Stabilité des rouleaux dans les films en couche mince

Miguel Rodrigues

IRMAR
Université de Rennes 1

Journée d'Analyse Rennes-Nantes
Rennes, Janvier 2016

Essentiellement avec Blake Barker (Brown), Mathew Johnson (Kansas), Pascal Noble (Toulouse) et Kevin Zumbrun (Indiana).

ANR JCJC 2009-2013, *Shallow Water Equations for Complex Fluids*, porté par Pascal Noble.
ANR 2013-2017, *Boundaries, Numerics and Dispersion*, porté par Sylvie Benzoni-Gavage.

Outline.

1. Modèles
   - Situation globale
   - Le système de St-Venant
   - L'équation (KdV-KS)
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Outline.

1. Modèles
   - Situation globale
   - Le système de St-Venant
   - L'équation (KdV-KS)
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Rouleaux dans les films minces.

Dans un canal.

Image de Neil Balmforth.

Le système de Saint-Venant (SV)

$$
\begin{aligned}
h_t &+ (hu)_x = 0, \\
(hu)_t &+ \left(hu^2 + \frac{h^2}{2F^2}\right)_x \\
&= h - |u|u + \nu(h\,u_x)_x.
\end{aligned}
$$

$F > 2$, instabilité primaire.

Rouleaux dans les films minces.

Dans une rue.

Le système de Saint-Venant (SV)

$$\begin{aligned} h_t &+ (hu)_x = 0, \\ (hu)_t &+ \left(hu^2 + \frac{h^2}{2F^2}\right)_x \\ &= h - |u|u + \nu(h\,u_x)_x. \end{aligned}$$

$F > 2$, instabilité primaire.

L'équation de Korteweg-de Vries/Kuramoto-Sivashinsky (KdV-KS)

$$U_S + \left(\tfrac{1}{2}U^2\right)_Y + U_{YYY} \;+\; \delta(U_{YY} + U_{YYYY}) \;=\; 0.$$

Proche du seuil $\delta \sim \sqrt{F-2}$.

Outline.

1. Modèles
   - Situation globale
   - Le système de St-Venant
   - L'équation (KdV-KS)
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Adimensionnement.

À partir de

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{\widetilde{t}}\widetilde{h} \quad + \partial_{\widetilde{x}}(\widetilde{h}\,\widetilde{u}) \;=\; 0\,, \\ \partial_{\widetilde{t}}(\widetilde{h}\,\widetilde{u}) + \partial_{\widetilde{x}}(\widetilde{h}\,\widetilde{u}^2 \;+\; \mathrm{g}\cos(\theta)\,\frac{1}{2}\,\widetilde{h}^2) \\ \qquad\qquad = \;\mathrm{g}\sin(\theta)\,\widetilde{h} \;-\; \mathrm{C}_f\,|\widetilde{u}|\,\widetilde{u} \;+\; \widetilde{\nu}\,\partial_{\widetilde{x}}(\widetilde{h}\,\partial_{\widetilde{x}}\widetilde{u})\,, \end{array}\right.$$

Nombre de Froude.

$$F \;=\; \sqrt{\frac{\tan(\theta)}{\mathrm{C}_f}}.$$

Coordonnées lagrangienne de masse.

Remplacer x par y tel que

$$\mathrm{d}y \;=\; h\,\mathrm{d}x \;-\; hu\,\mathrm{d}t\,,$$

et poser $\tau = 1/h$.

Le système de Saint-Venant (SV) devient

$$\begin{aligned}
\partial_t \tau \;-\; \partial_y u \qquad\qquad &= \; 0\,, \\
\partial_t u \;+\; \partial_y \left(\frac{\tau^{-2}}{2F^2}\right) \;&= \; 1 - \tau\,|u|u + \nu\,\partial_y(\tau^{-2}\,\partial_y u)\,.
\end{aligned}$$

Coordonnées lagrangienne de masse.

Remplacer x par y tel que

$$\mathrm{d}y \;=\; h\,\mathrm{d}x \;-\; hu\,\mathrm{d}t\,,$$

et poser $\tau = 1/h$.

Le système de Saint-Venant (SV) devient

$$\begin{aligned}
\partial_t \tau \;-\; \partial_y u \qquad &= \; 0\,, \\
\partial_t u \;+\; \partial_y \left(\frac{\tau^{-2}}{2F^2}\right) \;&= \; 1 - \tau\,|u|u + \nu\,\partial_y(\tau^{-2}\,\partial_y u)\,.
\end{aligned}$$

Conjugaison spectrale, respectant la décomposition en Floquet.

Benzoni-Gavage-Mietka-LMR, *en révision*, 2015.

Outline.

1. Modèles
   - Situation globale
   - Le système de St-Venant
   - L'équation (KdV-KS)
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Comme une équation canonique.

À partir d'une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u;\epsilon)) + \partial_x^2(g(u;\epsilon)) + \partial_x^3(h(u;\epsilon)) + \cdots = 0\,.$$

Comme une équation canonique.

À partir d'une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u;\epsilon)) + \partial_x^2(g(u;\epsilon)) + \partial_x^3(h(u;\epsilon)) + \cdots = 0\,.$$

Choisissons $\underline{u}$ constant tel que $g'(\underline{u};\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Comme une équation canonique.

À partir d'une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u;\epsilon)) + \partial_x^2(g(u;\epsilon)) + \partial_x^3(h(u;\epsilon)) + \cdots = 0\,.$$

Choisissons $\underline{u}$ constant tel que $g'(\underline{u};\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Changement d'échelle petite-amplitude onde-longue

$$v = \frac{u - \underline{u}}{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad (\xi, \tau) = (\epsilon^{\frac{1}{2}}(x - f'(\underline{u};\epsilon)t), \epsilon^{\frac{3}{2}}\, t)$$

Comme une équation canonique.

À partir d'une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u;\epsilon)) + \partial_x^2(g(u;\epsilon)) + \partial_x^3(h(u;\epsilon)) + \cdots = 0\,.$$

Choisissons $\underline{u}$ constant tel que $g'(\underline{u};\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Changement d'échelle petite-amplitude onde-longue

$$v = \frac{u-\underline{u}}{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad (\xi,\tau) = (\epsilon^{\frac{1}{2}}(x - f'(\underline{u};\epsilon)t), \epsilon^{\frac{3}{2}}\, t)$$

conduit modulo $\mathcal{O}(\epsilon)$ à

$$\begin{aligned} \partial_\tau v \;&+\; \partial_\xi(\tfrac{1}{2}\, f''(\underline{u};\epsilon)\, v^2) + \partial_\xi^3(h'(\underline{u};\epsilon)\, v) \\ &=\; -\epsilon^{\frac{1}{2}}\,(\partial_\xi^2((g'(\underline{u};\epsilon)/\epsilon)\, v) + \partial_\xi^2(\tfrac{1}{2}\, g''(\underline{u};\epsilon)\, v^2) + \partial_\xi^4(i'(\underline{u};\epsilon)\, v)) \end{aligned}\,.$$

Comme une équation canonique.

À partir d'une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u;\epsilon)) + \partial_x^2(g(u;\epsilon)) + \partial_x^3(h(u;\epsilon)) + \cdots = 0\,.$$

Choisissons $\underline{u}$ constant tel que $g'(\underline{u};\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Changement d'échelle petite-amplitude onde-longue

$$v = \frac{u-\underline{u}}{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad (\xi,\tau) = (\epsilon^{\frac{1}{2}}(x - f'(\underline{u};\epsilon)t), \epsilon^{\frac{3}{2}}\, t)$$

conduit modulo $\mathcal{O}(\epsilon)$ sous conditions de signes à

$$\begin{aligned} \partial_S U &+ \partial_Y\left(\tfrac{1}{2}U^2\right) + \partial_Y^3 U \\ &= -\delta\left(\partial_Y^2 U + R\partial_Y^2(U^2) + \partial_Y^4 U\right) \end{aligned}$$

avec $\delta > 0$ et $R \in \mathbf{R}$.

