Réductibilité pour l'oscillateur harmonique quantique dans $\mathbb{R}^d$ avec potentiel quasi-périodique

Eric Paturel

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes

Journée Rennes-Nantes

Rennes, 28 janvier 2016

(Travail avec Benoît Grébert)

Sommaire

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients variables

$$x'(t) = A(t)x(t)\,. \tag{1}$$

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients variables

$$x'(t) = A(t)x(t)\,. \tag{1}$$

Un tel système est dit réductible s'il existe un changement de variable linéaire

$$x = Z(t)y\,,$$

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients variables

$$x'(t) = A(t)x(t)\,. \tag{1}$$

Un tel système est dit réductible s'il existe un changement de variable linéaire

$$x = Z(t)y\,,$$

avec $Z(t)$ régulière et inversible, Z, Z^{-1}, Z' bornés sur $\mathbb{R}$, qui transforme le système en

$$y' = By\,, \tag{2}$$

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients variables

$$x'(t) = A(t)x(t)\,. \tag{1}$$

Un tel système est dit réductible s'il existe un changement de variable linéaire

$$x = Z(t)y\,,$$

avec $Z(t)$ régulière et inversible, Z, Z^{-1}, Z' bornés sur $\mathbb{R}$, qui transforme le système en

$$y' = By\,, \tag{2}$$

où B est une matrice constante.

Qu'est-ce qu'un système réductible ?

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients variables

$$x'(t) = A(t)x(t)\,. \tag{1}$$

Un tel système est dit réductible s'il existe un changement de variable linéaire

$$x = Z(t)y\,,$$

avec $Z(t)$ régulière et inversible, Z, Z^{-1}, Z' bornés sur $\mathbb{R}$, qui transforme le système en

$$y' = By\,, \tag{2}$$

où B est une matrice constante.

Conséquence immédiate

Si les solutions de (2) sont toutes bornées, celles de (1) aussi.

Fonctions quasi-périodiques

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \dots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)\,.$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !

Fonctions quasi-périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \ldots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t) .$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !

Fonctions quasi-périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \ldots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)\,.$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.On impose que les fréquences soient rationnellement indépendantes.

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !

Fonctions quasi-périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \ldots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)\,.$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.On impose que les fréquences soient rationnellement indépendantes.

Pas d'unicité de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, mais nombre n de fréquences fixé.

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !

Fonctions quasi-périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \ldots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)\,.$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.On impose que les fréquences soient rationnellement indépendantes.

Pas d'unicité de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, mais nombre n de fréquences fixé.

Attention

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !

Fonctions quasi-périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quasi-périodique s'il existe des constantes $\omega_1, \dots, \omega_d$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2π-périodique en tous ses arguments, tels que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)\,.$$

Les constantes ω_i sont les fréquences de f, F est le relevé de f.On impose que les fréquences soient rationnellement indépendantes.

Pas d'unicité de $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, mais nombre n de fréquences fixé.

Attention

F régulière implique f régulière, mais la réciproque est fausse !
On définira donc plutôt la régularité de F.

Le cas périodique : théorie de Floquet

Le cas périodique : théorie de Floquet

Soit le système

$$x' = A(t)x$$

où $A(t)$ est T-périodique.

Le cas périodique : théorie de Floquet

Soit le système

$$x' = A(t)x$$

où $A(t)$ est T-périodique.
Alors il existe un changement de variables périodique $Z(t)$ et une matrice constante B telle que $y = Z(t)^{-1}x$ vérifie

$$y' = By$$

Le cas périodique : théorie de Floquet

Soit le système

$$x' = A(t)x$$

où $A(t)$ est T-périodique.
Alors il existe un changement de variables périodique $Z(t)$ et une matrice constante B telle que $y = Z(t)^{-1}x$ vérifie

$$y' = By$$

La matrice (de Floquet) B vérifie

$$\exp(TB) = X(T)$$

Le cas périodique : théorie de Floquet

Soit le système

$$x' = A(t)x$$

où $A(t)$ est T-périodique.
Alors il existe un changement de variables périodique $Z(t)$ et une matrice constante B telle que $y = Z(t)^{-1}x$ vérifie

$$y' = By$$

La matrice (de Floquet) B vérifie

$$\exp(TB) = X(T)$$

où $X(t)$ vérifie $X' = A(t)X$, $X(0) = I$.

