
Diffraction par un obstacle élastique

développement basse fréquence

et applications à l'imagerie

Loïc Le Marrec

Séminaire d'Analyse Numérique, IRMAR

Jeudi 11 octobre 2007

J-P. Groby (CMAP, Polytechnique, Palaiseau - France)

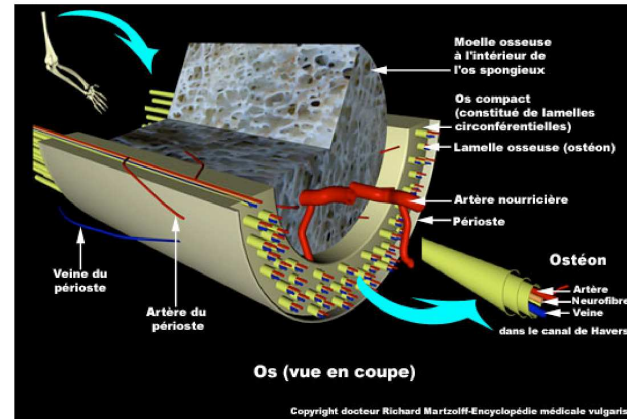
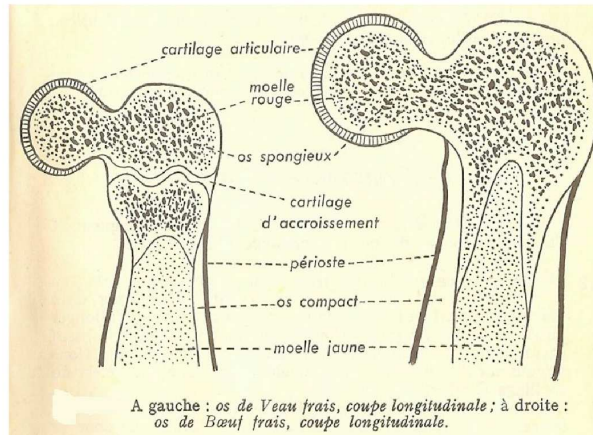
A. Wirgin (LMA, Marseille - France)

C. Tsogka (Department of Mathematics, University of Chicago - USA)

Plan

- Introduction
 - Qu'est-ce qu'un os ?
 - Caractérisation osseuse
 - Choix du problème
 - Un modèle de radius humain
- Position du problème
- Problème direct
- Problème inverse
- Conclusion

Introduction : Qu'est ce qu'un os?

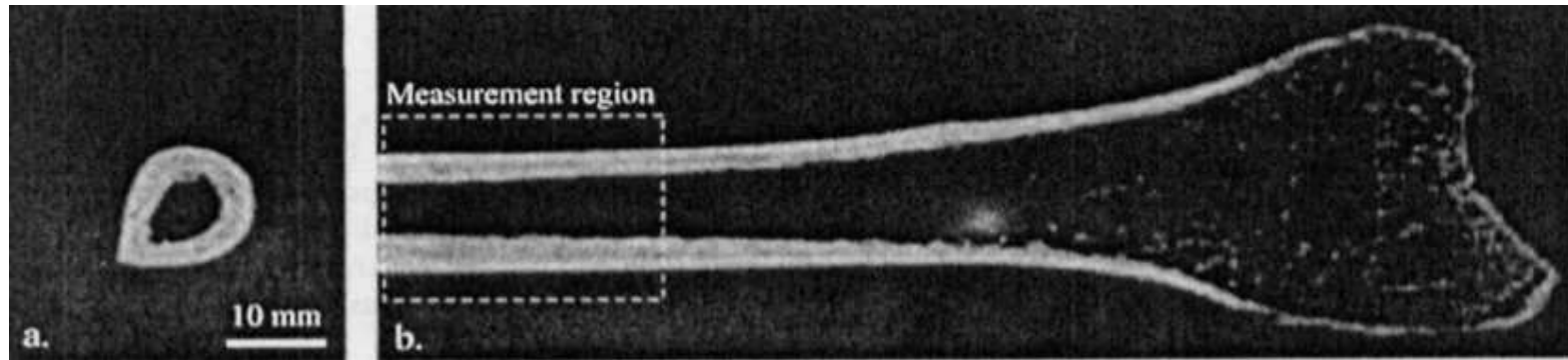


- L'os est un tissu vivant (remodelage osseux) composé
 - d'une matrice solide : trabécule, fibres organiques de collagène
 - d'un milieu inorganique
- ⇒ Échelle microscopique : milieu inhomogène, anisotrope et poreux
- ⇒ Échelle macro/mesoscopique : milieu homogénéisé
- Deux types d'os
 - os cortical (portion appendiculaire) : porosité 3 – 5%
 - ⇒ Modèle de solide élastique équivalent (Buchanan et al. 1998)
 - ⇒ Modèle de solide viscoélastique équivalent (Morochnik et al. 1996)
 - os spongieux (portion terminale) : porosité jusqu'à 90%
 - ⇒ Modèle porélastique (Biot 1962)

Introduction : Caractérisation osseuse

- Pathologie : ostéoporose
 - Déséquilibre du processus de remodelage
 - Os moins dense, plus poreux, paroi plus fine
- Qu'est ce qui doit être mesuré ? paramètre d'intérêt :
 - Propriétés géométriques
 - Propriétés mécaniques
- Déterminer un modèle direct mathématiquement et physiquement admissible
 - Pour prédire la réponse osseuse *in vitro* et *in vivo*
 - Pour inverser des mesures (réelles ou simulées)
- Propriété du modèle :
 - Sensible aux paramètres d'intérêts
 - Méthode robuste, rapide (imagerie temps réelle en application clinique)

Introduction : Choix du problème

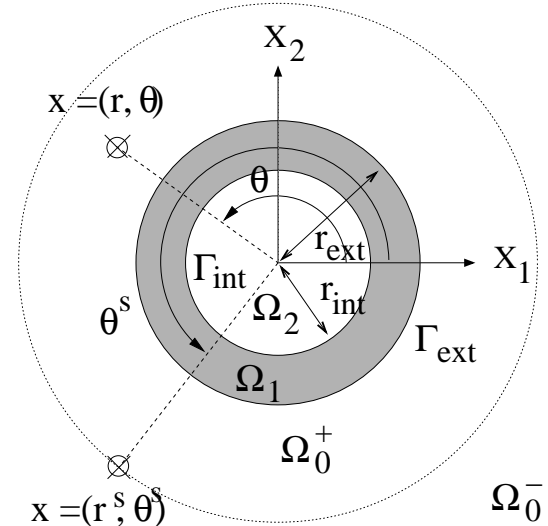
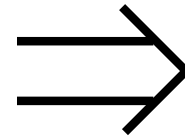
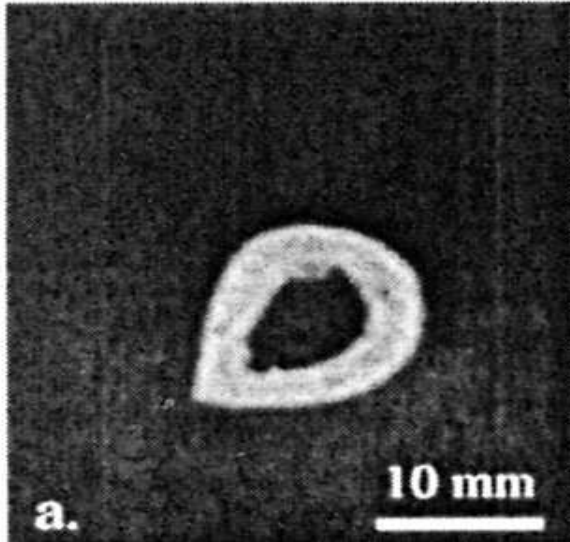


Radius humain. Tomographie aux rayons X (Bossy et al. 2003)

La zone appendiculaire d'un os long est sensible à l'ostéoporose qui s'y illustre par une réduction de l'épaisseur, une perte de densité et une légère augmentation de porosité.