Depuis (SV) ?

Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Du spectre à la dynamique non linéaire.

Théorème (Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *Inventiones Math.* 2014.)

Une onde périodique diffusivement spectralement stable est non-linéairement stable.

Théorème (Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *Inventiones Math.* 2014.)

Autour d'une onde stable la dynamique est bien décrite par la théorie de la moyennisation des trains d'ondes lentement modulés.

Pour (SV), LMR-Zumbrun, *SIAM J. Math. Anal.*, 2016.

Système modèle.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x,t) \in \mathbf{R}^d$ inconnue.

$$\mathbf{U}_t \; + \; (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x \; = \; \mathbf{U}_{xx} \, .$$

Système modèle.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x,t) \in \mathbf{R}^d$ inconnue.

$$\mathbf{U}_t \; + \; (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x \; = \; \mathbf{U}_{xx} \, .$$

Ondes. $\mathbf{U}(t,x) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{k}(x - \underline{c}t))$ à vitesse $\underline{c}$.

Profil $\underline{\mathbf{U}}$ de période 1, solution de $-\underline{kc}\,\underline{\mathbf{U}}_x \; + \; \underline{k}(\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}}))_x \; = \; \underline{k}^2\underline{\mathbf{U}}_{xx} \, .$

Système modèle.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x,t) \in \mathbf{R}^d$ inconnue.

$$\mathbf{U}_t \; + \; (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x \; = \; \mathbf{U}_{xx} \, .$$

Ondes. $\mathbf{U}(t,x) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{k}(x - \underline{c}t))$ à vitesse $\underline{c}$.

Profil $\underline{\mathbf{U}}$ de période 1, solution de $-\underline{k}\underline{c}\,\underline{\mathbf{U}}_x \; + \; \underline{k}(\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}}))_x \; = \; \underline{k}^2\underline{\mathbf{U}}_{xx} \, .$

Générateur de la dynamique linéaire

$$L := \underline{k}^2\,\partial_x^2 + \underline{k}\,\underline{c}\partial_x - \underline{k}\,\partial_x \mathrm{d}\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}})$$

Système modèle.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x,t) \in \mathbf{R}^d$ inconnue.

$$\mathbf{U}_t \;+\; (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x \;=\; \mathbf{U}_{xx}\,.$$

Ondes. $\mathbf{U}(t,x) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{k}(x - \underline{c}t))$ à vitesse $\underline{c}$.

Profil $\underline{\mathbf{U}}$ de période 1, solution de $-\underline{k}\underline{c}\,\underline{\mathbf{U}}_x \;+\; \underline{k}(\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}}))_x \;=\; \underline{k}^2\underline{\mathbf{U}}_{xx}\,.$

Générateur de la dynamique linéaire

$$L := \underline{k}^2\,\partial_x^2 + \underline{k}\,\underline{c}\partial_x - \underline{k}\,\partial_x \mathrm{d}\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}})$$

de symboles de Bloch

$$L_\xi := \underline{k}^2\,(\partial_x + \mathrm{i}\xi)^2 + \underline{k}\,(\partial_x + \mathrm{i}\xi)(\underline{c} - \mathrm{d}\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}})), \quad \xi \in [-\pi, \pi].$$

Chaque L_ξ agit sur des fonctions de période 1.

▸ Transformation intégrale ?

▸ Stabilité spectrale diffusive ?

Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
   - Méthodes numériques
   - L'équation de KdV-KS
   - Le système de Saint Venant
4. Conclusion

Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
   - Méthodes numériques
   - L'équation de KdV-KS
   - Le système de Saint Venant
4. Conclusion

Méthode de Hill & fonctions d'Evans.

Calculs de profils. Puis

- Méthode de Hill :
  pour chaque ξ, projeter L_ξ sur un nombre fini de modes de Fourier (Galerkin) pour obtenir une matrice.
  Calculer le spectre.

Bibliothèque Matlab par Blake Barker, Jeffrey Humpherys, Kevin Zumbrun.
`http://impact.byu.edu/stablab/`

Méthode de Hill & fonctions d'Evans.

Calculs de profils. Puis

- Méthode de Hill :
  pour chaque ξ, projeter L_ξ sur un nombre fini de modes de Fourier (Galerkin) pour obtenir une matrice.
  Calculer le spectre.

- Fonction d'Evans.
  Écrire $L\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$ comme une équation différentielle $Y' = A(\lambda, \cdot)Y$ d'opérateur solution Φ_λ. Alors, X étant la période,

$$\lambda \in \sigma_{per}(L_\xi) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\det(\Phi_\lambda(X,0) - e^{i\xi X})}_{D(\lambda,\xi)} \;=\; 0\,.$$

  Compter les racines de $D(\cdot, \xi)$ (analytique) à l'intérieur d'un contour.

Bibliothèque Matlab par Blake Barker, Jeffrey Humpherys, Kevin Zumbrun.
`http://impact.byu.edu/stablab/`

Fonction d'Evans : problème-jouet.

$L = \partial_x^2$ vu comme périodique de période $X = 1$.

$\lambda - L$ associé à

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} Z .$$

Fonction d'Evans : problème-jouet.

$L = \partial_x^2$ vu comme périodique de période $X = 1$.

$\lambda - L$ associé à

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} Z \,.$$

Fonction d'Evans : $D(\lambda, \xi) = (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{i\xi})\,(e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{i\xi})$.

Fonction d'Evans : problème-jouet.

$L = \partial_x^2$ vu comme périodique de période $X = 1$.

$\lambda - L$ associé à

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} Z \,.$$

Fonction d'Evans : $D(\lambda, \xi) = (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{i\xi})\,(e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{i\xi})$.

$\lambda \in \sigma_{per}(L_\xi)$

si et seulement si $e^{i\xi} \in \{e^{\sqrt{\lambda}}, e^{-\sqrt{\lambda}}\}$

si et seulement s'il existe $j \in \mathbf{Z}$ tel que $\lambda = (i(\xi + 2\pi j))^2$.

Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
   - Méthodes numériques
   - L'équation de KdV-KS
   - Le système de Saint Venant
4. Conclusion

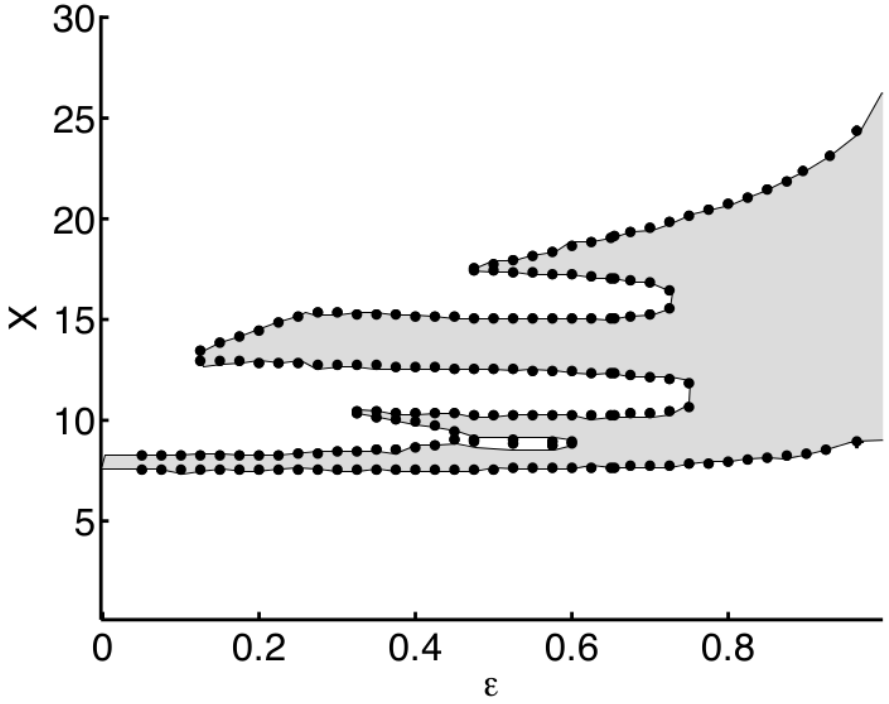
Une étude complète.

$$U_t + (\tfrac{1}{2}U^2)_x + \varepsilon\, U_{xxx} \;+\; \delta(U_{xx} + U_{xxxx}) \;=\; 0.$$

avec $\varepsilon^2 + \delta^2 = 1$.

