

# Modélisation de micro-résonateurs optiques

**STÉPHANE BALAC**

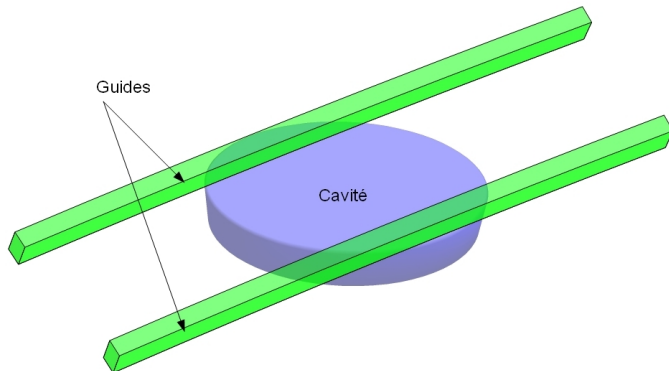
UMR 6082 - FOTON  
ENSSAT de Lannion  
Université de Rennes 1



Un micro-résonateur type est constitué :

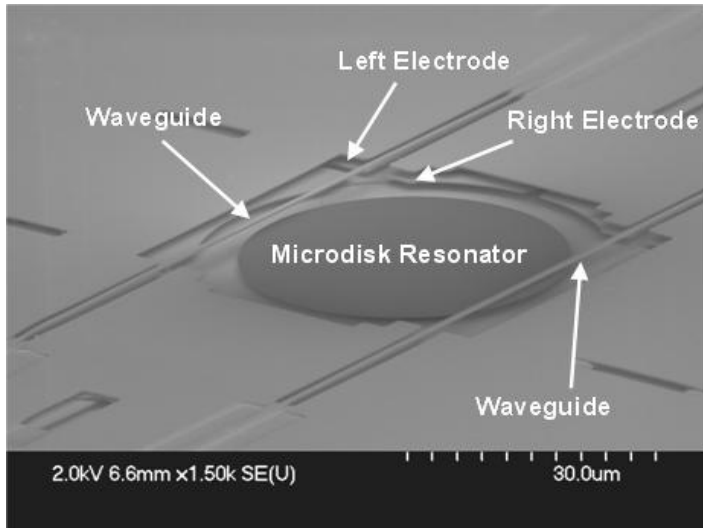
- de 2 guides d'ondes parallèles
- et d'une cavité (anneau, cylindre, sphère, *etc.*)

Schématiquement :



Le tout a une taille de l'ordre de quelques microns...

Une image de micro-résonateur :



# Plan de l'exposé

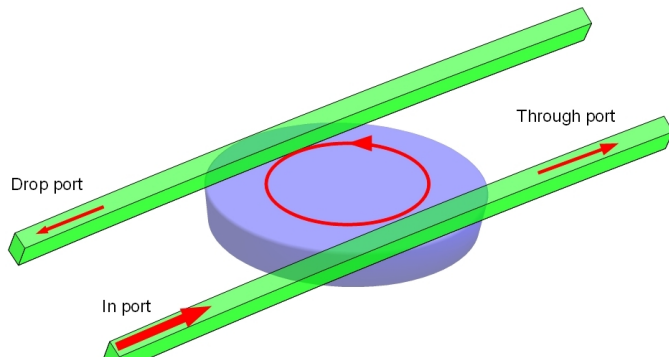
- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion

# Principe du fonctionnement d'un micro-résonateur

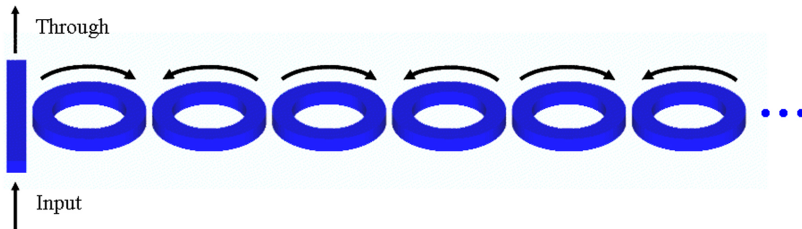
Selon les caractéristiques du micro-résonateur,

