Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points

Alexandra Claisse

Université Pierre et Marie Curie

Laboratoire Jacques-Louis Lions

claisse@ann.jussieu.fr

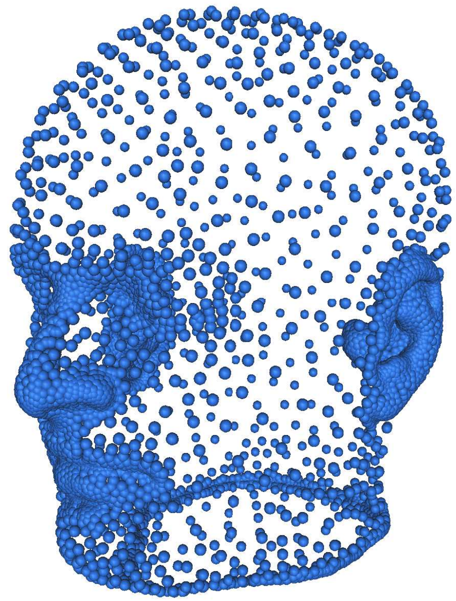
Introduction

On considère un ensemble de points $V \subset \partial U$, où U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ∂U courbe simple fermée. On s'intéresse au problème de la construction d'une courbe régulière Γ passant *au mieux* par V donné, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x \in V\,, \quad d(x, \Gamma) \leq \varepsilon$$

où $\displaystyle d(x, \Gamma) = \min_{\bar{x} \in \Gamma} \|x - \bar{x}\|$ et pour $\varepsilon > 0$ petit fixé.

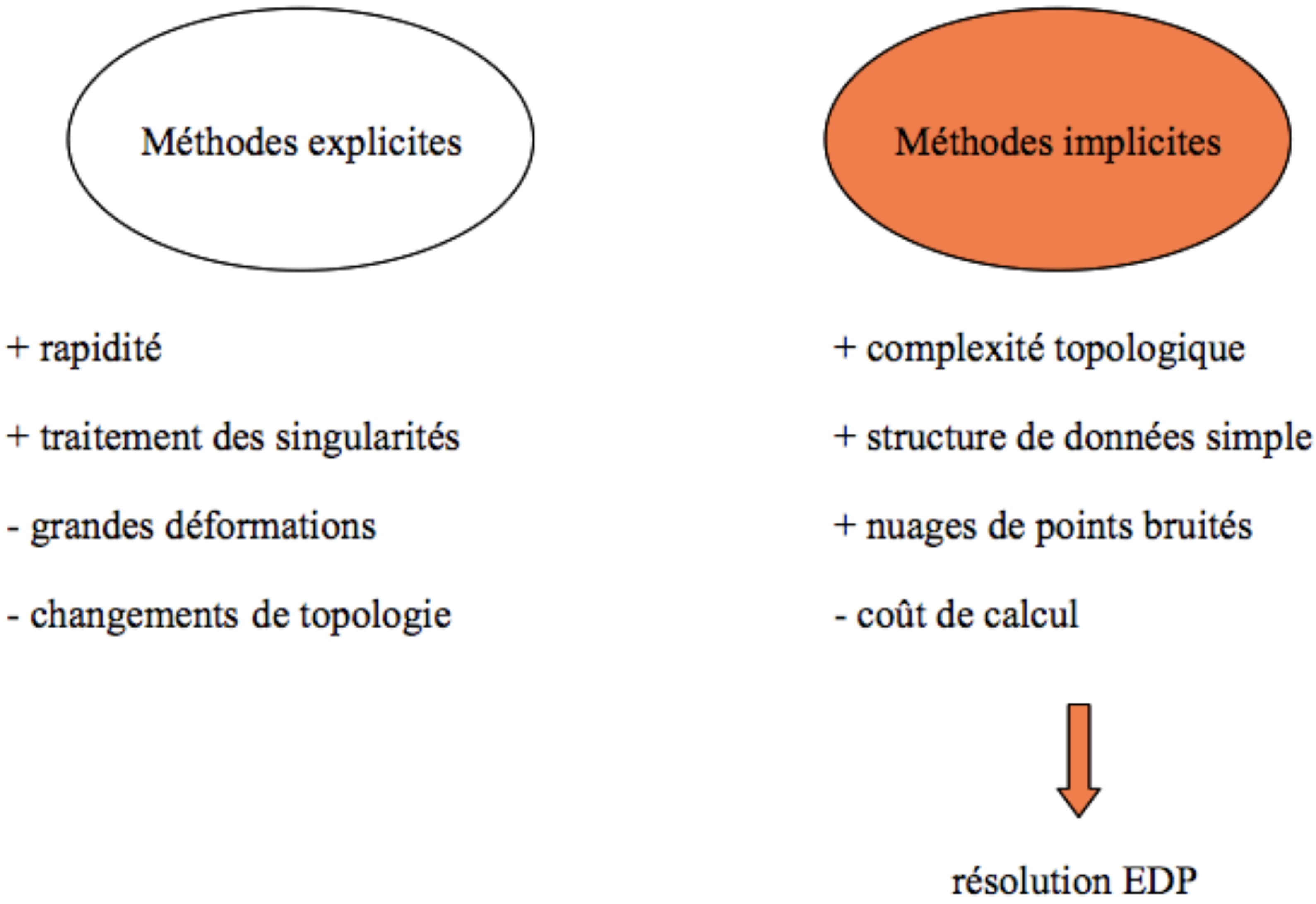
Hypothèses : V peut être non uniformément distribué, avec une géométrie complexe et peut être bruité.