- Milieu \Rightarrow modèle viscoélastique (os cortical)
 - Géométrie \Rightarrow cylindre infini ($L \gg r$)
 - La section \Rightarrow déterminée par tomographie X
 - **Les propriétés viscoélastiques \Rightarrow déterminée par sondage US**
 - Les tissus mous (autour) favorisent la progression d'ondes de compressions
- \Rightarrow Caractérisation US d'une section droite de la zone appendiculaire d'un radius
- \Rightarrow Modèle 2D, PSV

Introduction : Un modèle de radius humain



Cylindre circulaire : $r_{ext} = 6.0mm$ et $r_{int} = 2.56mm$

Ω_j : milieux viscoélastiques équivalents, homogènes et isotropes ^a

	ρ^j ($kg \cdot m^{-3}$)	$(c_s^j)_R$ ($m \cdot s^{-1}$)	Q_s^j	$(c_p^j)_R$ ($m \cdot s^{-1}$)	Q_{pj} .
$\Omega_0 \equiv \Omega_2$	1030	200	100	1500	150
Ω_1	1850	1800	30	3050	50

^aE.L. Masen *Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissue-like materials* JASA (1983)

Plan

- Introduction
- Position du problème
 - Direct
 - Inverse
- Problème direct
- Problème inverse
- Conclusion

Position du problème direct

● Domaine fréquentiel

● Problème basse fréquence :

- Propriétés moyennes
- Forme de l'obstacle négligeable : tube circulaire
- Sondage monochromatique

● Problème haute fréquence :

- Propriétés locales
- Forme de l'obstacle non négligeable
- Sondage impulsionnel

● Mesures et simulations

- Mesures simulées code FEM
- Estimations analytiques

Position du problème inverse

● Paramètres connus

- Propriétés mécaniques de Ω^0 et Ω^2
- Configuration de mesure : position, polarisation, fonction de forme de la source, position des récepteurs

● Paramètres plus ou moins connus

- Géométrie, rayons internes et externes de l'obstacle : rayon X

● Paramètres inconnus

- Propriétés mécaniques de Ω^1 :
 $\Rightarrow \rho^1, (c_S^1)_R, (c_P^1)_R, Q_S^1$ and Q_P^1

Plan

- Introduction
- Position du problème
- Problème direct
 - Mesures (F.E.M.)
 - Principe
 - Viscoélasticité
 - Formulation
 - Résultats numériques
 - Simulation
 - Approximation basse fréquence
- Problème inverse
- Conclusion

Mesures (F.E.M.) : Principe

- Propagation d'onde dans un milieu viscoélastique Ω
Problème 2D PSV (Groby J-P., Tsogka C. (2006))
Formulation vitesse-contrainte, en temps

$$(\mathcal{P}_t) \begin{cases} \rho \frac{\partial v_l}{\partial t} - \sigma_{kl,k} = \rho f_l, & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \sigma_{kl} = \lambda \star_t \epsilon_{mm} \delta_{kl} + 2\mu \star_t \epsilon_{kl}, & \text{in } \Omega \times]0, T[\end{cases}$$

où \star_t est un opérateur de convolution temporelle

- Les données

- $\rho = \rho(\mathbf{x})$: densité
- $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$: module (complexe) de rigidité viscoélastique
- $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$: module (complexe) d'élasticité viscoélastique

Mesures (F.E.M.) : Principe

- Propagation d'onde dans un milieu viscoélastique Ω
Problème 2D PSV (Groby J-P., Tsogka C. (2006))
Formulation vitesse-contrainte, en temps

$$(\mathcal{P}_t) \begin{cases} \rho \frac{\partial v_l}{\partial t} - \sigma_{kl,k} = \rho f_l, & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \sigma_{kl} = \lambda \star_t \epsilon_{mm} \delta_{kl} + 2\mu \star_t \epsilon_{kl}, & \text{in } \Omega \times]0, T[\end{cases}$$

où \star_t est un opérateur de convolution temporelle

- Les inconnues

- $v_l = v_l(\mathbf{x}, t)$, $l = 1, 2$: vitesse particulaire
- $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(\mathbf{x}, t)$, $k = 1, 2$; $l = 1, 2$: tenseur des contraintes
- $\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$: tenseur des déformations

Mesures (F.E.M.) : Principe

- Propagation d'onde dans un milieu viscoélastique Ω
Problème 2D PSV (Groby J-P., Tsogka C. (2006))
Formulation vitesse-contrainte, en temps

$$(\mathcal{P}_t) \begin{cases} \rho \frac{\partial v_l}{\partial t} - \sigma_{kl,k} = \rho f_l, & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \sigma_{kl} = \lambda \star_t \epsilon_{mm} \delta_{kl} + 2\mu \star_t \epsilon_{kl}, & \text{in } \Omega \times]0, T[\end{cases}$$

où \star_t est un opérateur de convolution temporelle

- Le problème

L'opérateur de convolution nécessite le stockage des données temporelles

Mesures (F.E.M.) : Viscoélasticité

Approche d'Emmerich et Korn (1987)

- Π et μ sont approchés par des fonctions rationnelles (Maxwell généralisé) dans le domaine de Fourier :

$$\mu \approx \mu_R \left(1 + \sum_{n=1}^{N^s} \frac{i\omega y_n^S}{i\omega - \omega_n^S} \right), \quad \Pi \approx \Pi_R \left(1 + \sum_{n=1}^{N^p} \frac{i\omega y_n^P}{i\omega - \omega_n^P} \right)$$

- Les données

- $\Pi = \lambda + 2\mu$
- μ_R et Π_R : modules relaxés

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mu(\omega) = \mu_R \qquad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Pi(\omega) = \Pi_R$$

- Q^s et Q^p : facteurs de qualités

$$Q^s = \left| \frac{\Re(\mu(\omega))}{\Im(\mu(\omega))} \right| \qquad Q^p = \left| \frac{\Re(\Pi(\omega))}{\Im(\Pi(\omega))} \right|$$

Mesures (F.E.M.) : Viscoélasticité

Approche d'Emmerich et Korn (1987)

- Π et μ sont approchés par des fonctions rationnelles (Maxwell généralisé) dans le domaine de Fourier :

$$\mu \approx \mu_R \left(1 + \sum_{n=1}^{N^S} \frac{i\omega y_n^S}{i\omega - \omega_n^S} \right), \quad \Pi \approx \Pi_R \left(1 + \sum_{n=1}^{N^P} \frac{i\omega y_n^P}{i\omega - \omega_n^P} \right)$$

● Les inconnues

- y_n^S et y_n^P : poids
- ω_n^S et ω_n^P : fréquences caractéristiques
- N^S et N^P : ordre de discrétisation

Déterminées de manière à satisfaire :

$$Q^S = \left| \frac{\Re(\mu(\omega))}{\Im(\mu(\omega))} \right| \quad Q^P = \left| \frac{\Re(\Pi(\omega))}{\Im(\Pi(\omega))} \right|$$