Le cas périodique : théorie de Floquet

Soit le système

$$x' = A(t)x$$

où $A(t)$ est T-périodique.
Alors il existe un changement de variables périodique $Z(t)$ et une matrice constante B telle que $y = Z(t)^{-1}x$ vérifie

$$y' = By$$

La matrice (de Floquet) B vérifie

$$\exp(TB) = X(T)$$

où $X(t)$ vérifie $X' = A(t)X$, $X(0) = I$.

Conséquences dynamiques

On a

$$X(t) = P(t)e^{tB},$$

avec $P(t)$ périodique. La dynamique est donnée par le spectre de B.

Cas quasi-périodique

On regarde

$$x' = A(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)x$$

avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.

Cas quasi-périodique

On regarde

$$x' = A(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)x$$

avec $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.
Beaucoup plus compliqué !

Cas quasi-périodique

On regarde

$$x' = A(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)x$$

avec $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.
Beaucoup plus compliqué !
Résultats de Eliasson, Krikorian, Chavaudret ...

Cas quasi-périodique

On regarde

$$x' = A(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)x$$

avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.
Beaucoup plus compliqué !
Résultats de Eliasson, Krikorian, Chavaudret ...
Résultats de type perturbatif : $A(t) = \lambda A_0 + \varepsilon F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$

Cas quasi-périodique

On regarde

$$x' = A(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)x$$

avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.
Beaucoup plus compliqué !
Résultats de Eliasson, Krikorian, Chavaudret ...
Résultats de type perturbatif : $A(t) = \lambda A_0 + \varepsilon F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$

Résultat typique

Soit F analytique. Si ε assez petit et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$ avec $\mathrm{mes}([0, 2\pi)^n \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon^\alpha$, alors le système est réductible, i.e. il existe un changement de variables quasi-périodique $Z(\omega t)$ tel que

$$X(t) = Z(\omega t)e^{tB} .$$

La dynamique est encore donnée par le spectre de B.

Cas quasi-périodique

On regarde
$$x' = A(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)x$$
avec $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de fréquences.
Beaucoup plus compliqué !
Résultats de Eliasson, Krikorian, Chavaudret ...
Résultats de type perturbatif : $A(t) = \lambda A_0 + \varepsilon F(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)$

Résultat typique

Soit F analytique. Si ε assez petit et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$ avec $\mathrm{mes}([0, 2\pi)^n \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon^\alpha$, alors le système est réductible, i.e. il existe un changement de variables quasi-périodique $Z(\omega t)$ tel que
$$X(t) = Z(\omega t)e^{tB} .$$
La dynamique est encore donnée par le spectre de B.

Remarque : il y a en outre beaucoup de systèmes non réductibles !

Apparition des petits diviseurs

Apparition des petits diviseurs

Cas simplissime : équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ quasi-périodique à n fréquences. On cherche une transformation quasi-périodique $z(t) = \exp(g(t))$ qui permette de réduire l'équation.

Apparition des petits diviseurs

Cas simplissime : équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ quasi-périodique à n fréquences. On cherche une transformation quasi-périodique $z(t) = \exp(g(t))$ qui permette de réduire l'équation. Pour cela, pas le choix :

Apparition des petits diviseurs

Cas simplissime : équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ quasi-périodique à n fréquences. On cherche une transformation quasi-périodique $z(t) = \exp(g(t))$ qui permette de réduire l'équation.
Pour cela, pas le choix :
$g(t) = \int_0^t (a(s) - [a])ds$ où

$$[a] = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s)ds\,.$$

Apparition des petits diviseurs

Cas simplissime : équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ quasi-périodique à n fréquences. On cherche une transformation quasi-périodique $z(t) = \exp(g(t))$ qui permette de réduire l'équation.
Pour cela, pas le choix :
$g(t) = \int_0^t (a(s) - [a])ds$ où

$$[a] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s)ds\,.$$

Alors $y = z(t)^{-1}x$ vérifie $y' = [a]y$.