Applications : simulations numériques, applications graphiques (images), applications bio-médicales...

Introduction

Représentations explicites et implicites



Introduction

Différents travaux sur le sujet

- Approches géométriques : triangulations de Delaunay, diagramme de Voronoï
  Cohen-Steiner et al. 2002, *Dey et al.* 2001
- Approches volumiques : fonctions distances signées
  Bernardini, Bajaj 97, *Boissonnat, Cazals* 2000, *Hoppe et al.* 92,
- Modèle basé sur une EDP avec fonction distance non signée
  Osher, Sethian, Zhao 88, 91, 99, 2000...

Notre approche

- Utilisation de la méthode des lignes de niveau (résolution EDP)
- Utilisation de triangulations non structurées, anisotropes et adaptées
- Originalité du schéma numérique utilisé

Références

Publications :

- A. Claisse, P. Frey, *Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points*, C. R. Acad. Sci. Serie I 346 (2008), 1017 - 1022.
- A. Claisse, P. Frey, *Level set driven smooth curve approximation from unorganized or noisy point set*, ESAIM Proc 2008, accepté.
- A. Claisse, V. Ducrot, P. Frey, *Level sets and anisotropic mesh adaptation*, DCDS-A, 23(1-2), 165-183, 2008,

Plan

- Présentation du problème
    - Formulation level set
    - Modèle d'évolution
- Résultats numériques - Exemples
    - Schéma numérique
    - Adaptation de maillage
    - Exemples

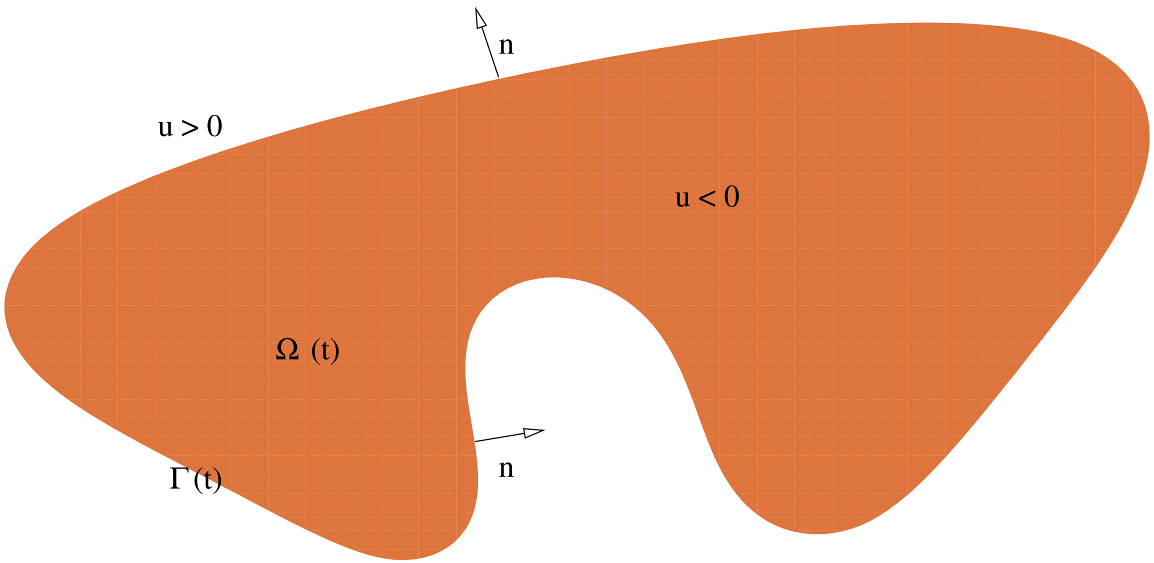
Présentation du problème

Formulation level set

On considère $\Gamma(t) = \{x, u(t,x) = 0\}$ comme l'isocontour d'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

Cette fonction ligne de niveau u est définie telle que :

- $u(t,x) < 0$ pour $x \in \Omega(t)$
- $u(t,x) > 0$ pour $x \notin \Omega(t)$
- $u(t,x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega(t) = \Gamma(t)$
- $n(u)(t,x) = \left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)(t,x)$



Originalité de notre méthode :

utilisation de la méthode des lignes de niveau sur des maillages non structurés.

Présentation du problème

Modèle d'évolution

On définit $u(t, \Gamma(t)) = 0$.

En dérivant cette équation, on obtient :

$$\frac{du}{dt}(t, \Gamma(t,s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \Gamma(t,s)) + \frac{d\Gamma(t,s)}{dt} \cdot \nabla u(t, \Gamma(t,s)) = 0$$

C'est une équation de type Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v_n(t,x)|\nabla u(t,x)| = 0$$

où $v_n(t,x) = \dfrac{d\Gamma(t,s)}{dt} \cdot n(u)(t,x) = \dfrac{d\Gamma(t,s)}{dt} \cdot \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}(t,x)$

Présentation du problème

Modèle d'évolution

Zhao, Osher, Merriman et Kang, 2000

Minimisation de la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E(\Gamma) = \left(\int_\Gamma d(x)^p ds \right)^{1/p}$$

équation d'Euler-Lagrange associée :

$$d(x)^{p-1} \left(\nabla d(x) \cdot n(u)(t,x) + \frac{1}{p} d(x)\, \kappa(u)(t,x) \right) = 0$$

avec $n(u)(t,x) = \left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)(t,x)$ et $\kappa(u)(t,x) = \nabla \cdot n(u)(t,x)$

- $\nabla d(x) \cdot n(u)(t,x)$: terme d'attraction,
- $d(x)\, \kappa(u)(t,x)$: terme de tension de surface.