- une onde monochromatique est envoyée dans l'un des guides d'ondes (in port)
- dans des conditions de résonance, une partie (évanescence) de cette onde passe dans la cavité;
- elle peut à nouveau être couplée avec l'autre guide d'onde et ressortir (drop port)



# Couplage de micro-résonateurs

Pour certaines applications, plusieurs micro-résonateurs peuvent être associés :



- Un des composants devant permettre de passer des réseaux de communication optiques basés sur des dispositifs électroniques (nécessitant la conversion du signal optique en signal électrique et vice-versa) vers des réseaux de communication tout optique
- Les micro-résonateurs peuvent être utilisés dans la conception
  - d'amplificateurs optiques
  - de modulateurs optiques
  - de filtres optiques
  - de commutateurs optiques
  - ...
- Mais aussi
  - pour la création d'effets laser
  - comme portes logiques
  - dans la conception de lignes de retard de la lumière
  - ...



On souhaite disposer :

- d'un modèle mathématique décrivant le fonctionnement d'un micro-résonateur le plus complet et précis possible
- et d'un code de simulation numérique

- **Scattering matrix approach** : modèle simplifié reposant sur un formalisme matriciel pour décrire le transfert de la puissance optique entre cavité et guide d'onde
  - ↳ A. Yariv. *Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides. Electronics Letters, 36 (2000)*
- Résolution des équations de **Maxwell par FDTD**
  - ↳ Réalisé dans le cas d'une géométrie 2D
    - ↳ S.C. Hagness, D. Rafizadeh, S.T. Ho and A. Taflove. *FDTD microcavity simulations. J. Lightwave Technol., 15 (1997)*

- **Scattering matrix approach** : modèle simplifié reposant sur un formalisme matriciel pour décrire le transfert de la puissance optique entre cavité et guide d'onde
  - ↳ *A. Yariv. Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides. Electronics Letters, 36 (2000)*
- Résolution des équations de **Maxwell par FDTD**
  - ↳ Réalisé dans le cas d'une géométrie 2D
    - ↳ *S.C. Hagness, D. Rafizadeh, S.T. Ho and A. Taflove. FDTD microcavity simulations. J. Lightwave Technol., 15 (1997)*

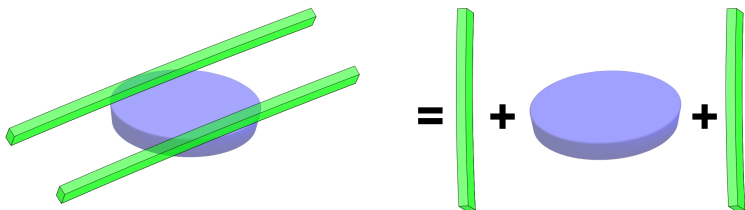
- Méthode des modes couplés (CMT - **Coupled mode theory**)
  - Le micro-résonateur est décomposé en sous-systèmes (guides droits, cavité circulaire) pour lesquels on calcule les modes propres. Dans la zone d'interaction entre guide et cavité, le champ électromagnétique est supposé s'écrire comme une C.L. des modes du guide droit et de la cavité (qu'il s'agit de calculer).

✍ *K.R. Hiremath, R. Stoffer, M. Hammer. Modeling of circular integrated optical microresonators by 2-D frequency domain coupled mode theory. Optics Communications, 257 (2006)*

➡ Modèle le plus utilisé dans la littérature en raison de sa simplicité de compréhension et de mise en œuvre.

