

Méthodes PML pour les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques en milieu non borné

Adib Rahmouni

IRMAR - Université Rennes 1

25 octobre 2013

3^{ème} journée FOTON-IRMAR

Propagation en domaine non-borné.

Domaine d'intérêt Ω_I

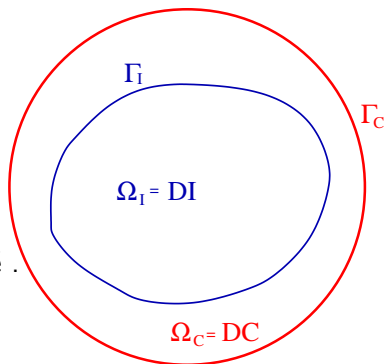
Domaine de calcul Ω_C .

Contraintes

Stabilité : Problème bien posé .

Coût : Calcul et stockage.

Précision : Erreur faible



Plusieurs méthodes :

Opérateur intégral sur Γ_C : très bonne précision, opérateur global : conduit à des matrices pleines.

⇒ Inconvénients : stockage et coût de calcul.

Conditions aux limites absorbantes sur Γ_C : Opérateur local : matrices creuses.

⇒ Inconvénients : Ordres supérieurs, problèmes de coins.

Alternative : **Une couche** entourant le domaine d'intérêt.

Equation des ondes en 2d :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

On construit une couche d'épaisseur δ à droite du domaine d'intérêt $x < 0$, (Israeli et Orszag 1981)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u(0, \cdot) = u^{(0)} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u^{(1)} \\ u(\delta, x_2, t) = 0 \end{array} \right.$$

Couches classiques

Le coefficient de réflexion est donné par

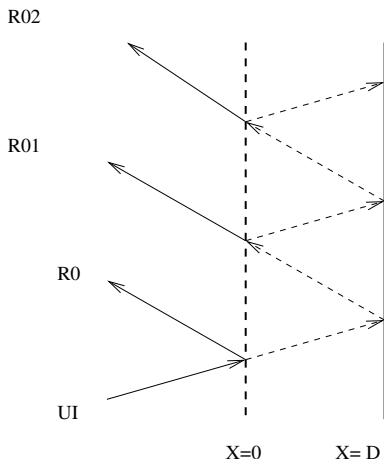
$$\begin{cases} R = R_0 + R_\delta (R_0^2 - 1) \sum_{n \geq 0} (R_\delta R_0)^n \\ R_0 = \frac{k_1 - k_1^\sigma}{k_1 + k_1^\sigma} \end{cases}$$

with

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k_1^2 + k_2^2 \\ (k_1^\sigma)^2 &= k_1^2 + i\omega\sigma \end{aligned}$$

$$R_\delta \ll 1 \Rightarrow \sigma \gg \omega$$

$$R_0 \ll 1 \Rightarrow \sigma \ll \omega$$



Alternatives :

- Ajouter un terme de friction

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \mu(x) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \Delta u = 0.$$

- Faire porter l'absorption sur $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \Delta u = 0$$

$$R = \frac{k_x - k_x^{\sigma_1} - e^{i(k_x^{\sigma_2} - k_x^{\sigma_1})\delta} (k_x - k_x^{\sigma_2})}{k_x + k_x^{\sigma_1} - e^{i(k_x^{\sigma_2} - k_x^{\sigma_1})\delta} (k_x + k_x^{\sigma_2})}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 - (1 + R_0)(1 - R_1)R_\delta \sum_{n \geq 0} (R_\delta R_1)^n \\ R_0 = \frac{k_x - k_x^{\sigma_1}}{k_x + k_x^{\sigma_1}} \quad R_\delta = e^{i(k_x^{\sigma_2} - k_x^{\sigma_1})\delta} \\ R_1 = \frac{k_x + k_x^{\sigma_2}}{k_x + k_x^{\sigma_1}} \quad k_x^{\sigma_2} = -k_x^{\sigma_1} + i\sigma_1 \end{array} \right.$$

- Introduites par Bérenger (1994) pour Maxwell.
- Plus d'inconnues dans la couche
- Opérateur absorbant dans la couche
- Problème de transmission domaine d'intérêt/couche faiblement réfléchissant.

On cherche donc à déterminer (ϕ, ψ)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_I \phi = S & x_1 < 0 \\ \mathcal{L}_C \psi = 0 & x_1 > 0 \\ + \text{conditions de transmission sur } x_1 = 0 \end{cases}$$

Pour un système hyperbolique linéaire du premier ordre (2d) :

$$\begin{cases} \partial_t \phi - A_1 \partial_{x_1} \phi - A_2 \partial_{x_2} \phi = 0 \\ \phi_{t=0} = \phi_0 \end{cases} \quad (1)$$