Apparition des petits diviseurs

Cas simplissime : équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ quasi-périodique à n fréquences. On cherche une transformation quasi-périodique $z(t) = \exp(g(t))$ qui permette de réduire l'équation.
Pour cela, pas le choix :
$g(t) = \int_0^t (a(s) - [a])ds$ où

$$[a] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s)ds\,.$$

Alors $y = z(t)^{-1}x$ vérifie $y' = [a]y$.
Mais alors $g'(t) = a(t) - [a]$ avec

$$g(t) = G(\omega t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} G_k e^{i\langle k,\omega t\rangle} \quad \text{et} \quad a(t) = A(\omega t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} A_k e^{i\langle k,\omega t\rangle}$$

l'équation devient

$$G_k = \frac{-iA_k}{\langle k,\omega\rangle} \quad \text{pour} \quad k \neq 0, \quad \text{et} \quad G_0 = 0\,.$$

Sommaire

La réductibilité

Le cas de l'oscillateur harmonique quantique

Réductibilité en dimension infinie

Réductibilité en dimension infinie

En dimension finie : grâce à KAM, la réductibilité des systèmes linéarisés autour de tores lagrangiens de systèmes hamiltoniens est automatique.

Réductibilité en dimension infinie

En dimension finie : grâce à KAM, la réductibilité des systèmes linéarisés autour de tores lagrangiens de systèmes hamiltoniens est automatique.
En dimension infinie, on construit des tores isotropes (dimension finie...).

Réductibilité en dimension infinie

En dimension finie : grâce à KAM, la réductibilité des systèmes linéarisés autour de tores lagrangiens de systèmes hamiltoniens est automatique.
En dimension infinie, on construit des tores isotropes (dimension finie. . .).
On choisit l'oscillateur harmonique quantique perturbé :

Réductibilité en dimension infinie

En dimension finie : grâce à KAM, la réductibilité des systèmes linéarisés autour de tores lagrangiens de systèmes hamiltoniens est automatique.
En dimension infinie, on construit des tores isotropes (dimension finie...).
On choisit l'oscillateur harmonique quantique perturbé :

$$(LS) \qquad i\,\partial_t u + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

avec $V : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, ε petit. On note $T = -\Delta + |x|^2$.

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

On note

- $\mathbb{E} = \{(j, \ell) \in \mathrm{Spec}(T) \times \mathbb{N} \mid \ell = 1, \cdots, d_j\}$ l'ensemble des modes d'Hermite

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

On note

- $\mathbb{E} = \{(j, \ell) \in \mathrm{Spec}(T) \times \mathbb{N} \mid \ell = 1, \cdots, d_j\}$ l'ensemble des modes d'Hermite
- pour $a = (j, \ell) \in \mathbb{E}$, $w_a = j$ l'énergie du mode a

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

On note

- $\mathbb{E} = \{(j, \ell) \in \mathrm{Spec}(T) \times \mathbb{N} \mid \ell = 1, \cdots, d_j\}$ l'ensemble des modes d'Hermite
- pour $a = (j, \ell) \in \mathbb{E}$, $w_a = j$ l'énergie du mode a
- $[a] = \{b \in \mathbb{E} \mid w_b = w_a\}$ le bloc de modes b de même énergie que a.

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

On note

- $\mathbb{E} = \{(j, \ell) \in \mathrm{Spec}(T) \times \mathbb{N} \mid \ell = 1, \cdots, d_j\}$ l'ensemble des modes d'Hermite
- pour $a = (j, \ell) \in \mathbb{E}$, $w_a = j$ l'énergie du mode a
- $[a] = \{b \in \mathbb{E} \mid w_b = w_a\}$ le bloc de modes b de même énergie que a.