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés**
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion

- On décompose la structure géométrique



- On calcule les modes guidés de chaque composante géométrique
- On décrit le champ électromagnétique en couplant les modes des différentes composantes entre eux

- La propagation de la lumière dans un guide d'onde peut être décrit en ayant recours aux modes du guide.
- Le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) peut être décomposé en 2 parties :
  - une partie qui correspond à la puissance optique qui est guidée sans atténuation dans le guide : **les modes guidés** (propagatifs et contra-propagatifs); ils sont néc. en nombre fini pour des guides droits ou circulaires
  - une partie qui correspond à la puissance qui est rayonnée hors du guide : **les modes radiatifs**

On écrit donc

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j=1}^M a_j \mathbf{E}_j(\mathbf{x})}_{\text{modes guidés propagatifs}} + \underbrace{\sum_{j=1}^M a_{-j} \mathbf{E}_{-j}(\mathbf{x})}_{\text{modes guidés contra-propagatifs}} + \underbrace{\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{x})}_{\text{modes radiatifs}}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j=1}^M a_j \mathbf{B}_j(\mathbf{x})}_{\text{modes guidés propagatifs}} + \underbrace{\sum_{j=1}^M a_{-j} \mathbf{B}_{-j}(\mathbf{x})}_{\text{modes guidés contra-propagatifs}} + \underbrace{\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{x})}_{\text{modes radiatifs}}$$

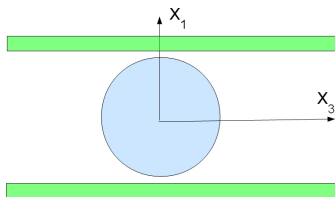
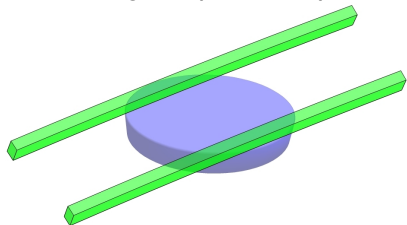
- Les modes guidés contra-propagatifs peuvent se déduire des modes guidés propagatifs
- Les modes radiatifs n'ont pas d'intérêt dans la situation qui nous intéresse

 *A. Snyder and J. Love. Optical waveguide theory. Kluwer (1983)*



# Hypothèse de bi-dimensionnalité du problème

On suppose (!) que les paramètres caractéristiques des milieux formant le micro-résonateur ainsi que le champ électromagnétique ne dépendent pas de la variable  $x_2$ .



On a donc

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{E}(x_1, x_3) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{B}(x_1, x_3).$$

# Les équations de Maxwell harmoniques

Les modes recherchés sont solutions des équations de Maxwell harmoniques :

$$\text{rot } \mathbf{E} + i \omega \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

$$\text{rot } (\mathbf{B}) - i \omega \varepsilon \mu_0 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

On désigne par

- $n$  l'indice du milieu :  $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$
- $k_0$  le nombre d'onde dans le vide :  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

Travaux de Manfred Hammer & Remco Stoffer, Department of Applied Mathematics, Univ. de Twente (NL)

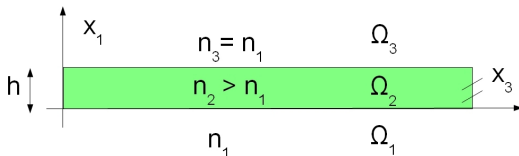
- K.R. Hiremath, M. Hammer, R. Stoffer, L. Prkna, J. Ctyroky. *Analytical approach to dielectric optical bent slab waveguides*. Optical and Quantum Electronics 37 (2005)
- K.R. Hiremath, R. Stoffer, M. Hammer. *Modeling of circular integrated optical microresonators by 2-D frequency domain coupled mode theory*. Optics Communications 257 (2006)
- M. Hammer. *Hybrid analytical/numerical coupled-mode modeling of guided wave devices*. Journal of Lightwave Technology 25 (2007)

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit**
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion

# Solution à variables séparées

Pour des raisons de symétrie, on recherche le champ électromagnétique sous forme d'une fonction à variables séparées :

$$\mathbf{E}(x_1, x_3) = F(x_3) \mathbf{E}_0(x_1) \quad \mathbf{B}(x_1, x_3) = G(x_3) \mathbf{B}_0(x_1)$$



Les équations de Maxwell imposent que

$$F(x_3) = G(x_3) = e^{-i\gamma x_3}$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}$  est la constante (inconnue) de propagation du mode.