On découpe $\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\begin{cases} \partial_t \phi_1 - A_1 \partial_{x_1} (\phi_1 + \phi_2) = 0 \\ \partial_t \phi_2 - A_2 \partial_{x_2} (\phi_1 + \phi_2) = 0 \\ + \text{conditions initiales} \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Puis on introduit les coefficients d'absorption $\sigma_1(x_1)$ et $\sigma_2(x_2)$

$$\begin{cases} \partial_t \phi_1 - A_1 \partial_{x_1} (\phi_1 + \phi_2) + \sigma_1(x_1) \phi_1 = 0 \\ \partial_t \phi_2 - A_2 \partial_{x_2} (\phi_1 + \phi_2) + \sigma_2(x_2) \phi_2 = 0 \end{cases}$$

On peut facilement généraliser pour $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$, on a dans la couche

$$\partial_t \phi_i + A_i \partial_{x_i} \left(\sum_{j=1}^d \phi_j \right) + \sigma_i(x_i) \phi_i = F \quad 1 \leq i \leq d$$

Plusieurs manières de voir le problème PML, par exemple pour un demi-espace et une couche en $x_1 \geq 0$:

- Une inconnue ϕ dans $x_1 < 0$, une inconnue $\psi = (\phi_1, \phi_2)$ dans $x_1 > 0$ et des conditions de transmission en $x_1 = 0$

$$A_1 \phi = A_1 (\phi_1 + \phi_2)$$

- Une inconnue $\psi = (\phi_1, \phi_2)$ dans tout l'espace, $[A_1(\phi_1 + \phi_2)] = 0$ et une condition de compatibilité des D.I.

$$\phi(0, x) = \sum_j \phi_j(0, x)$$

par exemple $\phi_1(0, x) = \phi_2(0, x) = \phi(0, x)/2$

Maxwell en mode TE (2d, $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$) On découpe H_3 en deux composantes

$$H_3 = H_{31} + H_{32}$$

$$\begin{cases} \partial_t E_1 - \partial_{x_2} (H_{31} + H_{32}) & = 0 \\ \partial_t E_2 + \partial_{x_1} (H_{31} + H_{32}) + \sigma_1(x_1) E_2 & = 0 \\ \partial_t H_{31} + \partial_{x_1} E_2 + \sigma_1(x_1) H_{31} & = 0 \\ \partial_t H_{32} - \partial_{x_2} E_1 & = 0. \end{cases}$$

En régime harmonique, on peut noter que, grâce au changement de variables complexe (Chew et Weedon), on retrouve le système de départ (en (x'_1, x_2))

$$x'_1 = x_1 - \frac{i}{\omega} \int_0^{x_1} \sigma_1(\xi) d\xi$$

PML \iff prolongement dans le plan complexe

On peut facilement construire, à partir d'une solution du système de départ, la solution du modèle PML :

$$\Phi = \Phi_0 e^{-i(\omega t - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2)}$$

$$\phi_i = \alpha_i e^{-i(\omega t - k_1 \cdot x'_1(x) - k_2 \cdot x_2)}$$

et

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\omega} A_i \Phi_0.$$

Pour une couche d'épaisseur δ , en imposant une condition de dirichlet sur le bord extérieur (en $x = \delta$), on trouve l'amplitude de l'onde réfléchie

$$R = -e^{-2ik_1 \int_0^\delta \left(1 - \frac{i\sigma_1(\xi)}{\omega}\right) d\xi}.$$

Comme pour les couches classiques, il est “naturel” de choisir des profils paraboliques.

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{i=1}^d A_i \partial_{x_i} \phi + B(x) \phi = 0 & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) \end{cases}$$

Le problème précédent est **faiblement bien posé** s'il existe $q \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tels que l'on ait

$$\|\phi(t, \cdot)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|\phi_0\|_{H^q}, \quad t \geq 0$$

Il est **fortement bien posé** si l'inégalité est vraie pour $q = 0$

On peut utiliser un critère algébrique. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① Il existe $K_1 > 0$ tel que :

$$|e^{P(i\omega)t}| \leq K_1(1 + |\omega|^q)e^{\alpha t}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

- ② Il existe K_2 tel que :

$$\|\phi(\cdot, t)\|_{L^2} \leq K_2 e^{\alpha t} \|\phi_0\|_{H^q}, \quad t \geq 0$$

pour tout ϕ_0 suffisamment régulier.

Systèmes hyperboliques

Pour un opérateur du premier ordre

$$P(\partial_x) = \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j}$$

de symbole

$$P(i\zeta) = i \sum_{j=1}^n \zeta_j A_j$$

le système correspondant est dit :

faiblement hyperbolique ssi $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$ les valeurs propres de $P(i\zeta)$ sont imaginaires pures,

fortement hyperbolique ssi $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$, $|\zeta| = 1$, les valeurs propres de $P(i\zeta)$ sont imaginaires pures et qu'il est diagonalisable

strictement hyperbolique ssi $\forall \zeta \in \mathbb{R}^N$, $\zeta \neq 0$, les valeurs propres $P(i\zeta)$ sont imaginaire pures et distinctes.

On a les relations suivantes entre hyperbolicité et caractère bien posé :

- 1 Fortement hyperbolique \iff Fortement bien posé
- 2 Faiblement hyperbolique \iff Faiblement bien posé
- 3 Symétrique hyperbolique \implies Fortement hyperbolique \implies Fortement bien posé
- 4 Strictement hyperbolique \implies Fortement hyperbolique \implies Fortement bien posé

Le système de Maxwell est symétrique hyperbolique, cependant le modèle PML obtenu par décomposition n'est plus ni symétrique ni fortement bien posé.