Base de Hermite

L'opérateur T est diagonal dans la base de Hermite

- $d = 1$: $\mathrm{Spec}(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2) = \{1, 3, 5, \cdots\}$, simple, $E_j = \mathrm{Vect}(\varphi_j)$ où les φ_j sont les fonctions d'Hermite.
- $d \geq 2$: $\mathrm{Spec}(T) = \{d, d+2, d+4, \cdots\}$ et pour $j \in \mathrm{Spec}(T)$,

$$\begin{aligned} E_j &= \mathrm{Vect}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_d} \mid j = j_1 + \cdots + j_d) \\ &= \mathrm{Vect}(\Phi_{j,\ell} \mid \ell = 1, \cdots, d_j) \quad \text{avec} \quad d_j = O(j^{d-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Grande multiplicité !

On note

- $\mathbb{E} = \{(j, \ell) \in \mathrm{Spec}(T) \times \mathbb{N} \mid \ell = 1, \cdots, d_j\}$ l'ensemble des modes d'Hermite
- pour $a = (j, \ell) \in \mathbb{E}$, $w_a = j$ l'énergie du mode a
- $[a] = \{b \in \mathbb{E} \mid w_b = w_a\}$ le bloc de modes b de même énergie que a.

$(\Phi_a)_{a \in \mathbb{E}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\quad T\Phi_a = w_a \Phi_a, \ a \in \mathbb{E}$

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

On rappelle

$$(LS) \qquad i\,u_t + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d$$

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

On rappelle

$$(LS) \qquad i\,u_t + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d$$

On développe $u \in L^2$ sur la base de Hermite : $u = \sum_{a \in \mathbb{E}} \xi_a \Phi_a$,

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

On rappelle

$$(LS) \qquad i\,u_t + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d$$

On développe $u \in L^2$ sur la base de Hermite : $u = \sum_{a \in \mathbb{E}} \xi_a \Phi_a$, et

$$\begin{cases} i\dot{\xi} &= A_0\xi + \varepsilon F(\varphi)\xi, \quad \xi \in \ell^2 \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{cases}$$

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

On rappelle

$$(LS) \qquad i\, u_t + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d$$

On développe $u \in L^2$ sur la base de Hermite : $u = \sum_{a\in\mathbb{E}} \xi_a \Phi_a$, et

$$\begin{cases} i\dot{\xi} & = A_0\xi + \varepsilon F(\varphi)\xi, \quad \xi \in \ell^2 \\ \dot{\varphi} & = \omega \end{cases}$$

avec

$$A_0 = \mathrm{Diag}(w_a,\ a \in \mathbb{E})$$

Ecriture de l'équation dans la base de Hermite

On rappelle

$$(LS) \qquad i\, u_t + (-\Delta + |x|^2)u + \varepsilon V(\omega t, x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d$$

On développe $u \in L^2$ sur la base de Hermite : $u = \sum_{a \in \mathbb{E}} \xi_a \Phi_a$, et

$$\begin{cases} i\dot{\xi} & = A_0 \xi + \varepsilon F(\varphi)\xi, \quad \xi \in \ell^2 \\ \dot{\varphi} & = \omega \end{cases}$$

avec

$$A_0 = \mathrm{Diag}(w_a,\ a \in \mathbb{E})$$

et

$$F(\varphi)_a^b = \int_{\mathbb{R}^d} V(\varphi, x)\Phi_a(x)\varphi_b(x)dx$$

Le rôle de la perturbation

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Espaces fonctionnels : $\mathrm{Dom}(T) = \{u \in L^2 \mid Tu \in L^2\}$.

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Espaces fonctionnels : $\mathrm{Dom}(T) = \{u \in L^2 \mid Tu \in L^2\}$.
On définit, pour $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s =& \mathrm{Dom}(T^{s/2}) = \{u \in L^2 \mid T^{s/2}u \in L^2\} \\ =& \{u \in L^2 \mid x^\alpha \partial^\beta u \in L^2,\ |\alpha| + |\beta| \leq s\} \end{aligned}$$