De plus, les inconnues  $\mathbf{E}_0 = (E_{01}, E_{02}, E_{03})$  et  $\mathbf{B}_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$  sont solutions dans chaque milieu de (cf. équ. de Maxwell)

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma E_{02} = -\omega B_{01} \\ \gamma B_{01} - i B'_{03} = -\mu_0 \varepsilon \omega E_{02} \\ E'_{02} = -i \omega B_{03} \\ B'_{01} = i \gamma B_{03} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} E'_{01} = i \gamma E_{03} \\ \gamma B_{02} = \mu_0 \varepsilon \omega E_{01} \\ \gamma E_{01} - i E'_{03} = \omega B_{02} \\ B'_{02} = i \mu_0 \varepsilon \omega E_{03} \end{array} \right.$$

avec les C.L. adéquates.

On voit apparaître 2 systèmes d'équations non liés.

- Les solutions du système  $\left\{ \right.$  sont appelés modes TE
- Les solutions du système  $\left\{ \right.$  sont appelés modes TM

# Cas des modes TE (I)

- On choisit comme inconnue principale  $B_{03}$
- On est conduit à résoudre l'edo

$$B_{03}''(x_1) + \beta_j^2 B_{03}(x_1) = 0$$

avec  $\beta_j^2 = k_0^2 n_j^2 - \gamma^2 = k_0^2(n_j^2 - n_{eff}^2)$  où  $n_{eff} = \gamma/k_0$  appelé **indice effectif** du mode.

- La solution dans chacun des 3 domaines est

$$B_{03}(x_1) = \begin{cases} A_1^+ \exp(|\beta_1|x_1) & \text{dans } \Omega_1 \\ A_2^- \exp(-i|\beta_2|x_1) + A_2^+ \exp(i|\beta_2|x_1) & \text{dans } \Omega_2 \\ A_3^- \exp(-|\beta_3|x_1) & \text{dans } \Omega_3 \end{cases}$$

- où les constantes  $C = (A_1^+, A_2^-, A_2^+, A_3^-)$  sont déterminées en exploitant les C.L.

- On choisit comme inconnue principale  $B_{03}$
- On est conduit à résoudre l'edo

$$B_{03}''(x_1) + \beta_j^2 B_{03}(x_1) = 0$$

avec  $\beta_j^2 = k_0^2 n_j^2 - \gamma^2 = k_0^2(n_j^2 - n_{eff}^2)$  où  $n_{eff} = \gamma/k_0$  appelé **indice effectif** du mode.

- La solution dans chacun des 3 domaines est

$$B_{03}(x_1) = \begin{cases} A_1^+ \exp(|\beta_1|x_1) & \text{dans } \Omega_1 \\ A_2^- \exp(-i|\beta_2|x_1) + A_2^+ \exp(i|\beta_2|x_1) & \text{dans } \Omega_2 \\ A_3^- \exp(-|\beta_3|x_1) & \text{dans } \Omega_3 \end{cases}$$

- où les constantes  $C = (A_1^+, A_2^-, A_2^+, A_3^-)$  sont déterminées en exploitant les C.L.



- Les C.L. fournissent les constantes  $C$  comme solution du système linéaire  $M C = 0$  où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \exp(-i |\beta_2| e) & \exp(i |\beta_2| e) & -\exp(-|\beta_3| e) \\ \frac{1}{\varepsilon_1} |\beta_1| & i \frac{1}{\varepsilon_2} |\beta_2| & -i \frac{1}{\varepsilon_2} |\beta_2| & 0 \\ 0 & -i \frac{1}{\varepsilon_2} |\beta_2| \exp(-i |\beta_2| e) & i \frac{1}{\varepsilon_2} |\beta_2| \exp(i |\beta_2| e) & \frac{1}{\varepsilon_3} |\beta_3| \exp(-|\beta_3| e) \end{pmatrix}$$

- Une solution non triviale existe ssi  $\det(M) = 0$   
ce qui conduit à la condition  $\exists m \in \mathbb{Z}$  t.q.  $F_m\left(\frac{\gamma}{k_0}\right) = k_0 e$  où

$$F_m(x) = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - x^2}} \left( 2 \arctan \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{\frac{x^2 - n_1^2}{n_2^2 - x^2}} \right) + m\pi \right)$$