Diagramme de stabilité.

Chang-Demekhin-Kopelevich, *Phys. D* 1993.
Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *Phys. D* 2013.



Résultat analytique dans la limite KdV $(\varepsilon, \delta) \to (1, 0)$.

Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *Trans. A.M.S.* 2015.

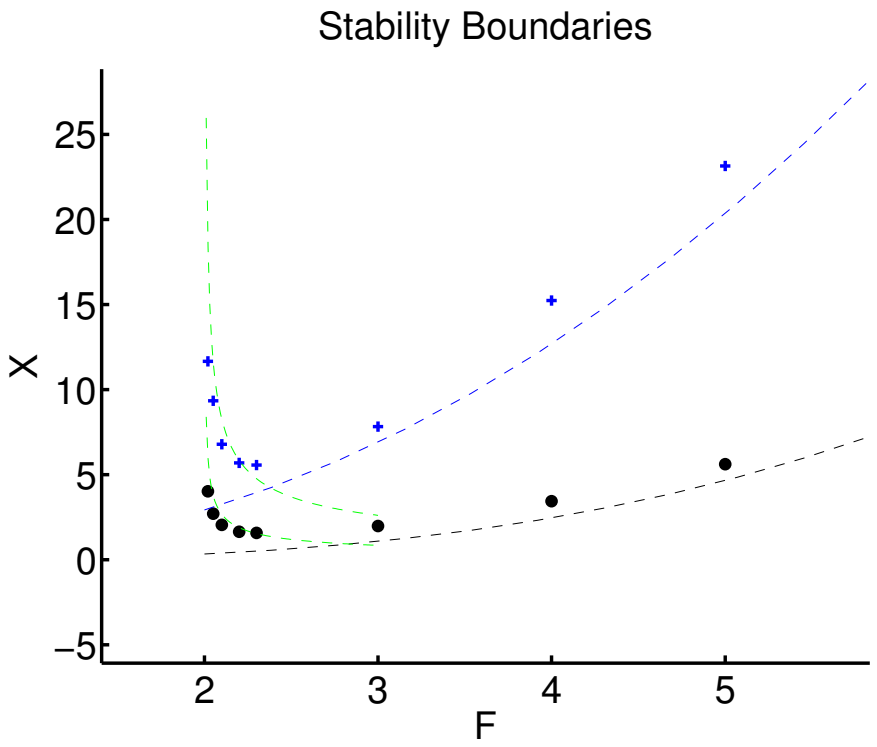
Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
   - Méthodes numériques
   - L'équation de KdV-KS
   - Le système de Saint Venant
4. Conclusion

Proche du seuil.

Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *soumis*, 2015.

Résultats analytiques dans la limite KdV.



$\underline{q} = q_0\, F,\ q_0 = 0.4,\ \nu = 0.1.$

Lignes vertes :

théorie de la limite KdV.

Lignes bleues/noires :

régression linéaire depuis le numérique des grands Froude.

Débit relatif : $\underline{q} \equiv -\underline{c}\ \underline{\tau}(\cdot) + \underline{u}(\cdot)$.

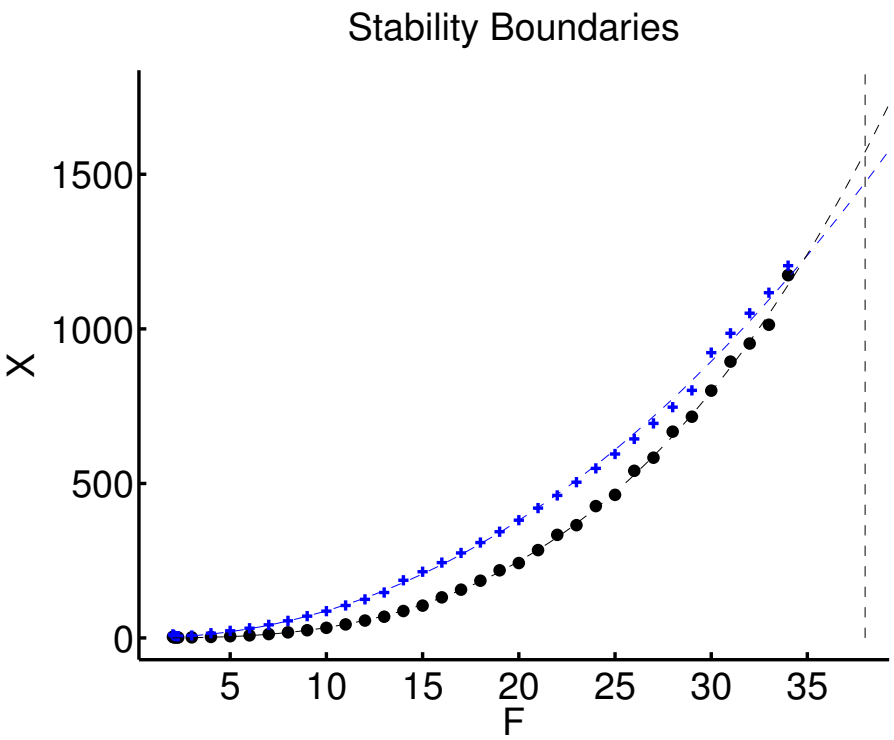
Étude complète.

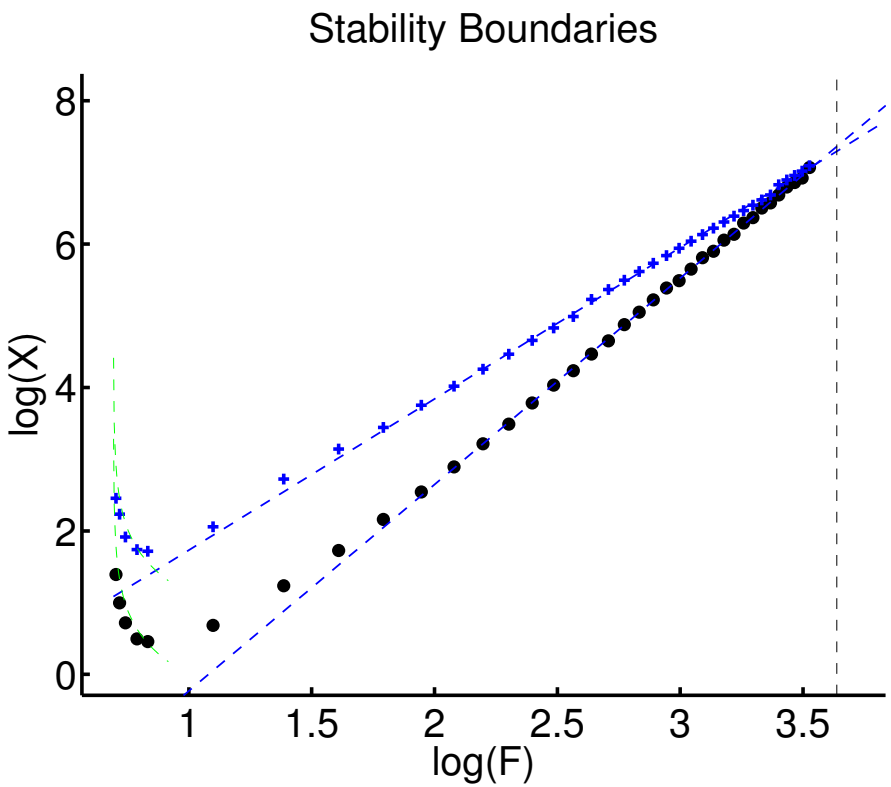
Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *soumis*, 2015.