Présentation du problème

Modèle d'évolution

À convergence on souhaite avoir : $u(t,x) = \pm\, d(x)$ (donc $u(t,x) = 0$ pour $x \in \Gamma$).

En pratique, on résout l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha\, d(x) + d(x)\, \kappa(u)(t,x)$$

- $\alpha\, d(x)$: terme d'attraction, avec α qui depend de la valeur de $\nabla d \cdot \nabla u$,
- $d(x)\, \kappa(u)(t,x)$: terme de tension de surface.

avec un critère d'arrêt :

$$\max_{x \in V} |\sqcap_h\, u(x)| \leq \varepsilon$$

où $\sqcap_h u(x)$ est obtenu par projection L^2 de u sur $x \in V$.

Schémas numériques

On suppose u solution discrète définie en chaque nœud du maillage.
Équation d'évolution : $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha\, d(x) + d(x) \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t,x)$

$\forall i$ nœud du maillage,

- Schéma explicite du premier ordre en temps :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = \alpha\, d_i + d_i \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^n}{|\nabla u^n|} \right) \right)_i$$

- Schéma semi-implicite du premier ordre en temps :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = \alpha\, d_i + d_i \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^n|} \right) \right)_i$$

Schéma numérique

Estimation de $(\nabla u)_i$ et de $\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right)_i$

L'objectif est de reconstuire un gradient en chaque point i du maillage.

Soit ω_i coordonnée barycentrique du sommet x_i de chaque maille $K \in T_h$ triangulaire, on pose alors :

$$u|_K = \sum_{i=1}^{3} u(x_i)\omega_i, \qquad \nabla(u|_K) = \sum_{i=1}^{3} u(x_i)\nabla\omega_i$$

$$\nabla u_i = \frac{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K \nabla(u|_K)}{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K} = \frac{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K \sum_{j\in K} u_j \nabla\omega_j}{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K}$$

où $\mathcal{B}(i)$ est l'ensemble des triangles contenant le point x_i et A_K est l'aire de K.

Schéma numérique

On utilise le même procédé pour exprimer κ en chaque nœud i du maillage.

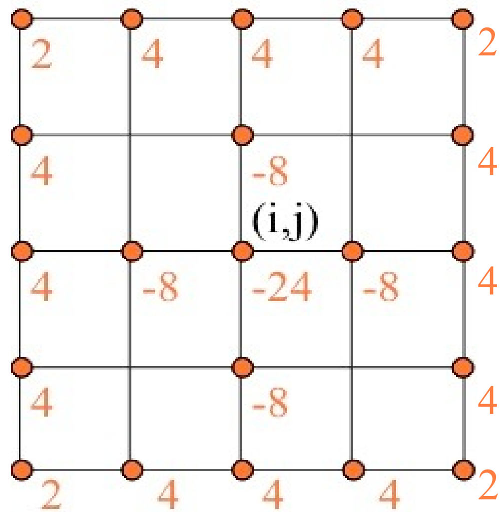
$$\kappa_i = \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\beta}\right)\right)_i = \frac{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K \sum_{j\in K} \left(\frac{\displaystyle\sum_{L\in\mathcal{B}(j)} A_L \left(\sum_{k\in L} u_k < \nabla\omega_{Lk}, \nabla\omega_{Kj} > \right)}{\displaystyle\beta_j \sum_{L\in\mathcal{B}(j)} A_L} \right)}{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{B}(i)} A_K}$$

Résultats numériques

Schémas numériques

Dans le cas du laplacien (lorsque $|\nabla u| = 1$ i.e. lorsque u est une fonction distance), sur une grille cartésienne, le stencil de Δu est le suivant :

$$\Delta u_{i,j} = \frac{1}{64h^2}\left[\begin{array}{c} -24u_{i,j} \\ -8u_{i+1,j} - 8u_{i,j+1} - 8u_{i-1,j} - 8u_{i,j-1} \\ +4u_{i+2,j} + 4u_{i,j+2} + 4u_{i-2,j} + 4u_{i,j-2} \\ +4u_{i+2,j-1} + 4u_{i+2,j+1} + 4u_{i+1,j+2} + 4u_{i-1,j+2} \\ +4u_{i-2,j+1} + 4u_{i-2,j-1} + 4u_{i-1,j-2} + 4u_{i+1,j-2} \\ +2u_{i+2,j-2} + 2u_{i+2,j+2} + 2u_{i-2,j+2} + 2u_{i-2,j-2} \end{array}\right]$$



Résultats numériques

Schémas numériques

$\forall i$ nœud d'un maillage quelconque triangulaire :

- Schéma explicite : consistant, stable L^2 sous condition CFL

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = \alpha\, d_i + d_i \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^n}{|\nabla u^n|} \right) \right)_i = \alpha d_i + d_i \,(A\, u)_i^n$$

- Schéma semi-implicite : consistant, stable L^2 sans condition

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} = \alpha\, d_i + d_i \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^n|} \right) \right)_i = \alpha d_i + d_i \,(A\, u)_i^{n+1}$$

Résultats numériques

Adaptation de maillage

- Le volume d'un élément K est unitaire :

$$\int_K \sqrt{\det(\mathcal{M}(x))}dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |K|\sqrt{\det(\mathcal{M}_K)} = 1$$

  où $\mathcal{M}_K$ est la valeur moyenne de $\mathcal{M}(x)$ sur K.