Mesures (F.E.M.) : Formulation

- La loi de Hooke-Cauchy se décompose en deux termes
- Le système devient :

$$\Rightarrow (\mathcal{P}_t) \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{A}_R \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_R \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial t} = \mathbf{d}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{A}_n \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial t} + \omega_n \mathbf{A}_n \boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{d}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \forall n \in [1, N] \end{array} \right.$$

- Les nouvelles données
 - \mathbf{A}_n et \mathbf{A}_R correspondent l'inverse de la matrice de Christoffel
 - $\omega_n^S = \omega_n^P = \omega_n$

Mesures (F.E.M.) : Formulation

- La loi de Hooke-Cauchy se décompose en deux termes
- Le système devient :

$$\Rightarrow (\mathcal{P}_t) \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{A}_R \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_R \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial t} = \mathbf{d}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{A}_n \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial t} + \omega_n \mathbf{A}_n \boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{d}, \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \forall n \in [1, N] \end{array} \right.$$

- Les nouvelles inconnues

- $\boldsymbol{\eta}_n$: tenseur de mémoire

- \mathbf{d} : tenseur taux de déformation

Mesures (F.E.M.) : Résultats numériques

$$\rho^0 = 1030 \text{ kg.m}^{-3}$$

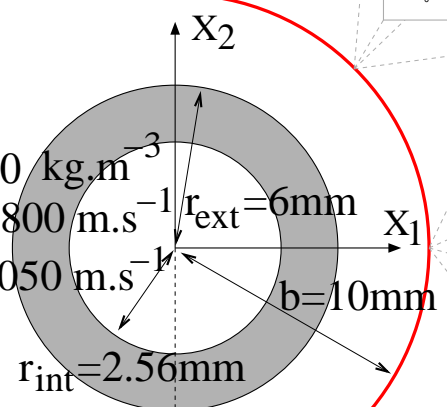
$$(c_S^0)_R = 200 \text{ m.s}^{-1}$$

$$(c_P^0)_R = 1500 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\rho^1 = 1850 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$(c_S^1)_R = 1800 \text{ m.s}^{-1}$$

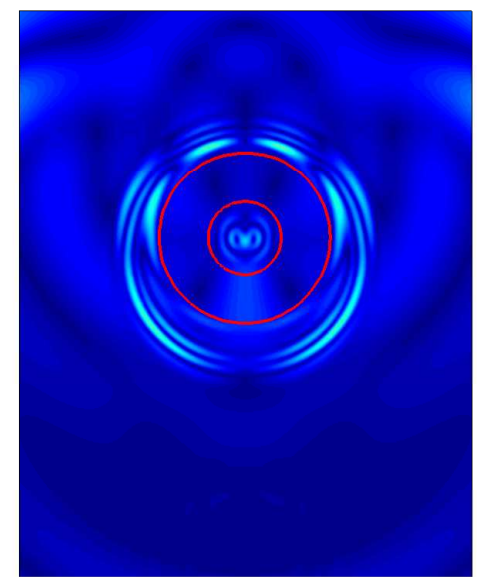
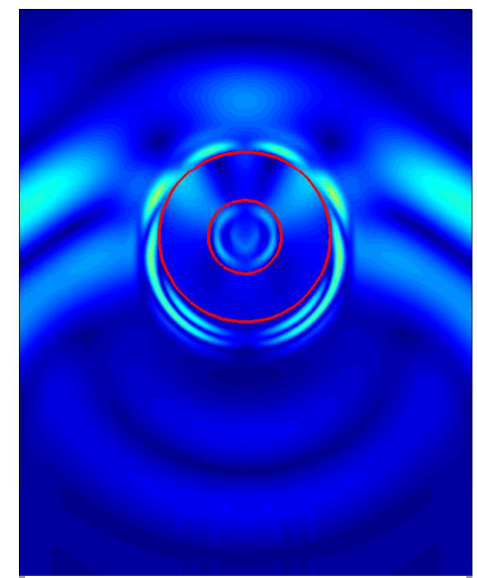
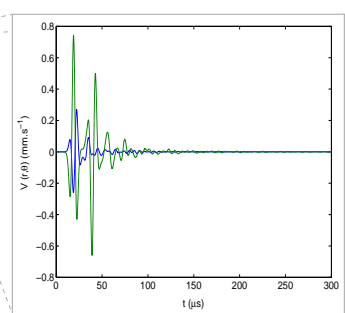
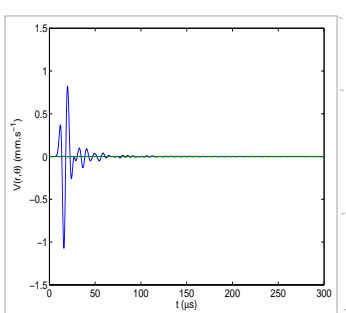
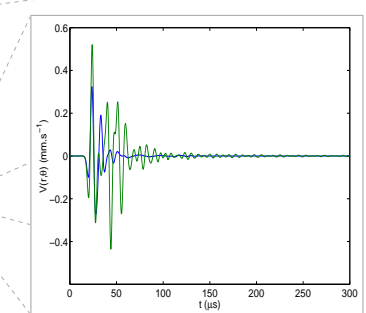
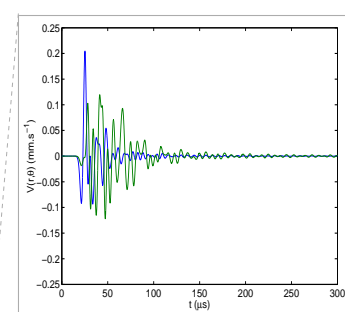
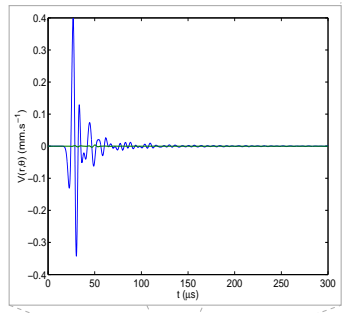
$$(c_P^1)_R = 3050 \text{ m.s}^{-1}$$



$$x = (1 \text{ cm}, \theta)$$

$$\theta^s < \theta < \theta^s + \pi$$

$$x^s = (2 \text{ cm}, 3\pi/2)$$



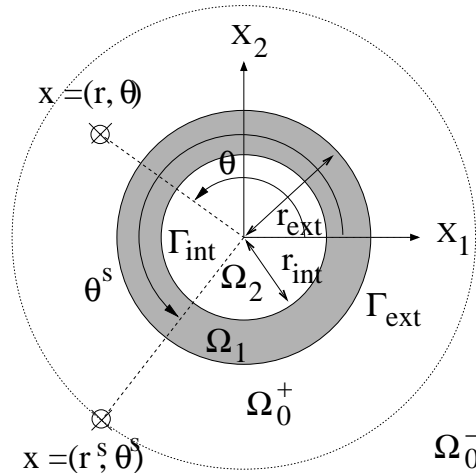
— $V_r(r, \theta, t)$ (mm.s⁻¹) — $V_\theta(r, \theta, t)$ (mm.s⁻¹)

Plan

- Introduction
- Position du problème
- Problème direct
 - Mesures (F.E.M.)
 - Simulation
 - Modèle
 - Position du problème
 - Viscoélasticité
 - Représentation des champs
 - Application des C.L.
 - Solution analytique exacte
 - Comparaison
 - Approximation basse fréquence
- Problème inverse
- Conclusion