Analyse partielle dans la limite de Froude infini : pas d'onde stable.

Observation numérique : asymptotiquement, bande donnée par

$$\begin{cases} \log(X) &= -0.692\log(F) + 3.46\log(\underline{q}) + 0.3 \quad \text{bord inférieur,} \\ \log(X) &= -0.791\log(F) + 1.73\log(\underline{q}) + 3.92 \quad \text{bord supérieur.} \end{cases}$$

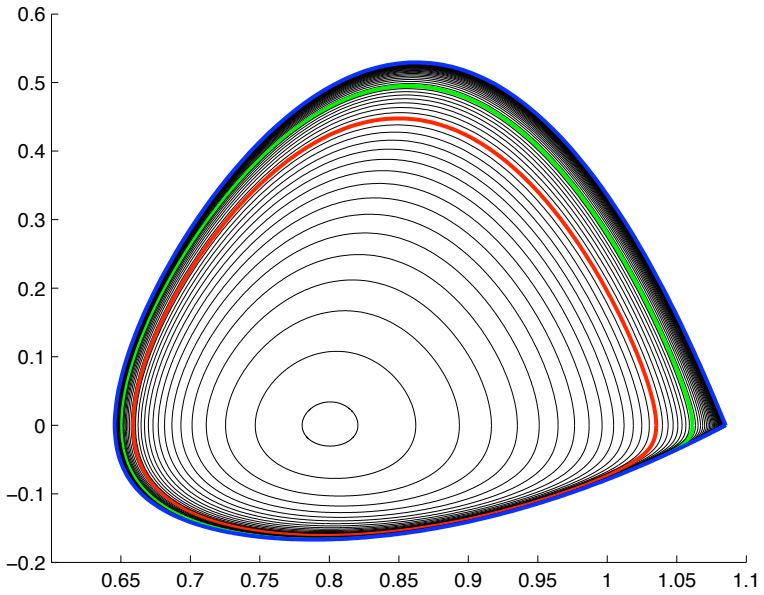




Un cas intermédiaire : $F = \sqrt{6}$, $\nu = 0.1$, $q = 1.5745$.

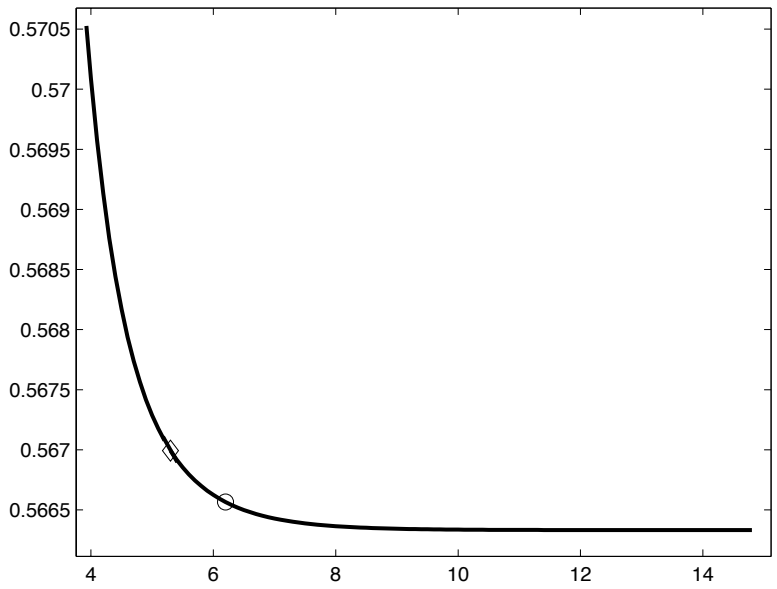
Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *J.ÉDP, Port-d'Albret*, 2010.

Portraits de phase superposés.



Inférieur, typique, supérieur.

Vitesse de phase *vs.* période.

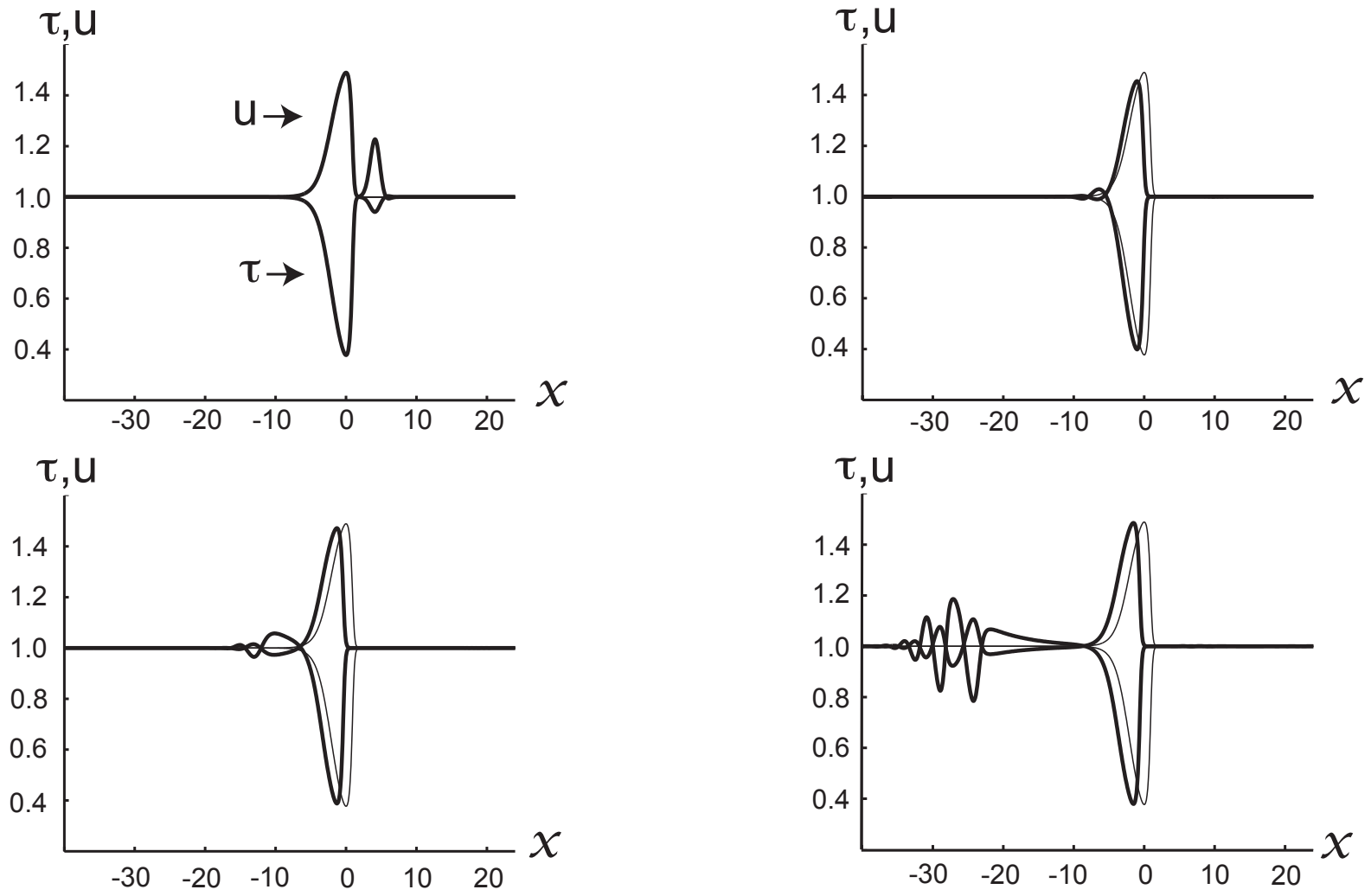


Losange, cercle.