- Le nouveau maillage T_h est construit tel que : pour toute arête $a = \vec{AB}$ dans T_h,

$$||a||_{\mathcal{M}} = \int_0^1 \sqrt{\vec{AB}^t \mathcal{M} \vec{AB}} = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^t \mathcal{M} \gamma'(t)} dt = 1$$

  où $\gamma(t) = A + t\vec{AB}$ est une paramétrisation de la courbe γ

- Tenseur de métrique

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{\text{min}}^2} & 0 \\ 0 & \frac{|\Delta d(x)|}{\varepsilon} \end{pmatrix} \mathcal{R}^t$$

Ref: V. Ducrot, P. Frey, *Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope*, C.R.Acad.Sci 2007.

Résultats numériques

Renormalisation

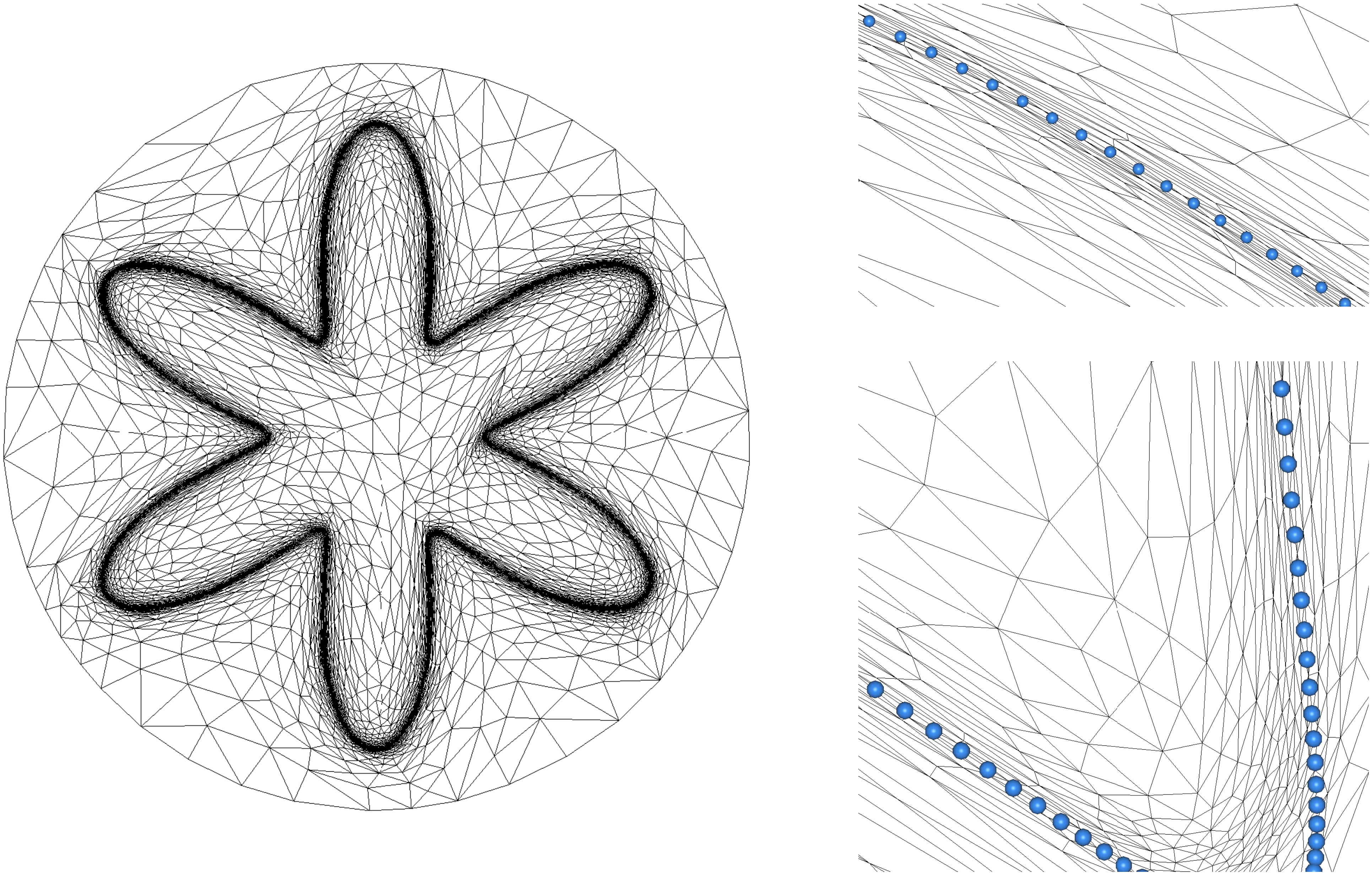
La fonction distance d est une solution de l'équation eikonale : $|\nabla d| = 1$.