Simulation : Modèle

Problème analytique



● Etude fréquentielle :
$$s(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

● Problème PSV, potentiels élastiques :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \phi(\mathbf{x}, \omega) + \mathbf{rot}(\psi(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{e}_3)$$

● Source ponctuelle, fonction de Green du potentiel élastique :

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_p^0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s\|)$$

Simulation : Viscoélasticité

On utilise le modèle de Kjartanson (1979)

Modèle à Q constant

$$\begin{aligned}\Pi(\omega) &= \Pi_R \left(\frac{i\omega}{\omega_R} \right)^{2\gamma_p} & \mu(\omega) &= \mu_R \left(\frac{i\omega}{\omega_R} \right)^{2\gamma_s} & 0 < \gamma < 1/2 \\ Q_P &= \left| \frac{\Re(\Pi(\omega))}{\Im(\Pi(\omega))} \right| & Q_S &= \left| \frac{\Re(\mu(\omega))}{\Im(\mu(\omega))} \right| & \gamma &= \frac{1}{\pi} \tan \left(\frac{1}{Q} \right)\end{aligned}$$

Nombre d'onde

$$k_p(\omega) = \sqrt{\frac{\Pi(\omega)}{\rho}} \qquad k_s(\omega) = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\rho}}$$

Modèle non physique !

$$\begin{aligned}k(\omega) &= \frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega)\omega & v(\omega) &= \frac{\omega}{\Re(k)} & \lim_{\omega \rightarrow 0} v(\omega) &= 0 \\ \alpha(\omega) &= -\frac{\Im(k)}{\omega} & & & \lim_{\omega \rightarrow +\infty} v(\omega) &= +\infty\end{aligned}$$

Simulation : Position du problème

$\phi(\mathbf{x}, \omega)$ et $\psi(\mathbf{x}, \omega)$ satisfont

● L'équation d'Helmholtz :

$$\begin{cases} (\Delta + k_p^j(\omega)) \phi^j = -f(\omega) \delta_{\mathbf{x}^s - \mathbf{x}} & \mathbf{x} \in \Omega^j \\ (\Delta + k_s^j(\omega)) \psi^j = 0 & \mathbf{x} \in \Omega^j \end{cases}$$

● Les conditions d'ondes sortantes

$$\begin{cases} (\partial_r - ik_p^0(\omega)) \phi^0 = o(1/\sqrt{r}) \\ (\partial_r - ik_s^0(\omega)) \psi^0 = o(1/\sqrt{r}) \end{cases} \quad r \rightarrow \infty$$

● Les conditions aux limites

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{ext} : \begin{cases} u_\theta^1(\mathbf{x}, \omega) = u_\theta^0(\mathbf{x}, \omega) \\ u_r^1(\mathbf{x}, \omega) = u_r^0(\mathbf{x}, \omega) \\ \sigma_{rr}^1(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{rr}^0(\mathbf{x}, \omega) \\ \sigma_{r\theta}^1(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{r\theta}^0(\mathbf{x}, \omega) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{int} : \begin{cases} u_\theta^2(\mathbf{x}, \omega) = u_\theta^1(\mathbf{x}, \omega) \\ u_r^2(\mathbf{x}, \omega) = u_r^1(\mathbf{x}, \omega) \\ \sigma_{rr}^2(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{rr}^1(\mathbf{x}, \omega) \\ \sigma_{r\theta}^2(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{r\theta}^1(\mathbf{x}, \omega) \end{cases}$$

Simulation : Représentation des champs

$$\begin{array}{l}
 \text{Dans } \Omega_0^+ \left\{ \begin{array}{l}
 \phi^0 = \phi^{0i} + \phi^{0d} \\
 \phi^{0i} = S(\omega) \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(k_p^0 r) H_m^{(1)}(k_p^0 r^s) \cos(m(\theta - \theta^s)) \\
 \phi^{0d} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m a_m^0 H_m^{(1)}(k_p^0 r) \cos(m(\theta - \theta^s)) \\
 \psi^{0d} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m b_m^0 H_m^{(1)}(k_s^0 r) \sin(m(\theta - \theta^s))
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Dans } \Omega_1 \left\{ \begin{array}{l}
 \phi^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left(a_m^1 J_m(k_p^1 r) + c_m^1 H_m^{(1)}(k_p^1 r) \right) \cos(m(\theta - \theta^s)) \\
 \psi^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left(b_m^1 J_m(k_s^1 r) + d_m^1 H_m^{(1)}(k_s^1 r) \right) \sin(m(\theta - \theta^s))
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Dans } \Omega_2 \left\{ \begin{array}{l}
 \phi^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m a_m^2 J_m(k_p^2 r) \cos(m(\theta - \theta^s)) \\
 \psi^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m b_m^2 J_m(k_s^2 r) \sin(m(\theta - \theta^s))
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Simulation : Application des C.L.

On applique aux 8 C.L. les relations d'orthogonalité

$$\int_{\theta^s}^{\theta^s + \pi} \cos(m(\theta - \theta^s)) \cos(n(\theta - \theta^s)) \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\delta_{mn}}{\epsilon_m}$$
$$\int_{\theta^s}^{\theta^s + \pi} \sin(m(\theta - \theta^s)) \sin(n(\theta - \theta^s)) \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\delta_{mn}(1 - \delta_{m0})}{2}$$

pour obtenir

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0 \quad \text{où} \quad \mathbf{q}_0 = \langle a_0^0, a_0^1, c_0^1, a_0^2 \rangle$$

et

$$\mathbf{P}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{r}_n ; n = 1, 2, \dots \quad \text{où} \quad \mathbf{q}_n = \langle a_n^0, b_n^0, a_n^1, c_n^1, b_n^1, d_n^1, a_n^2, b_n^2 \rangle$$

Simulation : Application des C.L.

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} & p_{57} & p_{58} \\ 0 & 0 & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} & p_{68} \\ 0 & 0 & p_{73} & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} & p_{78} \\ 0 & 0 & p_{83} & p_{84} & p_{85} & p_{86} & p_{87} & p_{88} \end{pmatrix}$$

avec :

$$p_{41} = 2(\alpha_s^1)^2 n \rho^0 \left(H_n^{(1)}(\alpha_p^0) - \alpha_p^0 \dot{H}_n^{(1)}(\alpha_p^0) \right)$$

$$p_{68} = \beta_s^2 J_n(\beta_s^2)$$

où :

$$\alpha_p^j = k_p^j r_{ext} \quad \alpha_s^j = k_s^j r_{ext}$$

$$\beta_p^j = k_p^j r_{int} \quad \beta_s^j = k_s^j r_{int}$$

Simulation : Solution analytique exacte

On inverse numériquement le système linéaire pour chaque mode.

$$\mathbf{P}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{r}_n ; n = 1, 2, \dots$$

On s'intéresse à la vitesse particulaire dans Ω_0^+

$$v_r^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \sum_{m=0}^{\infty} \left(k_p^0 a_m^0 \epsilon_m \dot{H}_m^{(1)}(k_p^0 r) + \frac{m}{r} b_m^0 \epsilon_m H_m^{(1)}(k_s^0 r) \right) \cos(m(\theta - \theta^s))$$

$$v_\theta^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-m}{r} a_m^0 \epsilon_m H_m^{(1)}(k_p^0 r) - k_s^0 b_m^0 \epsilon_m \dot{H}_m^{(1)}(k_s^0 r) \right) \cos(m(\theta - \theta^s))$$