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Espaces fonctionnels : $\mathrm{Dom}(T) = \{u \in L^2 \mid Tu \in L^2\}$.
On définit, pour $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s =& \mathrm{Dom}(T^{s/2}) = \{u \in L^2 \mid T^{s/2}u \in L^2\}\\ =& \{u \in L^2 \mid x^\alpha \partial^\beta u \in L^2,\ |\alpha| + |\beta| \leq s\}\end{aligned}$$

$$u \in \mathcal{H}^s \ \text{ssi}\ \ \xi \in \ell^2_s = \{\xi \in \ell^2 \mid \sum_{a\in\mathbb{E}} w_a^s |\xi_a|^2 < \infty\}$$

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Espaces fonctionnels : $\mathrm{Dom}(T) = \{u \in L^2 \mid Tu \in L^2\}$.
On définit, pour $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s =& \mathrm{Dom}(T^{s/2}) = \{u \in L^2 \mid T^{s/2}u \in L^2\}\\ =& \{u \in L^2 \mid x^\alpha \partial^\beta u \in L^2,\ |\alpha| + |\beta| \leq s\}\end{aligned}$$

$$u \in \mathcal{H}^s \ \text{ssi}\ \ \xi \in \ell^2_s = \{\xi \in \ell^2 \mid \sum_{a\in\mathbb{E}} w_a^s |\xi_a|^2 < \infty\}$$

$$\|u\|_s = |\xi|_s = \sum_{a\in\mathbb{E}} w_a^s |\xi_a|^2$$

Le rôle de la perturbation

- $\varepsilon = 0$: $\xi_a(t) = e^{-w_a t}\xi_a(0)$
  - Les solutions sont presque-périodiques en temps
  - $|\xi_a(t)| = |\xi_a(0)|$ il y a conservation de l'énergie de chaque mode
- $\varepsilon \neq 0$: Les différents modes d'Hermite peuvent interagir
  - les solutions restent-elle presque-périodiques ?
  - les solutions restent-elles bornées ?

Espaces fonctionnels : $\mathrm{Dom}(T) = \{u \in L^2 \mid Tu \in L^2\}$.
On définit, pour $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s =& \mathrm{Dom}(T^{s/2}) = \{u \in L^2 \mid T^{s/2}u \in L^2\}\\ =& \{u \in L^2 \mid x^\alpha \partial^\beta u \in L^2,\ |\alpha| + |\beta| \leq s\}\end{aligned}$$

$$u \in \mathcal{H}^s \ \text{ ssi } \ \xi \in \ell^2_s = \{\xi \in \ell^2 \mid \sum_{a\in\mathbb{E}} w_a^s |\xi_a|^2 < \infty\}$$

$$\|u\|_s = |\xi|_s = \sum_{a\in\mathbb{E}} w_a^s |\xi_a|^2$$

Eléments de réponse

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.
- (très facile) $\|u(t,\cdot)\|_s \leq C_s(1+|t|)^{s/2}\|u(0,\cdot)\|_s$

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.
- (très facile) $\|u(t,\cdot)\|_s \leq C_s(1+|t|)^{s/2}\|u(0,\cdot)\|_s$
- Delort 2014 :

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.
- (très facile) $\|u(t,\cdot)\|_s \leq C_s(1+|t|)^{s/2} \|u(0,\cdot)\|_s$
- Delort 2014 :

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.
- (très facile) $\|u(t,\cdot)\|_s \leq C_s(1+|t|)^{s/2}\|u(0,\cdot)\|_s$
- Delort 2014 :
  Il existe un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, $V(t)$ périodique, et des solutions de $iu_t + Tu + V(t)(u) = 0$ vérifiant $\|u(t,\cdot)\|_s \geq c|t|^{s/2}$

Eléments de réponse

- Si V indépendant de t : $\|u(t,\cdot)\|_s$ bornée.
- (très facile) $\|u(t,\cdot)\|_s \leq C_s(1+|t|)^{s/2} \|u(0,\cdot)\|_s$
- Delort 2014 :
  Il existe un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, $V(t)$ périodique, et des solutions de $iu_t + Tu + V(t)(u) = 0$ vérifiant $\|u(t,\cdot)\|_s \geq c|t|^{s/2}$
  $\Rightarrow$ croissance optimale !