Schémas du premier ordre $\Rightarrow$ effet dissipatif i.e. $|\nabla u| \gg 1$.
Nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\partial_t u - \mathrm{sgn}(u)(1 - |\nabla u|) = 0$$

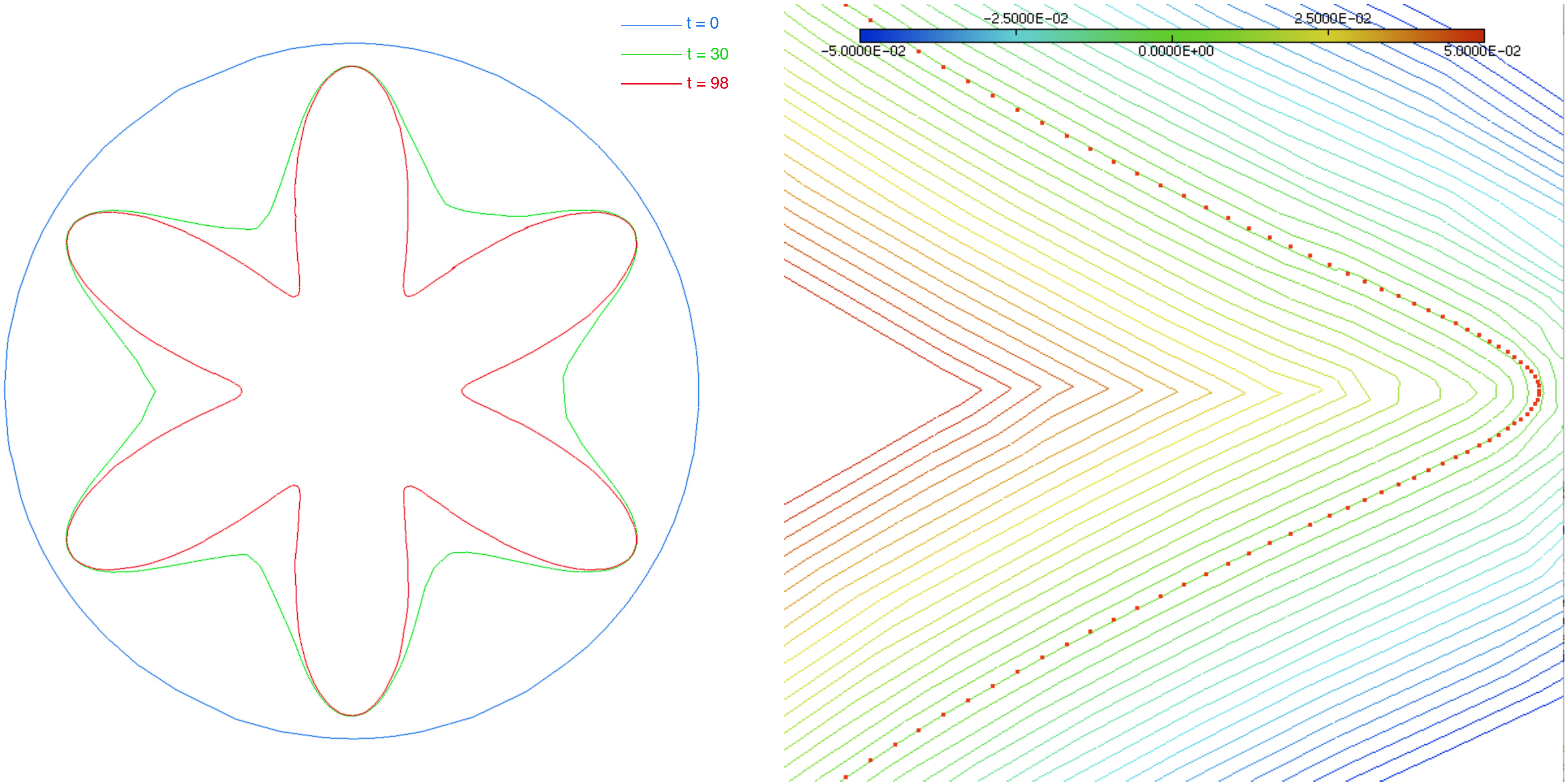
$\Rightarrow$ méthode de Fast Marching (algorithme classique pour le mouvement d'interfaces),
Ref: J.A.Sethian, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge, 1999.