On a donc résolu notre problème direct

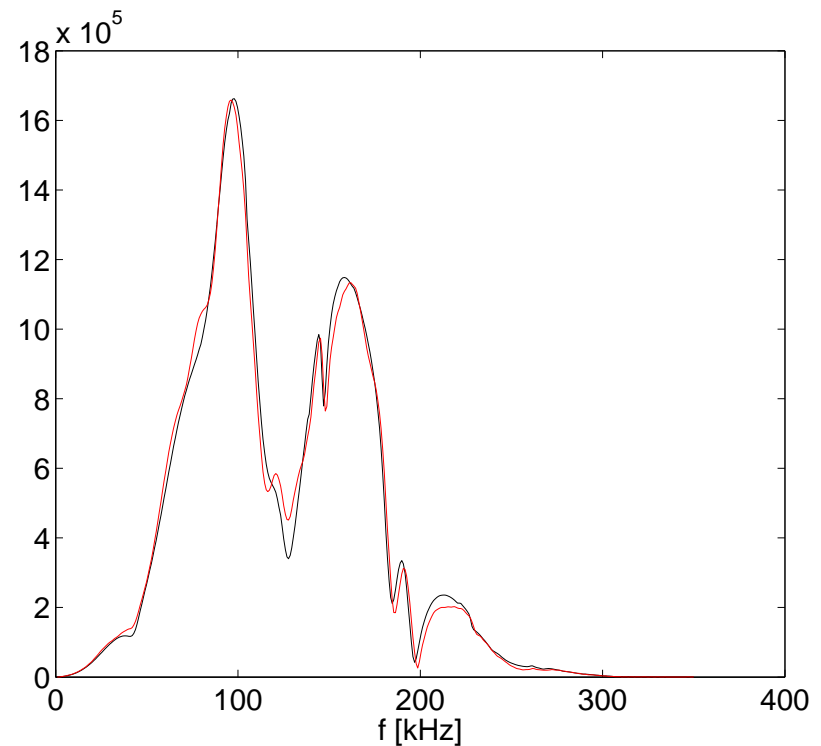
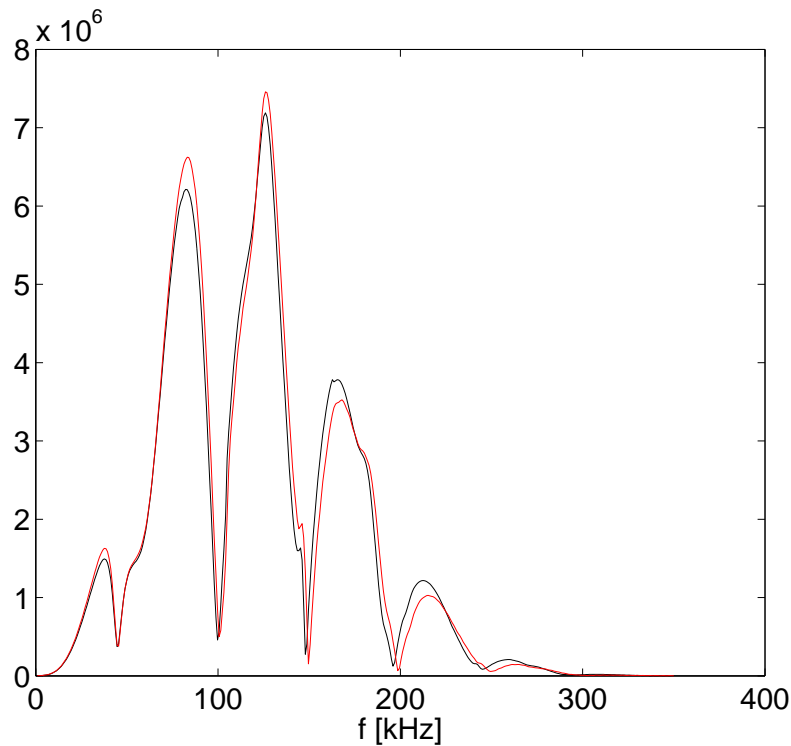
- exact
- à toute les fréquences
- seule hypothèse : géométrie circulaire

Simulation : Comparaison

Une FFT permet la comparaison avec les simulations FEM

● Mesures (FEM) : $v^{0d}(\pi/2, \omega)$

● Simulation : $v^{0d}(\pi/2, \omega)$



Module de la vitesse particulaire transversale (à gauche) et radiale (à droite)

Plan

- Introduction
- Position du problème
- Problème direct
 - Mesures (F.E.M.)
 - Simulation
 - **Approximation basse fréquence**
 - Hypothèse
 - Algorithme
 - Solution
 - Validation
 - Conséquences
- Problème inverse
- Conclusion

Approximation BF : Hypothèses

- Soit : $r \ll \lambda$
 - r_{ext} très petit
 - ω très grand
 - Approximation "tube circulaire" valide

- On suppose

$$\text{Max} (\alpha_p^j, \alpha_s^j, \beta_p^i, \beta_s^i) \ll 1 \quad j = 0, 1 ; \quad i = 1, 2$$

- Ce qui permet l'utilisation des expressions asymptotiques des fonctions cylindriques (Korneev (1993), Ying (1956))

$$J_m(\zeta) \sim \frac{1}{m!} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^m$$
$$H_0^{(1)}(\zeta) \sim \frac{2i}{\pi} \ln \zeta \quad ; \quad H_m^{(1)}(\zeta) \sim -\frac{i(m-1)!}{\pi} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-m} \quad ; \quad \zeta \rightarrow 0$$

Approximation BF : Algorithme

- On développe \mathbf{P}_m , \mathbf{q}_m et \mathbf{r}_m en puissance de $\chi = k_p^0 r_{ext}$

$$\mathbf{P}_m(\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}_m^{(j)} \chi^j \quad , \quad \mathbf{P}_m^{(j)} = \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j}{\partial \chi^j} \mathbf{P}_m(\chi) \right|_{\chi=0}$$
$$\mathbf{q}_m(\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{q}_m^{(j)} \chi^j \quad , \quad \mathbf{r}_m(\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{r}_m^{(j)} \chi^j$$

- On exprime le système pour divers ordres de χ

$$\sum_{n=0}^l \mathbf{P}_m^{(l-n)} \mathbf{q}_m^{(n)} = \mathbf{r}_m^{(l)} \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

- Résolution itérative

$$\mathbf{q}_m^{(0)} = \left(\mathbf{P}_m^{(0)} \right)^{-1} \mathbf{r}_m^{(0)}$$
$$\mathbf{q}_m^{(l)} = \left(\mathbf{P}_m^{(l)} \right)^{-1} \left[\mathbf{r}_m^{(l)} - \sum_{n=0}^{l-1} \mathbf{P}_m^{(l-n)} \mathbf{q}_m^{(n)} \right] \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Approximation BF : Solution