Supérieur : $X = 20.4$.

Instabilité convective des ondes solitaires.

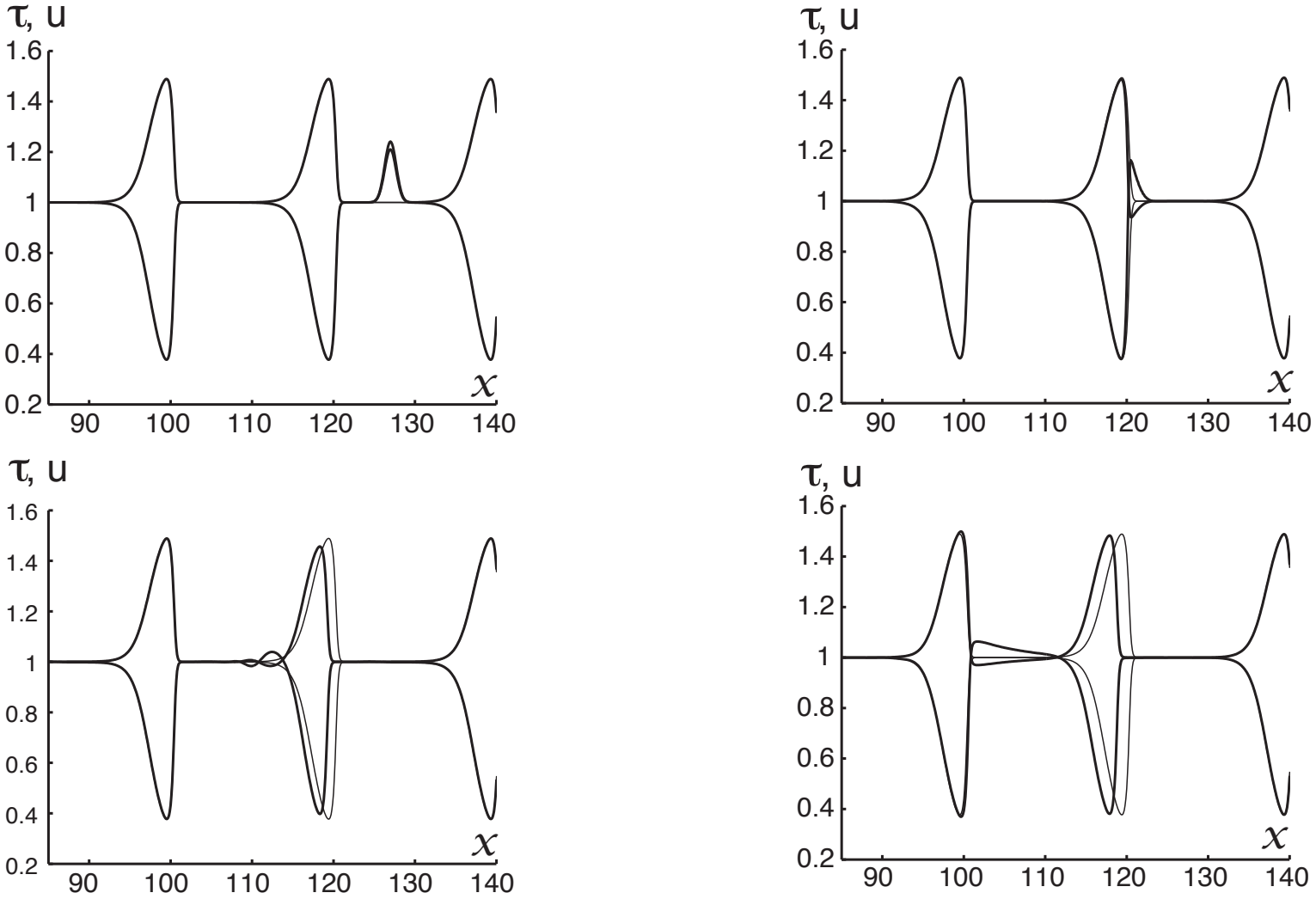
Barker-Johnson-LMR-Zumbrun, *Phys. D* 2011.



Instantanés d'une évolution temporelle.

Bosses *vs.* plats : un cas stable.

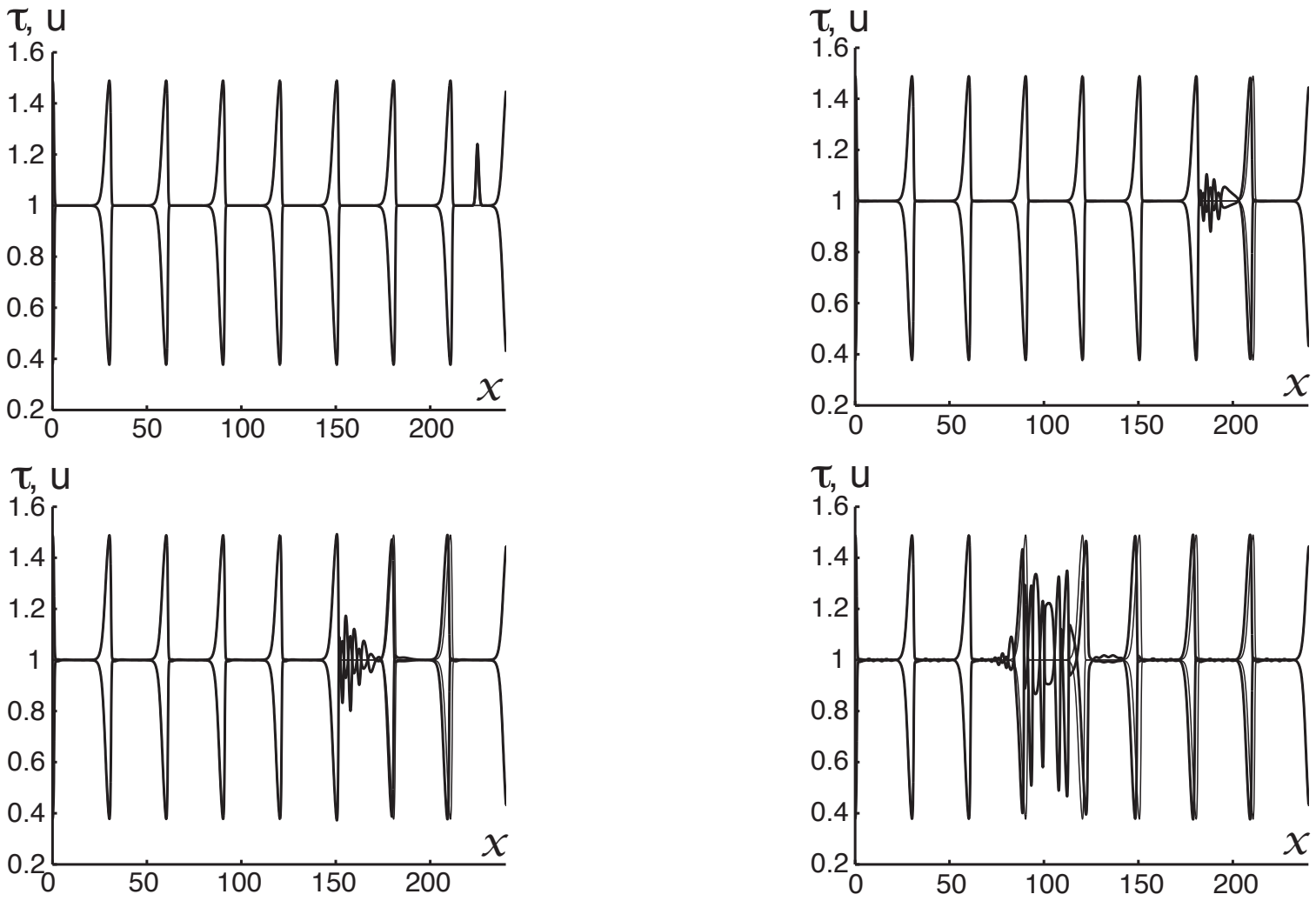
Barker-Johnson-LMR-Zumbrun, *Phys. D* 2011.