Exemples



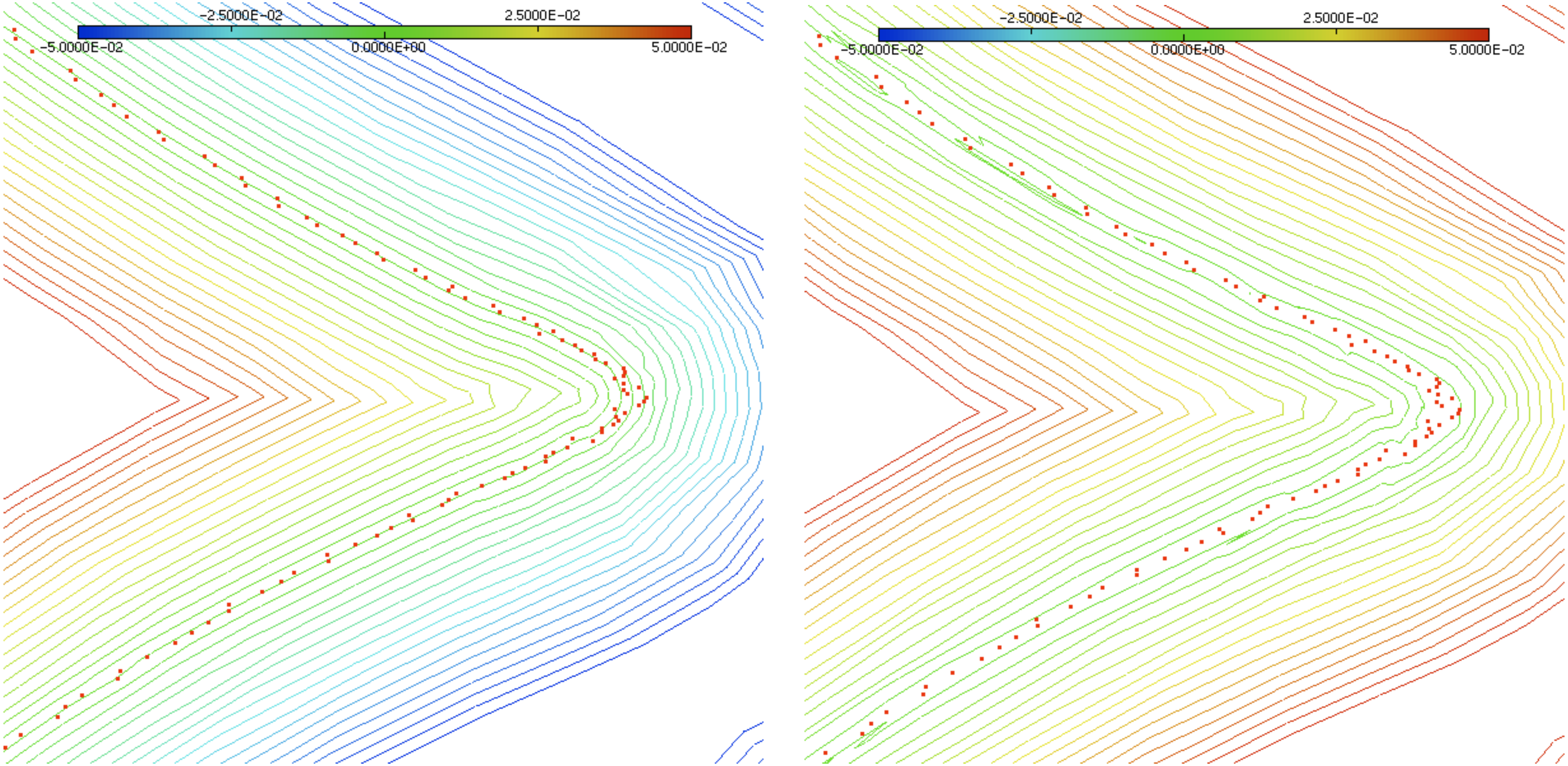
Triangulation anisotrope.

Exemples



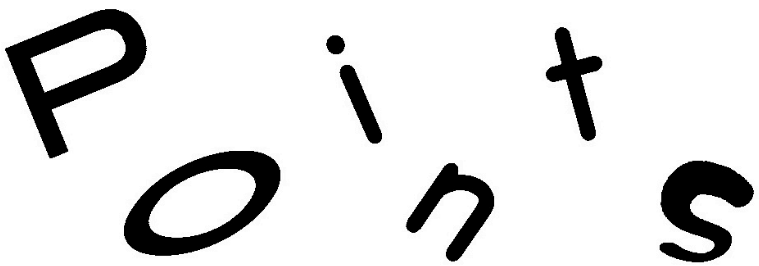
La courbe $\Gamma(t)$ *à différents temps (gauche)*
et la fonction ligne de niveau u *à convergence (droite).*

Exemples



Construction d'une courbe régulière d'approximation pour un nuage de points bruité. Comparaison entre la fonction ligne de niveau finale u (gauche) et la fonction de distance non signée d (droite).