On aboutit aux expressions modales aux ordres inférieurs :

$$\begin{aligned} a_0^0 &= \tilde{a}_0^0 \chi^2 + O(\chi^4) & a_{m>1}^0 &= O(\chi^4) \\ a_1^0 &= \tilde{a}_1^0 \chi^2 + O(\chi^4) \\ b_1^0 &= \tilde{b}_1^0 \chi^2 + O(\chi^4) & b_{m>1}^0 &= O(\chi^4) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{a}_0^0 = \mathcal{S}_0(\omega, k_p^0, r^s) \times \mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e)$$

$$\tilde{a}_1^0 = \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) \times \mathcal{M}_1(\rho^j, e)$$

$$\tilde{b}_1^0 = \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) \times \mathcal{M}_1(\rho^j, e) \times \sqrt{\frac{\Pi_R^0}{\mu_R^0}}$$

$$\Lambda^j = \Pi^j - \mu^j = \lambda^j + \mu^j$$

$$e = \frac{r_{int}}{r_{ext}}$$

où

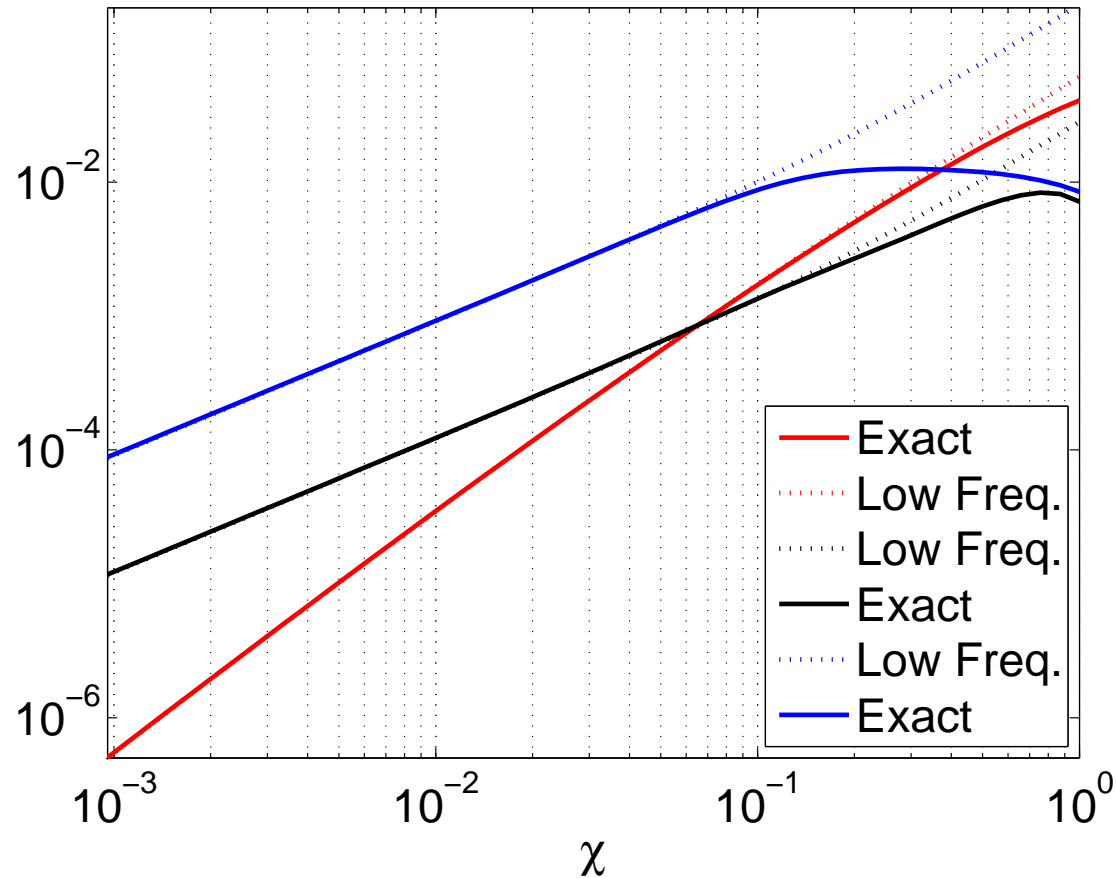
$$\mathcal{S}_m(\omega, k_p^0, r^s) = -\frac{\pi S(\omega) H_m^{(1)}(k_p^0 r^s)}{16\epsilon_m}$$

$$\mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e) = \frac{(\Lambda^1 - \Lambda^2)(\Lambda^0 + \mu^1)e^2 + (\Lambda^0 - \Lambda^1)(\Lambda^2 + \mu^1)}{(\Lambda^1 - \Lambda^2)(\mu^0 - \mu^1)e^2 + (\Lambda^1 + \mu^0)(\Lambda^2 + \mu^1)}$$

$$\mathcal{M}_1(\rho^j, e) = \frac{(\rho^2 - \rho^1)e^2 + \rho^1 - \rho^0}{\rho^0}$$

Approximation BF : Validation

$\|a_0^0\|$, $\|a_1^0\|$, $\|b_1^0\|$ exacts et approchés.



La méthode est valide pour $\chi < 0.1$, soit $\alpha_s^1 < 7.5$!!

Approximation BF : Conséquences

● Potentiel de champ lointain :

Signature du diffuseur soumis à une onde plane (P) en champ lointain

● Dans le cas général

$$\phi^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_p^0 r}} e^{i(k_p^0 r - \frac{\pi}{4})} f_{p \rightarrow p}(\theta, \omega) \quad ; \quad \psi^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_s^0 r}} e^{i(k_s^0 r - \frac{\pi}{4})} f_{p \rightarrow s}(\theta, \omega)$$
$$f_{p \rightarrow p}(\theta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n a_m^0 \cos(m(\theta - \theta^s)) \quad ; \quad f_{p \rightarrow s}(\theta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n b_m^0 \cos(m(\theta - \theta^s))$$

● Dans le cas BF

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f_{p \rightarrow p}(\theta, \omega) = \mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e) + 2\mathcal{M}_1(\rho^j, e) \cos(\theta - \theta^s)$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f_{p \rightarrow s}(\theta, \omega) = 2\sqrt{\frac{\Pi^0}{\mu^0}} \mathcal{M}_1(\rho^j, e) \cos(\theta - \theta^s)$$

Approximation BF : Conséquences

● Cas viscoélastique :

On a

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Pi(\omega) = \Pi_R$$

Donc :

$$\mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e) = \frac{(\Lambda^1 - \Lambda^2)(\Lambda^0 + \mu^1)e^2 + (\Lambda^0 - \Lambda^1)(\Lambda^2 + \mu^1)}{(\Lambda^1 - \Lambda^2)(\mu^0 - \mu^1)e^2 + (\Lambda^1 + \mu^0)(\Lambda^2 + \mu^1)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \mathcal{M}_0(\Lambda_R^j, \mu_R^j, e)$$

- Seules les grandeurs relaxées entrent en compte
- L'atténuation / dispersion n'intervient pas
- Comportement élastique équivalent
- *Résultat propre au modèle viscoélastique choisi*

Approximation BF : Conséquences

● *Homogénéisation*

- Cylindre élastique homogène

$$\mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j) = \frac{(\Lambda^0 - \Lambda^1)}{(\mu^0 + \Lambda^1)}$$

$$\mathcal{M}_1(\rho^j) = \frac{\rho^1 - \rho^0}{\rho^0}$$

- Cylindre élastique homogène équivalent :

$$\Lambda^1|_{eq} = \frac{\Lambda^1(\mu^1 + \Lambda^2) - e^2\mu^1(\Lambda^1 + \Lambda^2)}{\mu^1 + \Lambda^2 + e^2(\Lambda^1 - \Lambda^2)}$$

$$\rho^1|_{eq} = (1 - e^2)\rho^1 + e^2\rho^2$$

Plan

- Introduction
- Position du problème
- Problème direct
- Problème inverse
 - **Inversion basse fréquence**
 - Principe
 - Analyse
 - Reconstruction
 - Inversion haute fréquence
- Conclusion