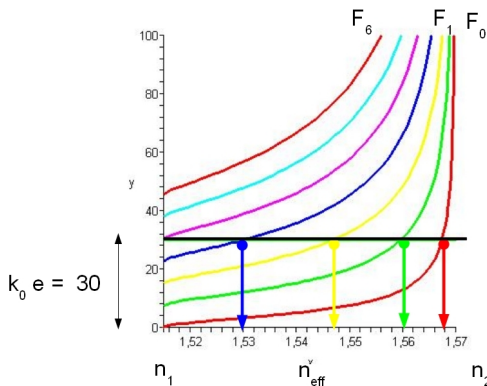
- Les C.L. fournissent les constantes  $C$  comme solution du système linéaire  $M C = 0$  où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \exp(-i|\beta_2|e) & \exp(i|\beta_2|e) & -\exp(-|\beta_3|e) \\ \frac{1}{\varepsilon_1}|\beta_1| & i\frac{1}{\varepsilon_2}|\beta_2| & -i\frac{1}{\varepsilon_2}|\beta_2| & 0 \\ 0 & -i\frac{1}{\varepsilon_2}|\beta_2|\exp(-i|\beta_2|e) & i\frac{1}{\varepsilon_2}|\beta_2|\exp(i|\beta_2|e) & \frac{1}{\varepsilon_3}|\beta_3|\exp(-|\beta_3|e) \end{pmatrix}$$

- Une solution non triviale existe ssi  $\det(M) = 0$   
ce qui conduit à la condition  $\exists m \in \mathbb{Z}$  t.q.  $F_m\left(\frac{\gamma}{k_0}\right) = k_0 e$  où

$$F_m(x) = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - x^2}} \left( 2 \arctan \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{\frac{x^2 - n_1^2}{n_2^2 - x^2}} \right) + m\pi \right)$$

# Cas des modes TE : un exemple (I)



Pour ces valeurs de  $n_1$ ,  $n_2$  et  $\omega$ , il existe 4 modes guidés TE correspondant à des indices effectifs  $n_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{k_0}$  valant

1.530   1.546   1.559   1.567

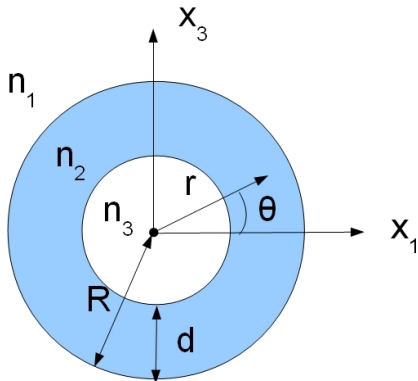
- Pour chacune de ces 4 valeurs possibles de la constante de propagation  $\gamma$ , le système linéaire  $MC = 0$  est résolu.
- L'unicité de la solution est obtenue en ajoutant une condition supplémentaire sur la puissance optique.
- Les constantes  $C = (A_1^+, A_2^-, A_2^+, A_3^-)$  donnent l'expression de  $B_{03}$  puis l'expression du mode TE en résolvant le système  $\{$ .

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité**
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion

# Solution à variables séparées (I)

Pour des raisons de symétrie, on recherche le champ électromagnétique en coordonnées polaires sous forme d'une fonction à variables séparées :

$$\mathbf{E}(x_1, x_3) = F(\theta) \mathbf{E}_0(r) \quad \mathbf{B}(x_1, x_3) = G(\theta) \mathbf{B}_0(r)$$



Les équations de Maxwell imposent que

$$F(\theta) = G(\theta) = e^{-i\gamma R\theta}$$

où  $\gamma \in \mathbb{C}$  est la constante (inconnue) de propagation du mode :  
 $\gamma = \beta - i\alpha$  avec

- $\alpha$  est la **constante d'atténuation** (prise en compte des pertes liées à la courbure)
- $\beta$  est la **constante de phase**