Exemples



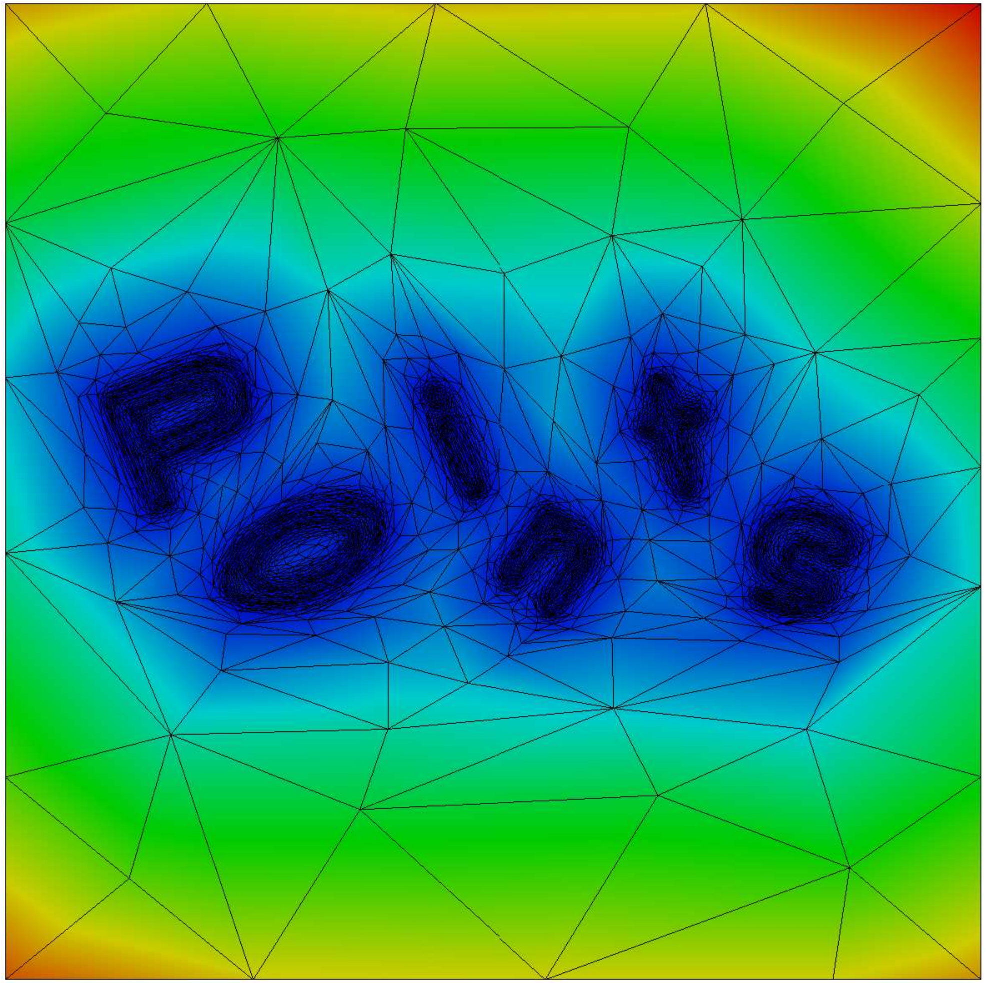
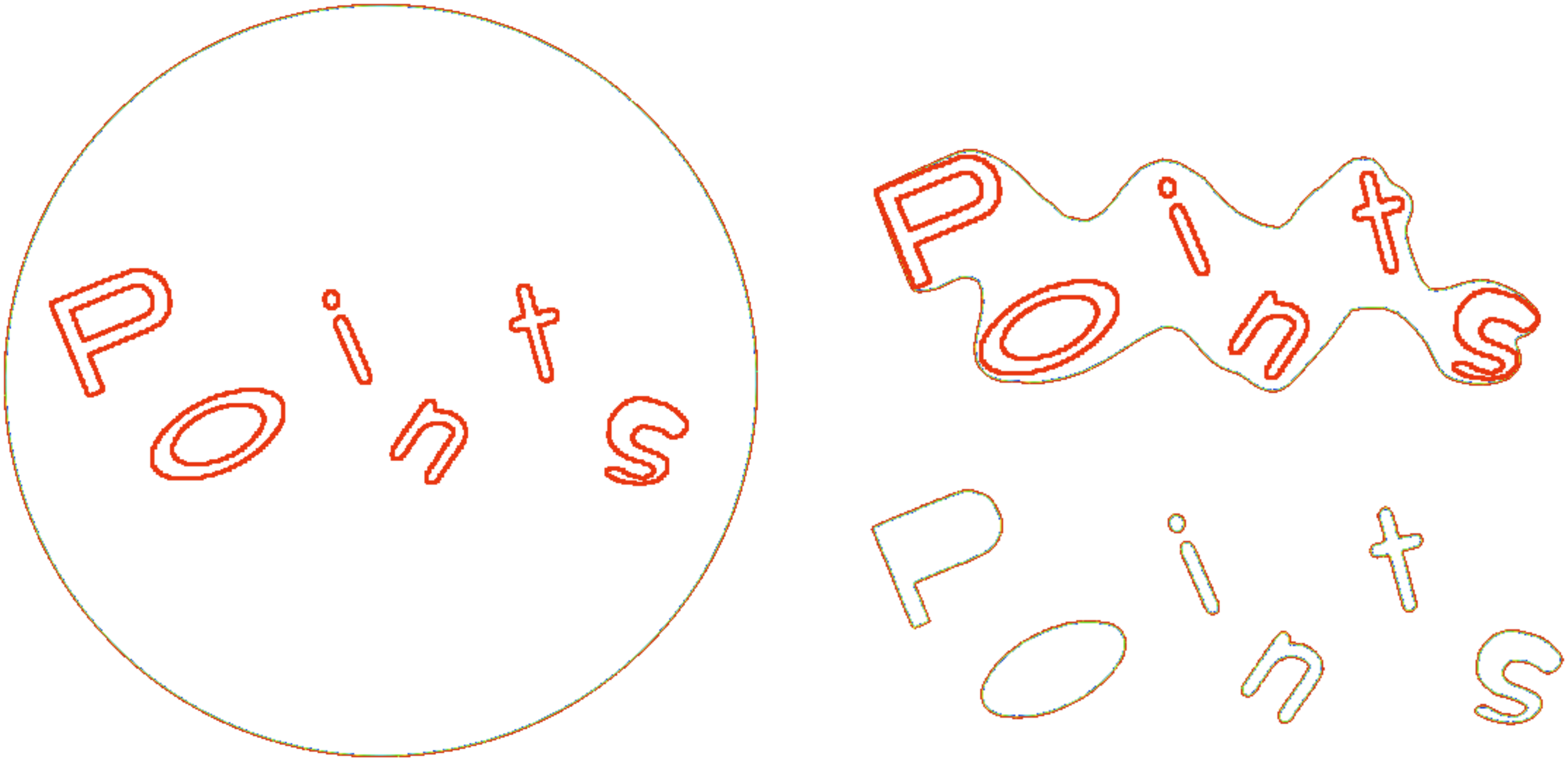