Inversion BF : Principe

- Mesures (F.E.M.) enregistrée sur un demi cercle de rayon r^m :

$$\mathcal{V}_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\theta^{0d}(r^m, \theta, \omega)$$

- Exploitation des relations d'orthogonalité

$$\mathcal{I}_0^r(r^m, \omega) = \int_0^\pi \mathcal{V}_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \frac{d\theta}{\pi} \quad \approx i\omega \left(a_0^0 k_p^0 \dot{H}_0^{(1)}(k_p^0 r^m) \right)$$

$$\mathcal{I}_1^r(r^m, \omega) = \int_0^\pi \mathcal{V}_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \cos(\theta - \theta^s) \frac{d\theta}{\pi} \quad \approx i\omega \left(k_p^0 a_1^0 \dot{H}_1^{(1)}(k_p^0 r^m) + \frac{1}{r^m} b_1^0 H_1^{(1)}(k_s^0 r^m) \right)$$

$$\mathcal{I}_1^t(r^m, \omega) = \int_0^\pi \mathcal{V}_\theta^{0d}(r^m, \theta, \omega) \sin(\theta - \theta^s) \frac{d\theta}{\pi} \quad \approx i\omega \left(\frac{-1}{r^m} a_1^0 H_1^{(1)}(k_p^0 r^m) - k_s^0 b_1^0 \dot{H}_1^{(1)}(k_s^0 r^m) \right)$$

Inversion BF : Principe

- On définit le changement de variable

$$a_0^0 \longrightarrow \chi^2 \mathcal{S}_0(\omega, k_p^0, r^s) M_0$$

$$a_1^0 \longrightarrow \chi^2 \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) M_1$$

$$a_1^0 \longrightarrow \chi^2 \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) M_1'$$

- Soit le problème

$$\mathcal{I}_0^r(r^m, \omega) = i\omega\chi^2 \mathcal{S}_0(\omega, k_p^0, r^s) \left(M_0 k_p^0 \dot{H}_0^{(1)}(k_p^0 r^m) \right)$$

$$\mathcal{I}_1^r(r^m, \omega) = i\omega\chi^2 \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) \left(k_p^0 M_1 \dot{H}_1^{(1)}(k_p^0 r^m) + \frac{1}{r^m} M_1' H_1^{(1)}(k_s^0 r^m) \right)$$

$$\mathcal{I}_1^t(r^m, \omega) = i\omega\chi^2 \mathcal{S}_1(\omega, k_p^0, r^s) \left(\frac{-1}{r^m} M_1 H_1^{(1)}(k_p^0 r^m) - k_s^0 M_1' \dot{H}_1^{(1)}(k_s^0 r^m) \right)$$

- que l'on inverse, pour déterminer M_0 , M_1 et M_1'

Inversion BF : Analyse

- On obtient par passage à la limite :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_0 = \mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e)$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} M'_1 \sqrt{\frac{\mu_R^0}{\Pi_R^0}} = \mathcal{M}_1(\rho^j, e)$$

- **Remarque (1) :** Type d'inversion

- le problème inverse est réalisé sans faire appel de manière itérative à un modèle direct
- il ne sert à rien de sur-déterminer le système

Inversion BF : Analyse

- On obtient par passage à la limite :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_0 = \mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e)$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} M'_1 \sqrt{\frac{\mu_R^0}{\Pi_R^0}} = \mathcal{M}_1(\rho^j, e)$$

- **Remarque (2) : Problème mal posé**

- seules deux grandeurs peuvent être déterminées
- on ne peut déterminer les propriétés de l'obstacle sans *a priori*
- plusieurs obstacles peuvent fournir la même image
- $\mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e)$ permet de définir une fonction $\Lambda^1 = f(\mathcal{M}_0, \mu^1, e)$

Les grandeurs reconstruites forment une *image BF* de l'obstacle.

Inversion BF : Analyse

- On obtient par passage à la limite :

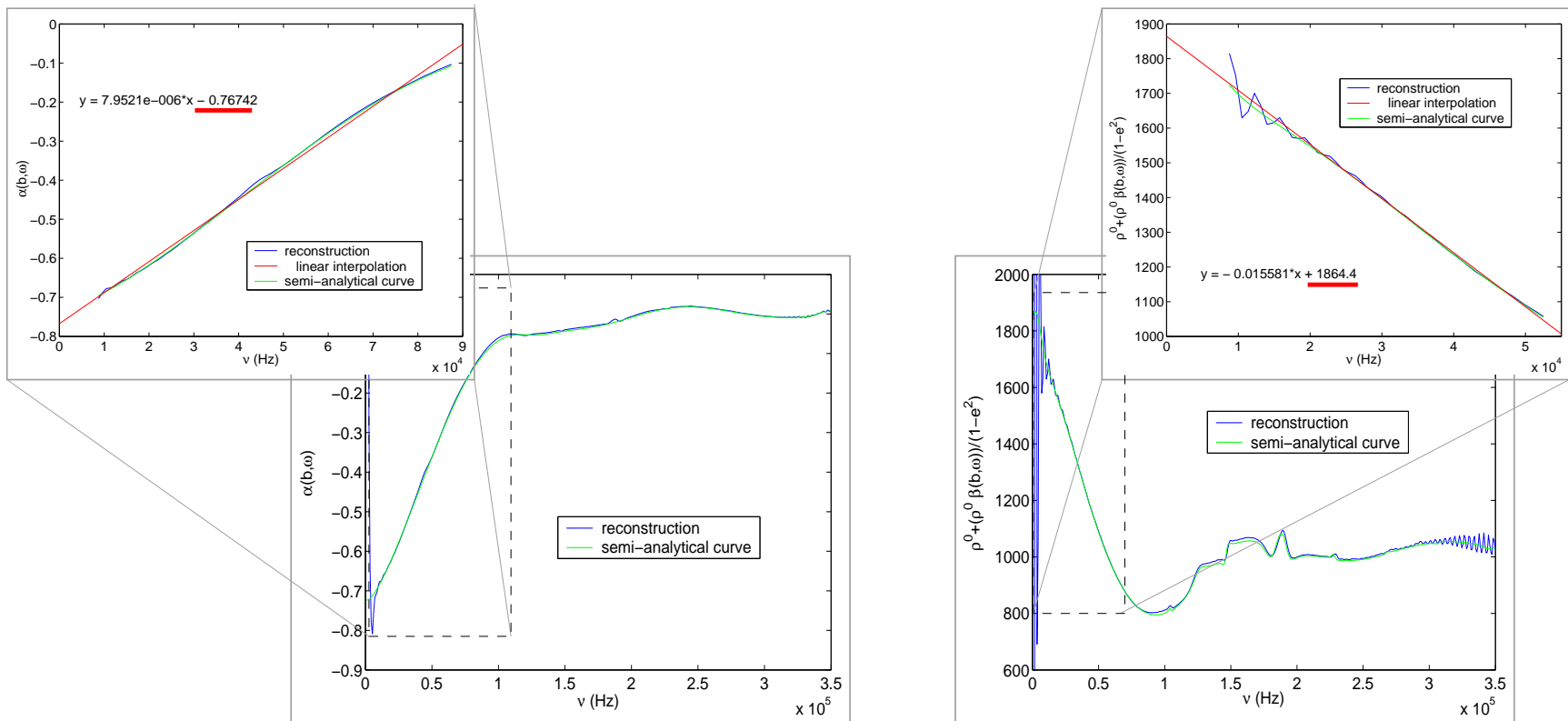
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_0 = \mathcal{M}_0(\Lambda^j, \mu^j, e)$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} M'_1 \sqrt{\frac{\mu_R^0}{\Pi_R^0}} = \mathcal{M}_1(\rho^j, e)$$