Les modes dans la cavité sont donc de la forme

$$\mathbf{E}(x_1, x_3) = e^{-i\gamma R\theta} \mathbf{E}_0(r) \quad \mathbf{B}(x_1, x_3) = e^{-i\gamma R\theta} \mathbf{B}_0(r)$$

De plus, les inconnues  $\mathbf{E}_0 = (E_{0r}, E_{0\theta}, E_{0z})$  et  $\mathbf{B}_0 = (B_{0r}, B_{0\theta}, B_{0z})$  sont solutions dans chaque milieu de (cf. équ. de Maxwell)

$$\text{modes TE} \left\{ \begin{array}{l} \gamma \frac{R}{r} E_{0z} = -\omega B_{0r} \\ E'_{0z} = -i\omega B_{0\theta} \\ \frac{1}{r} B_{0\theta} + B'_{0\theta} - i\gamma \frac{R}{r} B_{0r} = i\epsilon\mu_0\omega E_{0z} \end{array} \right.$$

$$\text{modes TM} \left\{ \begin{array}{l} \gamma \frac{R}{r} B_{0z} = \epsilon\omega\mu_0 E_{0r} \\ B'_{0z} = i\epsilon\mu_0\omega E_{0\theta} \\ \frac{1}{r} E_{0\theta} + E'_{0\theta} + i\gamma \frac{R}{r} E_{0r} = i\omega B_{0z} \end{array} \right.$$

avec les C.L. adéquates.



- On choisit comme inconnue principale  $E_{02}$
- On est conduit à résoudre l'équation de Bessel d'ordre complexe  $\gamma R$

$$r^2 E_{02}''(r) + r E_{02}'(r) + (n^2 k_0^2 r^2 - \gamma^2 R^2) E_{02}(r) = 0$$

- La solution dans chacun des 3 domaines s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel

$$E_{02}(r) = \begin{cases} C_1 J_{\gamma R}(n_1 k_0 r) & \text{dans } \Omega_1 \\ C_2 J_{\gamma R}(n_2 k_0 r) + D_2 Y_{\gamma R}(n_2 k_0 r) & \text{dans } \Omega_2 \\ C_3 H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 r) & \text{dans } \Omega_3 \end{cases}$$

- où les constantes  $C = (C_1, C_2, D_2, C_3)$  sont déterminées en exploitant les C.L.

- On choisit comme inconnue principale  $E_{02}$
- On est conduit à résoudre l'équation de Bessel d'ordre complexe  $\gamma R$

$$r^2 E_{02}''(r) + r E_{02}'(r) + (n^2 k_0^2 r^2 - \gamma^2 R^2) E_{02}(r) = 0$$

- La solution dans chacun des 3 domaines s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel

$$E_{02}(r) = \begin{cases} C_1 J_{\gamma R}(n_1 k_0 r) & \text{dans } \Omega_1 \\ C_2 J_{\gamma R}(n_2 k_0 r) + D_2 Y_{\gamma R}(n_2 k_0 r) & \text{dans } \Omega_2 \\ C_3 H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 r) & \text{dans } \Omega_3 \end{cases}$$

- où les constantes  $C = (C_1, C_2, D_2, C_3)$  sont déterminées en exploitant les C.L.

- Les C.L. fournissent les constantes  $C$  comme solution du système linéaire  $M C = 0$  où

$$M = \begin{pmatrix} J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & -J_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & -Y_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & 0 \\ 0 & J_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & Y_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & -H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R) \\ n_1 J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & -n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & -n_2 Y'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & 0 \\ 0 & n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & n_2 Y'_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & -n_3 H^{(2)'}_{\gamma R}(n_1 k_0 R) \end{pmatrix}$$

- Une solution non triviale existe ssi  $\det(M) = 0$  autrement dit si

$$\frac{J_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{n_1 J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{J_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R)} - \frac{n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{n_3 H^{(2)'}_{\gamma R}(n_3 k_0 R)} = 0$$

$$\frac{Y_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{n_2 Y'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{n_1 J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{Y_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R)} - \frac{n_2 Y'_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{n_3 H^{(2)'}_{\gamma R}(n_1 k_0 R)} = 0$$