Instantanés d'une évolution temporelle.

Bosses *vs.* plats : un cas instable.

Barker-Johnson-LMR-Zumbrun, *Phys. D* 2011.



Instantanés d'une évolution temporelle.

Transition depuis la petite amplitude.

Transition vers l'onde solitaire.

Outline.

1. Modèles
2. Un aperçu de la théorie non linéaire
3. Études spectrales numériques
4. Conclusion

Quelques problèmes spectraux ouverts.

- **Contrôle** par la bathymétrie.
- Mécanisme des **frontières de stabilité**.
- Limite **non visqueuse**.
- Prise en compte de la **tension de surface**.
- Modèles à **surface libre**.
- **Instabilités secondaires**, ondes périodiques multiD.

Ondes de (KdV).

Aux translations près, profil et vitesse de phase

$$\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)}(\,\cdot\,)\,, \qquad c_{\mathrm{KdV}}(k,M,P)\,,$$

en fonction de k le nombre d'onde, de $M := \langle \underline{U} \rangle$ la valeur moyenne et de $P := \langle \frac{1}{2}\underline{U}^2 \rangle$ l'impulsion moyenne.

Ondes de (KdV).

Aux translations près, profil et vitesse de phase

$$\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)}(\,\cdot\,)\,, \qquad c_{\mathrm{KdV}}(k,M,P)\,,$$

en fonction de k le nombre d'onde, de $M := \langle \underline{U} \rangle$ la valeur moyenne et de $P := \langle \frac{1}{2}\underline{U}^2 \rangle$ l'impulsion moyenne.

Théorème (Spektor, *ZEFT* 1988.)

Les ondes cnoidales sont spectralement stables

$$\sigma(L_{\mathrm{KdV}}) \subset \mathrm{i}\mathbf{R}\,.$$

Bottman-Deconinck *DCDS* 2009.

Ondes de (KdV-KS) proches de celles de (KdV).

Critère de sélection : $R(k, M, P) = 0$

$$R(k, M, P) \ := \ \langle \ (\ (\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)})' \ )^2 \ \rangle \ - \ \langle \ (\ (\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)})'' \ )^2 \ \rangle$$

donne P en fonction de (k, M), $P = P_*(k, M)$.

Ondes de (KdV-KS) proches de celles de (KdV).

Critère de sélection : $R(k, M, P) = 0$

$$R(k, M, P) \ := \ \langle \ (\ (\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)})' \ )^2 \ \rangle \ - \ \langle \ (\ (\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P)})'' \ )^2 \ \rangle$$

donne P en fonction de (k, M), $P = P_*(k, M)$.

Théorème (Ercolani-McLaughlin-Roitner, *J. Nonlinear Sc.* 1993.)

Toute onde $\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P_*(k,M))}$ génère une famille d'ondes proches $(\underline{U}_{\delta}^{(k,M)})_{\delta}$.

Formes normales : à la Fenichel, perturbations singulières ;
à la Melnikov, perturbations de systèmes hamiltoniens.

Un indice de stabilité.

Développement non uniforme : si $\lambda_0 \in \sigma(L_{\mathrm{KdV},\xi})$ est simple alors

$$\lambda(\xi, \lambda_0, \delta) \overset{\delta \to 0}{=} \lambda_0 + \delta\, \lambda_1(\xi, \lambda_0) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

avec un correcteur explicite λ_1.

Un indice de stabilité.

Développement non uniforme : si $\lambda_0 \in \sigma(L_{\mathsf{KdV},\xi})$ est simple alors

$$\lambda(\xi, \lambda_0, \delta) \overset{\delta \to 0}{=} \lambda_0 + \delta\, \lambda_1(\xi, \lambda_0) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

avec un correcteur explicite λ_1.

Définissons

$$\mathrm{Ind} := \sup_{\substack{\lambda_0 \in \sigma(L_{\mathsf{KdV},\xi}) \setminus \{0\} \\ \xi \in [-\pi, \pi)}} \mathrm{Re}\left(\lambda_1(\xi, \lambda_0)\right) .$$

Persistance de stabilité quand $\mathrm{Ind} < 0$.
Instabilité quand $\mathrm{Ind} > 0$.

Persistance de stabilité pour (KdV-KS).

Observation numérique. (Bar-Nepomnyashchy, *Phys. D* 1995.)

$\mathrm{Ind} < 0$ quand la période X se trouve dans

$$(X_1, X_2) \qquad \text{avec } X_1 \approx 8.49 \qquad \text{et} \qquad X_2 \approx 26.17\,.$$

Persistance de stabilité pour (KdV-KS).

Observation numérique. (Bar-Nepomnyashchy, *Phys. D* 1995.)
$\mathrm{Ind} < 0$ quand la période X se trouve dans

$$(X_1, X_2) \qquad \text{avec } X_1 \approx 8.49 \qquad \text{et} \qquad X_2 \approx 26.17\,.$$

Démonstration assistée par ordinateur (Barker, *JDE* 2014.)
Arithmétique des intervalles.

Persistance de stabilité pour (KdV-KS).

Observation numérique. (Bar-Nepomnyashchy, *Phys. D* 1995.)
$\mathrm{Ind} < 0$ quand la période X se trouve dans

$$(X_1, X_2) \qquad \text{avec } X_1 \approx 8.49 \qquad \text{et} \qquad X_2 \approx 26.17\,.$$

Démonstration assistée par ordinateur (Barker, *JDE* 2014.)
Arithmétique des intervalles.

Théorème (Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *Trans. A.M.S.* 2015.)

Toute onde de (KdV) telle que $\mathrm{Ind} < 0$ génère une famille d'ondes diffusivement spectralement stable pour (KdV-KS).

Ondes de (SV) proches de celles de (KdV).

Rappel : on zoome de (τ, u, y, t, c) vers $(\tilde{\tau}, \tilde{u}, Y, S, \tilde{c})$. On pose

$$\delta_F = \frac{\sqrt{F-2}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}.$$

Ondes de (SV) proches de celles de (KdV).

Rappel : on zoome de (τ, u, y, t, c) vers $(\tilde{\tau}, \tilde{u}, Y, S, \tilde{c})$. On pose

$$\delta_F = \frac{\sqrt{F-2}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}.$$

Théorème (Barker-Jonhson-Noble-LMR-Zumbrun, *soumis*, 2015.)