- **Remarque (3)** : Analyse de sensibilité, découplage des grandeurs d'élasticité et de densité.
 - Une erreur d'*a priori* sur Λ^1 ou μ^1 ne perturbe pas l'estimation de ρ^1
 - Une erreur d'*a priori* sur ρ^1 ne perturbe pas l'estimation de Λ^1 ou μ^1
 - Une erreur d'*a priori* sur l'épaisseur perturbe l'ensemble des estimations

Inversion BF : Reconstruction

Mesures (F.E.M.) enregistrée sur un demi cercle de rayon r^m :

$$\mathcal{V}_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\theta^{0d}(r^m, \theta, \omega)$$



Plan

- Introduction
- Position du problème
- Problème direct
- Problème inverse
 - Inversion basse fréquence
 - Inversion haute fréquence
- Conclusion

Inversion HF : Principe

Reconstruction des autres inconnues par optimisation

● A priori (BF) : e, ρ^1, \mathcal{M}_0 et $\Lambda_R^1 = f(\mathcal{M}_0, \mu_R^1, e)$

● Inconnues : $\tau = \{Q_P^1, Q_S^1, \mu_R^1\}$

● Mesures (F.E.M.) :

$$\mathcal{V}_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\theta^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad 50kHz \leq f \leq 250kHz$$

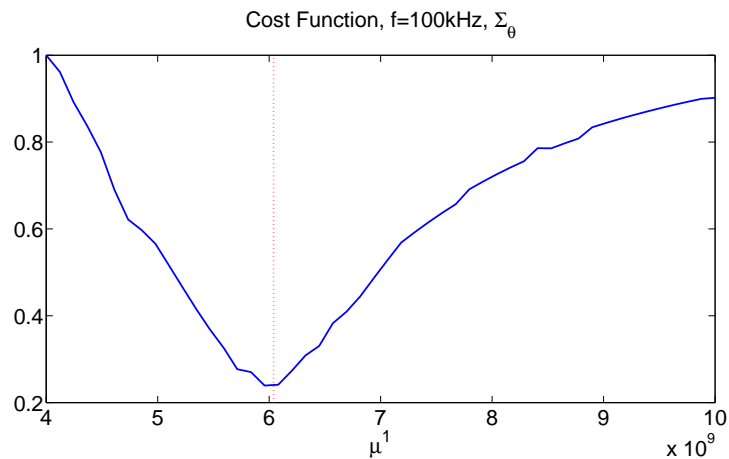
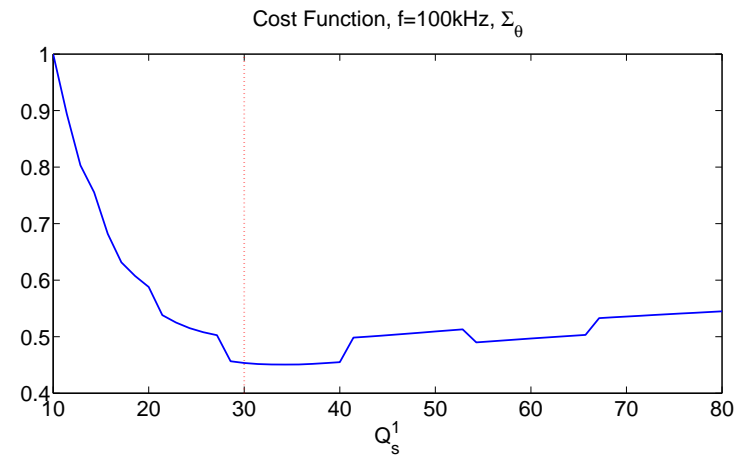
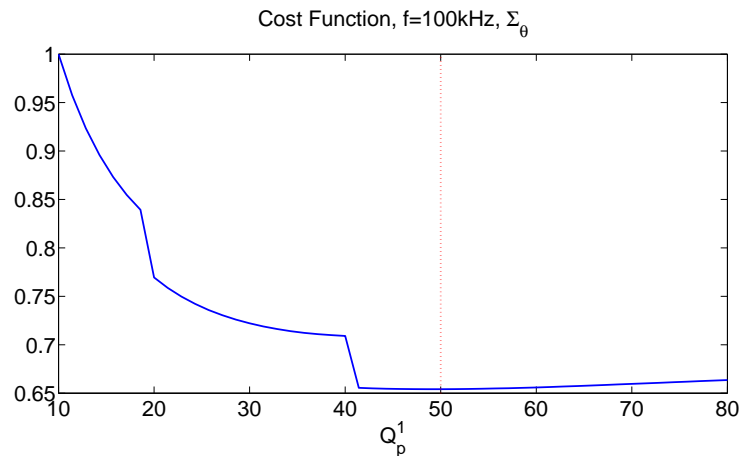
● Estimations (analytiques) :

$$v_r^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad \text{et} \quad v_\theta^{0d}(r^m, \theta, \omega) \quad 0.5 \leq \chi \leq 3$$

● Fonction coût

$$\mathcal{F}(\tau) = \frac{\sum_\omega \sum_\theta \left| \sqrt{(\mathcal{V}_r^{0d})^2 + (\mathcal{V}_\theta^{0d})^2} - \sqrt{(\mathcal{V}_r^{0d})^2(\tau) + (\mathcal{V}_\theta^{0d})^2(\tau)} \right|}{\sum_\omega \sum_\theta \left| \sqrt{(\mathcal{V}_r^{0d})^2 + (\mathcal{V}_\theta^{0d})^2} \right|}$$

Inversion HF : Exemples de fonctions coût



Fonctions coût discontinues pour les facteurs de qualités
Mauvais choix de fonctions coût
Travail en cours ...

Inversion HF : Résultats finaux

Minimisation de la fonction cout par `lsqnonlin` (*matlab*).

Paramètres	Val.	Est.	Erreur
$\rho^1 \text{ kg.m}^{-3}$	1850	1864	0.8%
$(c_p^1)_R \text{ m.s}^{-1}$	3050	3288	7.8%
Q_p^1	50	?	?
$(c_s^1)_R \text{ m.s}^{-1}$	1800	1782	-0.9%
Q_s^1	30	?	?

Conclusion

- Un modèle de réponse viscoélastique d'un tube sollicité par une onde cylindrique de compression a été présenté. Ce modèle peut être généralisé à
 - d'autres géométries canoniques : sphère, cylindre plein.
 - d'autres sources : ondes planes, onde incidente de cisaillement, problème SH
 - d'autres milieux : visco-thermo-élastique, acoustique
- Exploitation dans le cadre de l'inversion
 - On met en valeur le caractère mal posé du problème inverse
 - Seulement deux paramètres du milieu peuvent être reconstruit.
 - On ne peut reconstruire que les grandeurs relaxées.
 - Aucune grandeur physique ne peut être déterminée sans introduire d'*a priori*.

Conclusion

Développement

- Mieux traiter le problème haute fréquence.
- Comparer avec des résultats provenant d'un modèle de poutre.
- Exploitation dans le cadre de l'homogénéisation (Independent Scattering Approximation).