Théorème de réductibilité

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

Théorème de réductibilité

Theorem ($d = 1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

Théorème de réductibilité

Theorem ($d = 1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

- *analytique réel en* φ
- $\mathcal{H}^{s^*}$ *en* x

Théorème de réductibilité

Theorem ($d = 1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

- *analytique réel en* φ
- $\mathcal{H}^{s^*}$ *en* x

Alors

- $\exists \varepsilon_0 > 0$

Théorème de réductibilité

Theorem ($d=1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

- *analytique réel en* φ
- $\mathcal{H}^{s^*}$ *en* x

Alors

- $\exists \varepsilon_0 > 0$
- *Pour* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon \subset [0, 2\pi)^n$, $\mathrm{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon^\alpha$

Théorème de réductibilité

Theorem ($d = 1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

- *analytique réel en* φ
- $\mathcal{H}^{s^*}$ *en* x

Alors

- $\exists \varepsilon_0 > 0$
- *Pour* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon \subset [0, 2\pi)^n$, $\mathrm{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon^\alpha$

Théorème de réductibilité

Theorem ($d = 1$ Grébert-Thomann 2011, $d \geq 2$ Grébert-P. 2015)

Soit $s^* > s > d/2$, $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d \ni (\varphi, x) \mapsto V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$

- *analytique réel en* φ
- $\mathcal{H}^{s^*}$ *en* x

Alors

- $\exists \varepsilon_0 > 0$
- *Pour* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon \subset [0, 2\pi)^n$, $\mathrm{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon^\alpha$

tel que pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$, *(LS) est réductible à une équation linéaire à coefficients constants dans* $\mathcal{H}^s$.

Plus précisément

Théorème

Soit $s^* > s > d/2$.

Plus précisément

Théorème

Soit $s^* > s > d/2$.
Supposons que $V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$ soit analytique réel en φ et $\mathcal{H}^{s^*}$ en x.

Plus précisément

Théorème

Soit $s^* > s > d/2$.
Supposons que $V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$ soit analytique réel en φ et $\mathcal{H}^{s^*}$ en x.
Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ et pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon$ tel que pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$,

- $\exists$ un isomorphisme linéaire $\Psi(\varphi) = \Psi_{\omega,\varepsilon}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$, analytique en φ
- $\exists$ un opérateur hermitien $W = W_{\omega,\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$

Plus précisément

Théorème

Soit $s^* > s > d/2$.
Supposons que $V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$ soit analytique réel en φ et $\mathcal{H}^{s^*}$ en x.
Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ et pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon$ tel que pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$,

- $\exists$ un isomorphisme linéaire $\Psi(\varphi) = \Psi_{\omega,\varepsilon}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$, analytique en φ
- $\exists$ un opérateur hermitien $W = W_{\omega,\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$

tel que $t \mapsto v(t, \cdot)$ est une solution de l'équation autonome

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

si et seulement si $t \mapsto \Psi(\omega t)v(t, \cdot) = u(t, \cdot)$ vérifie (LS).

Plus précisément

Théorème

Soit $s^* > s > d/2$.
Supposons que $V(\varphi, x) \in \mathbb{R}$ soit analytique réel en φ et $\mathcal{H}^{s^*}$ en x.
Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ et pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \mathcal{D}_\varepsilon$ tel que pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$,

- $\exists$ un isomorphisme linéaire $\Psi(\varphi) = \Psi_{\omega,\varepsilon}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$, analytique en φ
- $\exists$ un opérateur hermitien $W = W_{\omega,\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$

tel que $t \mapsto v(t, \cdot)$ est une solution de l'équation autonome

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

si et seulement si $t \mapsto \Psi(\omega t)v(t, \cdot) = u(t, \cdot)$ vérifie (LS).
De plus $\|\Psi(\varphi) - Id\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^s)} \leq C\varepsilon$ et la matrice infinie $(W_a^b)_{a,b\in\mathbb{E}}$ est diagonale par blocs, i.e.

$$W_a^b = 0 \text{ si } w_a \neq w_b$$

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Comme W hermitien, diagonal par bloc et $[T, W] = 0$

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Comme W hermitien, diagonal par bloc et $[T, W] = 0 \Rightarrow$ T et W sont diagonalisables dans la même base orthogonale.