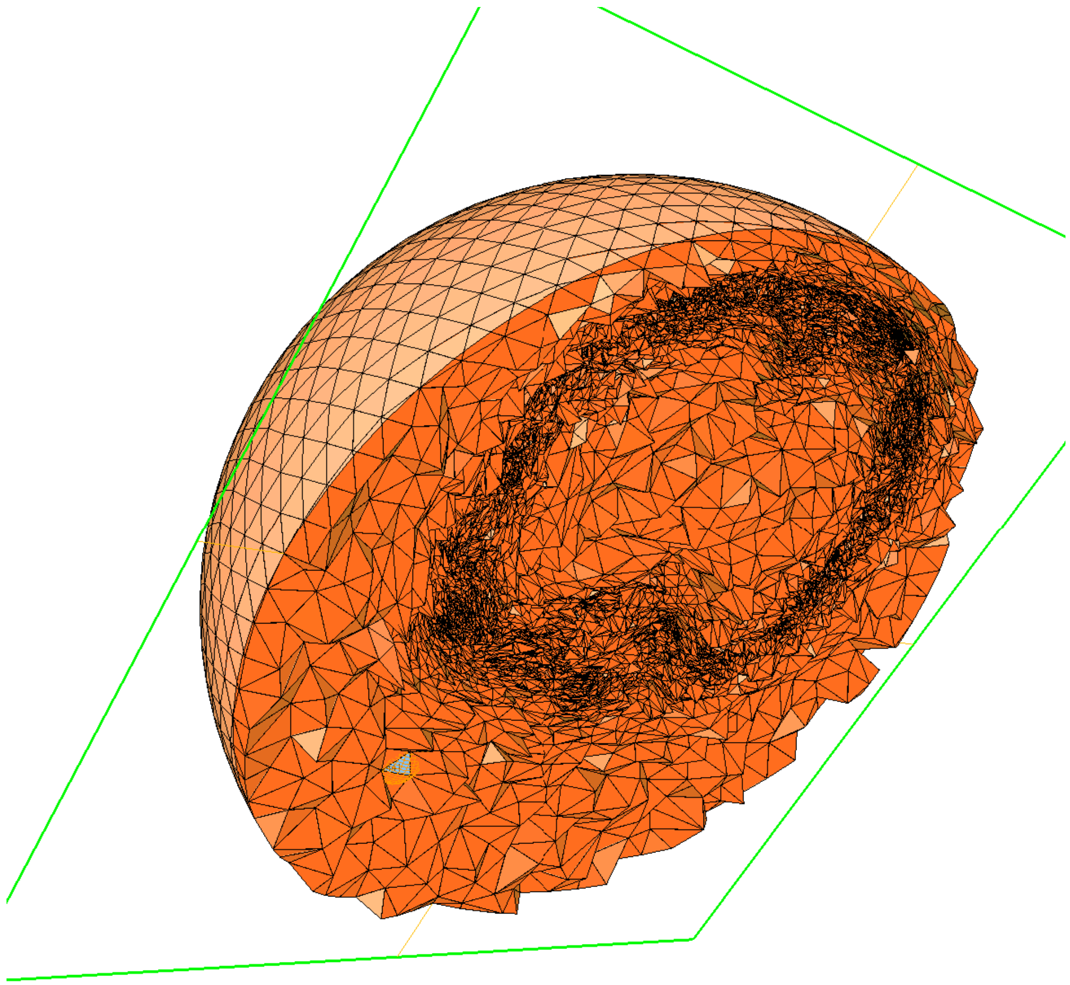
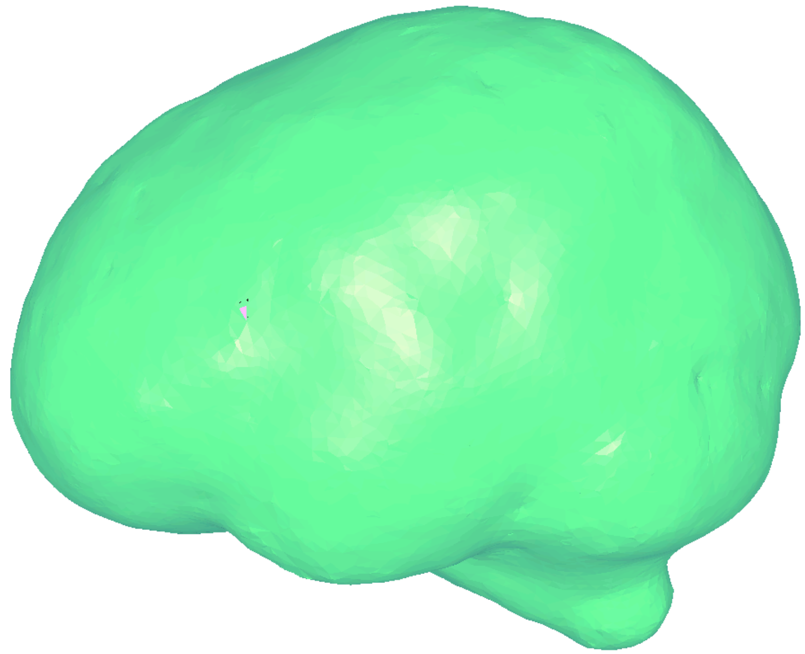
Image noir blanc originale (gauche)
et triangulation quasi-uniforme anisotrope avec la fonction distance associée (droite).

Exemples



Donnée avec plusieurs composantes connexes.
Évolution de la courbe $\Gamma(t)$ aux temps initial (gauche), intermédiaire et final (droite).

Exemples

Premiers résultats 3D.

Construction d'une surface régulière d'approximation de la surface d'un cerveau.

Conclusion et perspectives

- Bonnes approximations en 2D et 3D,
- Convergence des schémas, calcul condition CFL,
- Ajout d'un terme de pénalisation pour remplacer l'étape de renormalisation (coûteuse),
- Reconstruction de maillage : discrétisation en EF de notre approximation pour différentes simulations avec des méthodes comme Marching tetrahedra.