- Les C.L. fournissent les constantes  $C$  comme solution du système linéaire  $M C = 0$  où

$$M = \begin{pmatrix} J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & -J_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & -Y_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & 0 \\ 0 & J_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & Y_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & -H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R) \\ n_1 J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & -n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d)) & -n_2 Y'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d)) & 0 \\ 0 & n_2 J'_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & n_2 Y'_{\gamma R}(n_2 k_0 R) & -n_3 H^{(2)'}_{\gamma R}(n_1 k_0 R) \end{pmatrix}$$

- Une solution non triviale existe ssi  $\det(M) = 0$  autrement dit si

$$\frac{\frac{J_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{n_2}{n_1} \frac{J'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))}}{\frac{Y_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))} - \frac{n_2}{n_1} \frac{Y'_{\gamma R}(n_2 k_0(R-d))}{J'_{\gamma R}(n_1 k_0(R-d))}} - \frac{\frac{J_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R)} - \frac{n_2}{n_3} \frac{J'_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H^{(2)'}_{\gamma R}(n_3 k_0 R)}}{\frac{Y_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H_{\gamma R}^{(2)}(n_3 k_0 R)} - \frac{n_2}{n_3} \frac{Y'_{\gamma R}(n_2 k_0 R)}{H^{(2)'}_{\gamma R}(n_1 k_0 R)}}} = 0$$

- Pour  $\omega$  donné, en résolvant l'équation précédente, on obtient les constantes de propagation des modes TE possibles.
- **Nécessite de calculer des fonctions de Bessel d'ordre complexe.**
- Le système linéaire  $MC = 0$  est résolu pour obtenir les constantes  $C = (C_1, C_2, D_2, C_3)$ 
  - L'unicité de la solution est obtenue en ajoutant une condition supplémentaire sur la puissance optique.
- On obtient alors l'expression de  $E_{02}$  puis l'expression du mode TE en résolvant le système  $\{$ .

- Pour  $\omega$  donné, en résolvant l'équation précédente, on obtient les constantes de propagation des modes TE possibles.
- **Nécessite de calculer des fonctions de Bessel d'ordre complexe.**
- Le système linéaire  $MC = 0$  est résolu pour obtenir les constantes  $C = (C_1, C_2, D_2, C_3)$ 
  - L'unicité de la solution est obtenue en ajoutant une condition supplémentaire sur la puissance optique.
- On obtient alors l'expression de  $E_{02}$  puis l'expression du mode TE en résolvant le système  $\{$ .

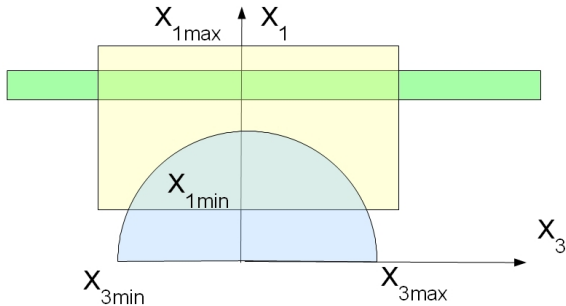
- Pour  $\omega$  donné, en résolvant l'équation précédente, on obtient les constantes de propagation des modes TE possibles.
- **Nécessite de calculer des fonctions de Bessel d'ordre complexe.**
- Le système linéaire  $MC = 0$  est résolu pour obtenir les constantes  $C = (C_1, C_2, D_2, C_3)$ 
  - L'unicité de la solution est obtenue en ajoutant une condition supplémentaire sur la puissance optique.
- On obtient alors l'expression de  $E_{02}$  puis l'expression du mode TE en résolvant le système  $\{$ .

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité**
- 6 Discussion



# Introduction d'une zone de couplage

- On suppose qu'en dehors d'une certaine zone (la zone de couplage) il n'y a pas d'interaction entre le champ électromagnétique dans le guide et dans la cavité.



