2 Intégrateurs temporels

- Splitting
- Méthode exponentielle
- Méthode de pas de temps adaptatifs

## 3 Résultats numériques

- Validation numérique de LHM (1dx-1dv)
- Comparaison des 2 intégrateurs (1dx-1dv)
- LHM: comparaison des 2 intégrateurs (1dx-3dv)

## 4 Conclusion

- Conclusions

- Validation numérique de LHM versus Vlasov en  $1dx-1dv$
- pour les modèles de type Vlasov, les méthodes de Lawson sont une bonne option pour construire des méthodes d'ordre élevé en temps
  - avec un nombre d'étages optimal
  - qui permet d'enlever la CFL plus sévère (contrairement à RK standard)
- la méthode de pas de temps adaptatif permet de calculer automatiquement la CFL non-linéaire

- Perspectives

- analyse des méthodes de Lawson modifiées
- extension à d'autres modèles cinétiques
- analyse asymptotique pour passer de Vlasov à LHM quand  $\varepsilon = T_c/T_h \rightarrow 0$