On peut montrer que si (ϕ_1, ϕ_2) est une solution du problème de Cauchy correspondant, alors

$$\|(\phi_1, \phi_2)\|_{L^2} \leq Ce^{\alpha t} \|(\phi_1, \phi_2)(0, \cdot)\|_{H^1}.$$

De plus, cette estimation est optimale.

Le système PML en variables "splitées" est faiblement hyperbolique.

- 1 Système faiblement hyperbolique :
 - 1 Explosion possible sous l'effet d'une perturbation.
 - 2 Plus de régularité sur la donnée initiale.
- 2 Perte de la symétrie.
- 3 Plus d'inconnues.
- 4 Inconnues non physiques.

Plusieurs méthodes proposées : Abarbanel et Gottlieb, Hagström, Appelö et Kreiss, Hesthaven, Bécache et Joly, Chew et Weedon, Métral et Vacus, A.R....

Pour les problèmes en régime harmonique, on peut facilement revenir en variables physiques.

Pour les systèmes instationnaires c'est plus compliqué...

On transforme de Fourier-Laplace

$$\begin{cases} (p + \sigma_1)\hat{\phi}_1 - A_1\partial_{x_1}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) = 0 \\ (p + \sigma_2)\hat{\phi}_2 - A_2\partial_{x_2}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) = 0 \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

puis, on additionne

$$p\hat{\phi} - \frac{p}{p + \sigma_1}A_1\partial_{x_1}\hat{\phi} - \frac{p}{p + \sigma_2}A_2\partial_{x_2}\hat{\phi} = 0$$

On cherche alors un “chemin” dans le plan complexe tel que

$$\frac{p}{p + \sigma_1} A_1 \partial_{x_1} + \frac{p}{p + \sigma_2} A_2 \partial_{x_2} = I_{\sigma_1, \sigma_2} (A_1 J_{\sigma_1, \sigma_2} \partial_{x_1} + A_2 J_{\sigma_1, \sigma_2} \partial_{x_2})$$
$$\lim_{\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0} J_{\sigma_1, \sigma_2} = Id \quad \text{et} \quad (A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2}) J_{\sigma_1, \sigma_2} = 0$$

On fait le changement d'inconnues $\hat{\phi}' = J_{\sigma_1, \sigma_2} \hat{\phi}$, et on obtient

$$p I_{\sigma_1, \sigma_2}^{-1} J_{\sigma_1, \sigma_2}^{-1} \hat{\phi}' - (A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2}) \hat{\phi}' = 0$$

On revient alors en temps

$$\partial_t \phi' + C \phi' + R \cdot \tilde{E}^t * \phi' - (A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2}) \phi' = 0$$

On localise en temps en introduisant une nouvelle variable

$$\psi = \tilde{E}^t * \phi'.$$

conduit à

$$\partial_t \Phi + \begin{pmatrix} C & R \\ -I_4 & D \end{pmatrix} \Phi - \begin{pmatrix} A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = 0 \quad (2)$$

où

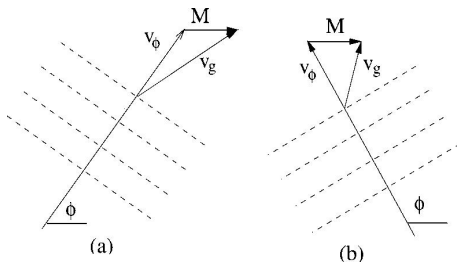
$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi' \\ \psi \end{pmatrix}$$

- 1 Pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, *i.e.* dans le domaine d'intérêt
 - 1 On retrouve l'équation de départ
 - 2 La nouvelle inconnue ϕ' est égale à l'inconnue physique ϕ (grâce à $\lim_{\sigma_x, \sigma_y \rightarrow 0} J_{\sigma_1, \sigma_2} = I$)
- 2 Dans la PML,
 - 1 Deux variables supplémentaires.
 - 2 Décroissance exponentielle de la solution.
 - 3 La couche est "perfectly matched".
 - 4 Pas de conditions de transmission.

On constate des “instabilités” pour certains systèmes (Euler avec écoulement : Hu, Elastodynamique anisotrope : Bécache & al)
Même pour des modèles fortement bien posés.

Critère géométrique (Bécache, Fauqueux, Joly) “Instabilités” si les vecteurs de longueur $\left(\frac{k}{\omega}\right)$ et vitesse de groupe $\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)$ n'ont pas la même orientation.

Exemple : Equations d'Euler (écoulement subsonique)



En revanche pas d'instabilités pour le modèle Maxwell,
Elastodynamique isotrope, Euler sans écoulement

- Etude des instabilités.
- Modèles fortement bien posés.
- Facile à intégrer dans un code existant.
- Généralisation aux systèmes hyperboliques.
- Mise en oeuvre “simple” .