Toute onde $\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P_*(k,M))}$ génère une famille d'ondes $(\underline{\mathbf{U}}_F^{(k,M)})_F$ telle que

$$\tilde{\tau}_F = -\underline{U}_{\delta_F} + \mathcal{O}((\delta_F)^2) \quad \text{and} \quad \tilde{c}_F = c_{\delta_F} + \mathcal{O}((\delta_F)^2).$$

Perturbations de systèmes hamiltoniens à la Melnikov.

Ondes de (SV) proches de celles de (KdV).

Rappel : on zoome de (τ, u, y, t, c) vers $(\tilde{\tau}, \tilde{u}, Y, S, \tilde{c})$. On pose

$$\delta_F = \frac{\sqrt{F-2}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}.$$

Théorème (Barker-Jonhson-Noble-LMR-Zumbrun, *soumis*, 2015.)

Toute onde $\underline{U}_{\mathrm{KdV}}^{(k,M,P_*(k,M))}$ génère une famille d'ondes $(\underline{\mathbf{U}}_F^{(k,M)})_F$ telle que

$$\tilde{\tau}_F = -\underline{U}_{\delta_F} + \mathcal{O}((\delta_F)^2) \quad \text{and} \quad \tilde{c}_F = c_{\delta_F} + \mathcal{O}((\delta_F)^2).$$

Perturbations de systèmes hamiltoniens à la Melnikov.
Avec le même indice Ind !

▸ Éléments de démonstration ?

Théorème (Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *soumis*, 2015.)

Toute onde de (KdV) telle que $\mathrm{Ind} < 0$ génère une famille d'ondes diffusivement spectralement stable pour (SV).

Depuis (SV).

Constantes de référence

τ_0 , vitesse du fluide $u_0 \;=\; \tau_0^{-1/2}$, vitesse du son $c_0 \;=\; \frac{1}{2}\tau_0^{-3/2}$ à $F = 2$.

Depuis (SV).

Constantes de référence

τ_0 , vitesse du fluide $u_0 \;=\; \tau_0^{-1/2}$, vitesse du son $c_0 \;=\; \frac{1}{2}\tau_0^{-3/2}$ à $F = 2$.

Échelles petite-amplitude onde-longue avec $\widetilde{\delta} = \sqrt{F-2}$

$$\tilde{\tau} \;=\; 3\,\widetilde{\delta}^{-2}\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right), \qquad \tilde{u} \;=\; 6\,\widetilde{\delta}^{-2}\left(\frac{u}{u_0} - 1\right),$$

$$S \;=\; \frac{\widetilde{\delta}^3\; t}{4\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}, \qquad Y \;=\; \frac{\tau_0^{5/4}\;\widetilde{\delta}\,(x - c_0 t)}{\nu^{1/2}}.$$

De (SV) à (KdV-KS).

Posons $\tilde{w} = 2\widetilde{\delta}^{-2}(\tilde{u} + \tilde{\tau})$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0$$

$$\frac{\widetilde{\delta}^3}{8\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_S \tilde{w} + \frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y \left(\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} + \widetilde{\delta}^2 f(\tilde{\tau}, \delta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau} + \widetilde{\delta}^2 g(\tilde{\tau}, \tilde{w}, \delta) + \frac{1}{2}\widetilde{\delta}^2 \partial_{YY}\tilde{w}$$

$$+ \widetilde{\delta}^2 \partial_Y \left(r(\tilde{\tau}, \delta)\partial_Y(\delta^2 \tilde{w} - c_0 \tilde{\tau})\right)$$

pour certaines fonctions f, g, r.

Retour ?

De (SV) à (KdV-KS).

Posons $\tilde{w} = 2\widetilde{\delta}^{-2}(\tilde{u} + \tilde{\tau})$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0$$

$$\frac{\widetilde{\delta}^3}{8\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_S \tilde{w} + \frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y\left(\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} + \widetilde{\delta}^2 f(\tilde{\tau}, \delta)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau} + \widetilde{\delta}^2 g(\tilde{\tau}, \tilde{w}, \delta) + \frac{1}{2}\widetilde{\delta}^2 \partial_{YY}\tilde{w}$$
$$+ \widetilde{\delta}^2 \partial_Y\left(r(\tilde{\tau}, \delta)\partial_Y(\delta^2 \tilde{w} - c_0\tilde{\tau})\right)$$

pour certaines fonctions f, g, r.

Modulo $\mathcal{O}(\widetilde{\delta}^2)$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0\,,$$
$$\frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y\left(\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau}\,.$$

Retour ?

De (SV) à (KdV-KS).

Posons $\tilde{w} = 2\widetilde{\delta}^{-2}(\tilde{u} + \tilde{\tau})$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0$$

$$\frac{\widetilde{\delta}^3}{8\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_S \tilde{w} + \frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y \left(\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} + \widetilde{\delta}^2 f(\tilde{\tau}, \delta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau} + \widetilde{\delta}^2 g(\tilde{\tau}, \tilde{w}, \delta) + \frac{1}{2}\widetilde{\delta}^2 \partial_{YY}\tilde{w}$$

$$+ \widetilde{\delta}^2 \partial_Y \left(r(\tilde{\tau}, \delta)\partial_Y(\delta^2 \tilde{w} - c_0 \tilde{\tau})\right)$$

pour certaines fonctions f, g, r.

Modulo $\mathcal{O}(\widetilde{\delta}^2)$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0\,,$$

$$\frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y \left(\tilde{\tau} + \partial_{YY}\tilde{\tau}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau}\,.$$

Retour ?

De (SV) à (KdV-KS).

Posons $\tilde{w} = 2\widetilde{\delta}^{-2}(\tilde{u} + \tilde{\tau})$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0$$

$$\frac{\widetilde{\delta}^3}{8\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_S \tilde{w} + \frac{\widetilde{\delta}}{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}\partial_Y\left(\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} + \widetilde{\delta}^2 f(\tilde{\tau}, \delta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau} + \widetilde{\delta}^2 g(\tilde{\tau}, \tilde{w}, \delta) + \frac{1}{2}\widetilde{\delta}^2 \partial_{YY}\tilde{w}$$

$$+ \widetilde{\delta}^2 \partial_Y\left(r(\tilde{\tau}, \delta)\partial_Y(\delta^2 \tilde{w} - c_0\tilde{\tau})\right)$$

pour certaines fonctions f, g, r.

Modulo $\mathcal{O}(\widetilde{\delta}^2)$

$$\partial_S \tilde{\tau} - \partial_Y \tilde{w} = 0\,,$$

$$\frac{\widetilde{\delta}}{\underbrace{2\tau_0^{1/4}\nu^{1/2}}_{\delta}}\partial_Y\left(\tilde{\tau} + \partial_{YY}\tilde{\tau}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \tilde{w} - \partial_{YY}\tilde{\tau}\,.$$

Transformation intégrale.