- On suppose que le champ électromagnétique dans la zone de couplage peut s'écrire comme une C.L. des  $N_g$  modes du guide droit  $\mathbf{E}_{g,j}$  et des  $N_c$  modes la cavité  $\mathbf{E}_{c,j}$  :

$$\mathbf{E}(x_1, x_3) = \sum_{j=1}^{N_g} C_{g,j}(x_3) \mathbf{E}_{g,j}(x_1, x_3) + \sum_{j=1}^{N_c} C_{c,j}(x_3) \mathbf{E}_{c,j}(x_1, x_3)$$

# Équation des modes couplés

On montre que les fonctions inconnues  $C_{g,j}, j = 1, \dots, N_g$  et  $C_{c,j}, j = 1, \dots, N_c$  sont solutions du **système différentiel linéaire**

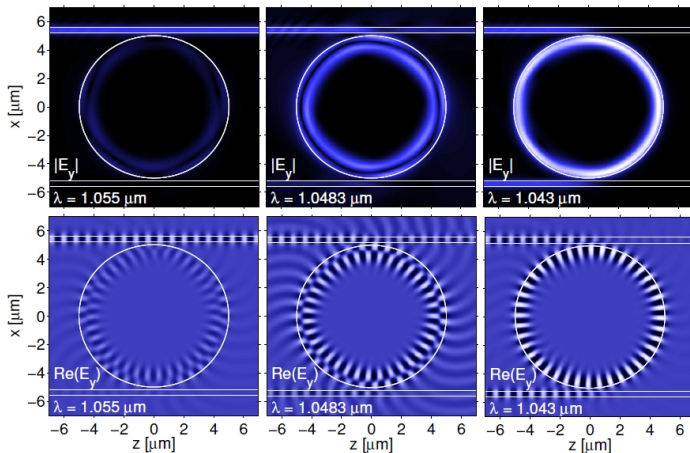
$$\begin{cases} p \in \{g, c\} & j = 1, \dots, N_p \\ \sum_{\ell \in \{g, c\}} \sum_{i=1}^{N_\ell} M_{\ell,i,p,j}(x_3) C'_{\ell,i}(x_3) - \sum_{\ell \in \{g, c\}} \sum_{i=1}^{N_\ell} F_{\ell,i,p,j}(x_3) C_{\ell,i}(x_3) = 0 \end{cases}$$

où

$$M_{\ell,i,p,j}(x_3) = \int_{x_{1min}}^{x_{1max}} (\mathbf{E}_{\ell,i} \wedge \mathbf{B}_{p,j}^* + \mathbf{E}_{p,j}^* \wedge \mathbf{B}_{\ell,i}) \cdot \mathbf{e}_3 \, dx_1$$

$$F_{\ell,i,p,j}(x_3) = -i\omega\mu_0 \int_{x_{1min}}^{x_{1max}} (\varepsilon - \varepsilon_\ell) \mathbf{E}_{\ell,i} \cdot \mathbf{E}_{p,j}^* \, dx_1$$

# Un exemple de simulation par CMT



*K. R. Hiremath, R. Stoffer, M. Hammer. Modeling of circular integrated optical microresonators by 2-D frequency domain coupled mode theory. Optics Communications 257 (2006)*

- 1 Les micro-résonateurs
- 2 Généralités sur la méthode des modes couplés
- 3 Calcul des modes du guide droit
- 4 Calcul des modes dans la cavité
- 5 Couplage entre le guide et la cavité
- 6 Discussion**

- La géométrie considérée est 2D
- Limites du modèle de description du champ électromagnétique en terme de modes
- Validité de l'anzat décrivant le champ dans la zone de couplage

- Prise en compte des effets 3D
- Lever les restrictions sur la géométrie de la cavité
- Introduction de propriétés non linéaires du matériau mis en cavité
  - loi de comportement de la forme

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} + \varepsilon_0 \underline{\chi}^{(3)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$$

où  $\underline{\chi}^{(3)}$  est le tenseur de susceptibilité d'ordre 3 du matériau

- non linéarité du type effet Kerr : indice  $n = n_0 + n_2 \|\mathbf{E}\|^2$