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Comme W hermitien, diagonal par bloc et $[T, W] = 0 \Rightarrow$ T et W sont diagonalisables dans la même base orthogonale.

$\exists P$ diagonale par blocs , ${}^tPP = Id$ et ${}^tPWP = \mathrm{diag}(\mu_a,\ a \in \mathbb{E}),\ \mu_a \in \mathbb{R}$

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Comme W hermitien, diagonal par bloc et $[T, W] = 0 \Rightarrow$ T et W sont diagonalisables dans la même base orthogonale.

$\exists P$ diagonale par blocs , ${}^t PP = Id$ et ${}^t PWP = \mathrm{diag}(\mu_a,\ a \in \mathbb{E}),\ \mu_a \in \mathbb{R}$

Si on note $\tilde{v} = {}^t Pv = \sum \tilde{v}_a \tilde{\Psi}_a$

$$\tilde{v}(t) = \sum_{a \in \mathbb{E}} e^{-i(w_a + \mu_a)t} \tilde{v}_a \tilde{\Phi}_a$$

$\Rightarrow \tilde{v}$ presque périodique en temps, donc v et u aussi.

Conséquences dynamiques

$$i\partial_t v + (-\Delta + |x|^2)v + \varepsilon W(v) = 0$$

Comme W hermitien, diagonal par bloc et $[T, W] = 0 \Rightarrow$ T et W sont diagonalisables dans la même base orthogonale.

$\exists P$ diagonale par blocs , ${}^tPP = Id$ et ${}^tPWP = \mathrm{diag}(\mu_a,\ a \in \mathbb{E}),\ \mu_a \in \mathbb{R}$

Si on note $\tilde{v} = {}^tPv = \sum \tilde{v}_a \tilde{\Psi}_a$

$$\tilde{v}(t) = \sum_{a \in \mathbb{E}} e^{-i(w_a + \mu_a)t} \tilde{v}_a \tilde{\Phi}_a$$

$\Rightarrow \tilde{v}$ presque périodique en temps, donc v et u aussi.

Corollaire (1)

Pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$ toutes les solutions of (LS) sont presque-périodiques en temps.

Conséquences dynamiques

De plus $|\tilde{v}_a(t)| = |\tilde{v}_a(0)|$ donc

$$\sum_{b\in[a]} |v_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(0)|^2 = \sum_{b\in[a]} |v_a(0)|^2$$

Conséquences dynamiques

De plus $|\tilde{v}_a(t)| = |\tilde{v}_a(0)|$ donc

$$\sum_{b\in[a]} |v_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(0)|^2 = \sum_{b\in[a]} |v_a(0)|^2$$

et donc $\|v(t,\cdot)\|_s = \|v(0,\cdot)\|_s$.

Conséquences dynamiques

De plus $|\tilde{v}_a(t)| = |\tilde{v}_a(0)|$ donc

$$\sum_{b\in[a]} |v_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(0)|^2 = \sum_{b\in[a]} |v_a(0)|^2$$

et donc $\|v(t,\cdot)\|_s = \|v(0,\cdot)\|_s$.
Puisque Ψ est proche de l'identité, on en déduit

Conséquences dynamiques

De plus $|\tilde{v}_a(t)| = |\tilde{v}_a(0)|$ donc

$$\sum_{b\in[a]} |v_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(t)|^2 = \sum_{b\in[a]} |\tilde{v}_a(0)|^2 = \sum_{b\in[a]} |v_a(0)|^2$$

et donc $\|v(t,\cdot)\|_s = \|v(0,\cdot)\|_s$.
Puisque Ψ est proche de l'identité, on en déduit

Corollaire (2)

Pour $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\omega \in \mathcal{D}_\varepsilon$ il existe $C(s,\omega,d)$ tel que

$$(1-\varepsilon C)\,\|u(0,\cdot\|_s \le \|u(t,\cdot\|_s \le (1+\varepsilon C)\,\|u(0,\cdot\|_s$$

Merci de votre attention !