Décomposition en ondes de Bloch

$$g(x) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}\xi x}\; \check{g}(\xi, x)\; \mathrm{d}\xi,$$

où ξ est un exposant de Floquet

$$\begin{aligned} \check{g}(\xi, x+1) &= \check{g}(\xi, x), \\ e^{\mathrm{i}\xi(x+1)}\, \check{g}(\xi, x+1) &= e^{\mathrm{i}\xi}\; e^{\mathrm{i}\xi x}\, \check{g}(\xi, x). \end{aligned}$$

Depuis la décomposition de Fourier

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{\mathrm{i}\xi x}\; \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Transformation de Floquet-Bloch

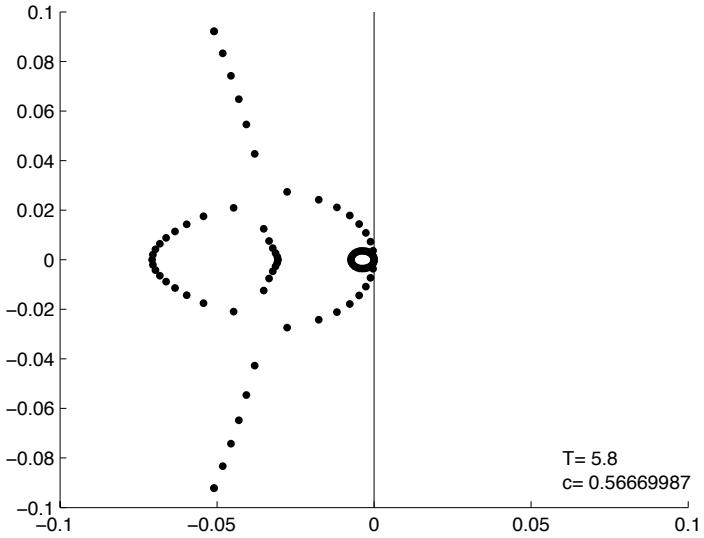
$$\check{g}(\xi, x) \;:=\; \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{\mathrm{i}\, 2j\pi x}\; \widehat{g}(\xi + 2j\pi) \;=\; = \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{-\mathrm{i}\,\xi\,(x+k)}\; g(x+k).$$

Retour ?

Stabilité spectrale diffusive.

Paramétrage spectral

$$\sigma(L) \;=\; \bigcup_{\xi\in[-\pi,\pi]} \sigma_{per}(L_\xi)\,.$$



Spectre d'une onde stable de (SV). Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun, *J.ÉDP, Port-d'Albret*, 2010.

(D1) Spectre critique réduit à $\{0\}$.

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda < 0\} \cup \{0\}.$$

(D2) $\exists\theta > 0,\ \forall\xi \in [-\pi,\pi]$,

$$\sigma_{per}(L_\xi) \;\subset\; \{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda \le -\theta|\xi|^2\}.$$

(D3) $\lambda = 0$ de multiplicité $d+1$ for L_0 (dimension minimale).

(H) Vitesses de groupes distinctes.

Retour ?

Dynamique spatiale.

Problème spectral : $\lambda \in \sigma_{per}(L_\xi)$ pour un $\xi \in [-\pi/X, \pi/X)$.

Dynamique spatiale.

Problème spectral : $\lambda \in \sigma_{per}(L_\xi)$ pour un $\xi \in [-\pi/X, \pi/X)$.

Vu comme l'existence d'un Z non nul tel que

$$Z' = A(\lambda, \cdot)Z \qquad \text{et} \qquad Z(X) = e^{i\xi X}\, Z(0)\,.$$

Défaut d'hyperbolicité de $\Phi_\lambda(X, 0)$ (application de Poincaré).

Avec un déterminant : fonction d'Evans

$$D(\lambda, \xi) := \det(\Phi_\lambda(X, 0) - e^{i\xi X})\,.$$

Problème-jouet 1.

$L = \partial_x^2$ vu comme périodique de période $X = 1$.

$\lambda - L$ associé à

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} Z \, .$$

Problème-jouet 1.

$L = \partial_x^2$ vu comme périodique de période $X = 1$.

$\lambda - L$ associé à

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} Z \,.$$

$\lambda \in \sigma_{per}(L_\xi)$

si et seulement si $e^{i\xi} \in \{e^{\sqrt{\lambda}}, e^{-\sqrt{\lambda}}\}$

si et seulement s'il existe $j \in \mathbf{Z}$ tel que $\lambda = (i(\xi + 2\pi j))^2$.

Problème-jouet 2.

$$Z' = \left(\underbrace{\sum_j \mu_j \, \Pi_j}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\epsilon \sum_{j,k} \Pi_j \, B \, \Pi_k}_{\text{petit}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) Z \, .$$

Problème-jouet 2.

$$Z' = \left(\sum_j \mu_j \, \Pi_j + \epsilon \sum_{j,k} \Pi_j \, B \, \Pi_k + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) Z \, .$$

Le changement

$$W = \left(\mathrm{Id} + \epsilon \sum_{j \neq k} \frac{\Pi_j \, B \, \Pi_k}{\mu_j - \mu_k} \right) Z$$

conduit à

$$W' = \left(\underbrace{\sum_j (\mu_j \, \Pi_j + \epsilon \, \Pi_j \, B \, \Pi_j)}_{\text{diagonal}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) W \, .$$

Problème de relaxation pour la dynamique moyennée.

Développement de $D_\delta(\lambda,\xi)$ lorsque $(\xi,\lambda,\delta)\to(0,0,0)$

$$\prod_{j=1}^{3}(\lambda-\mathrm{i}\alpha_j(\xi)\xi)+\gamma\delta\prod_{k=1}^{2}(\lambda-\mathrm{i}\beta_k^0\xi)+\mathcal{O}(\delta^2(|\lambda|^2+|\xi|^2)+\delta^3(|\lambda|+|\xi|))$$

à un facteur ne s'annulant pas près.

Interprétation : Noble-Rodrigues, *Indiana Univ. Math. J.* 2013.

Retour ?

Problème de relaxation pour la dynamique moyennée.

Développement de $D_\delta(\lambda,\xi)$ lorsque $(\xi,\lambda,\delta)\to(0,0,0)$

$$\prod_{j=1}^{3}(\lambda-\mathrm{i}\alpha_j(\xi)\xi)+\gamma\delta\prod_{k=1}^{2}(\lambda-\mathrm{i}\beta_k^0\xi)+\mathcal{O}(\delta^2(|\lambda|^2+|\xi|^2)+\delta^3(|\lambda|+|\xi|))$$

à un facteur ne s'annulant pas près.
Interprétation : Noble-Rodrigues, *Indiana Univ. Math. J.* 2013.

Lorsque $|(\xi,\delta/\xi)|\to 0$, les λ_k/ξ se développent en

$$k=1,2,3, \qquad \lambda_k(\xi,\delta) \;=\; \mathrm{i}\alpha_k(\xi)\,\xi \;+\; \delta\,A_k \;+\; \mathcal{O}(\delta\xi)\,.$$

Retour ?

Problème de relaxation pour la dynamique moyennée.

Développement de $D_\delta(\lambda,\xi)$ lorsque $(\xi,\lambda,\delta)\to(0,0,0)$

$$\prod_{j=1}^{3}(\lambda-\mathrm{i}\alpha_j(\xi)\xi)+\gamma\delta\prod_{k=1}^{2}(\lambda-\mathrm{i}\beta_k^0\xi)+\mathcal{O}(\delta^2(|\lambda|^2+|\xi|^2)+\delta^3(|\lambda|+|\xi|))$$

à un facteur ne s'annulant pas près.
Interprétation : Noble-Rodrigues, *Indiana Univ. Math. J.* 2013.

Lorsque $|(\xi,\delta/\xi)|\to 0$, les λ_k/ξ se développent en

$$k=1,2,3, \qquad \lambda_k(\xi,\delta) \;=\; \mathrm{i}\alpha_k(\xi)\,\xi \;+\; \delta\,A_k \;+\; \mathcal{O}(\delta\xi)\,.$$

Lorsque $|(\delta,\xi/\delta)|\to 0$, λ_1/ξ, λ_2/ξ, λ_3/δ se développent en

$$j=1,2, \qquad \lambda_j(\xi,\delta) \;=\; \mathrm{i}\beta_j^0\,\xi+B_j\frac{\xi^2}{\delta}+\mathcal{O}\left(\delta|\xi|+\frac{|\xi|^3}{\delta^2}\right)$$

$$\text{et} \qquad \lambda_3(\xi,\delta) \;=\; B_3\,\delta+o(\delta)\,.$$

Retour ?