Comportement asymptotique des solutions de systèmes et d'équations aux dérivées partielles non-linéaires dégénérés

Résumé court

Cette thèse, constituée de quatre chapitres, étudie le comportement asymptotique des solutions de systèmes et d'équations aux dérivées partielles non-linéaires dégénérés dans le cadre périodique. Les chapitres 2, 3 traitent des systèmes d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Les chapitres 4, 5 concernent des équations et des systèmes paraboliques dégénérés du second ordre.

Le deuxième chapitre contient des propriétés fondamentales des systèmes d'équations de Hamilton-Jacobi comme le principe de comparaison, l'existence et la régularité des solutions. Le problème ergodique est résolu pour des systèmes dont les Hamiltoniens sont coercifs. Et puis nous prouvons le comportement asymptotique des solutions des systèmes de type eikonal.

Dans le troisième chapitre, nous utilisons une approche purement EDP pour généraliser les résultats du chapitre 2 aux classes plus générales de Hamiltoniens. Nous obtenons le résultat pour des Hamiltoniens non convexes et l'appliquons aux Hamiltoniens strictement convexes. Nous obtenons ainsi l'analogue des résultats de comportement asymptotique de Barles et Souganidis (2000) pour les systèmes non convexes et Davini et Siconolfi (2006) pour les systèmes strictement convexes.

Dans le quatrième chapitre, nous prouvons des bornes de gradient pour les solutions d'équations paraboliques non-linéaires dégénérées. Ces équations contiennent une somme de deux Hamiltoniens de nature très différente, l'un possède une croissance sous-linéaire en la variable gradient et l'autre possède une croissance sur-linéaire en la variable gradient. Nous résolvons cette difficulté en deux étapes. D'abord, nous prouvons une borne uniforme d'oscillation que nous utilisons ensuite pour obtenir la borne de gradient. Si l'on suppose en plus la matrice diffusion est uniformément elliptique, nous pouvons utiliser le principe du maximum fort pour obtenir le comportement asymptotique des solutions. Par ailleurs, nous prouvons le comportement asymptotique des solutions de systèmes faiblement couples avec des équation de nature différent, par exemple, certaines ont un Hamiltonien sous-linéaire tandis que d'autres ont un Hamiltonien sur-linéaire.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à la convergence des solutions d'équations paraboliques non-linéaires dégénérées. La condition importante est que nous supposons qu'en tout point, la matrice de diffusion est soit nulle soit inversible. Nous combinons des techniques de type premier ordre et second ordre pour prouver ce résultat. Dans la zone où la matrice diffusion est nulle, nous utilisons les techniques de type premier ordre. Dans le complementaire, nous employons le principe du maximum fort pour nous ramener vers la zone où la matrice diffusion est nulle.

Mots clés. Comportement asymptotique, Équations de Hamilton-Jacobi, Équations paraboliques non-linéaires dégénérées, Systèmes d'équations aux dérivées partielles, Problème ergodique, Principe

du maximum fort, Oscillation, Borne de gradient, Solutions de viscosité, Contrôle optimal.

Notations

Dénotons :
$\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ le tore N-dimensionel.
Équation de Hamilton-Jacobi sont parfois écrites comme Équation de H-J.
$u : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{Z}^N$- périodique dans le cas d'équations scalaires.
$u : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}^m$ un vecteur de m fonctions $\mathbb{Z}^N$- périodique dans le cas de systèmes de m équations.
$C(\mathbb{T}^N)$: l'ensemble des fonction continues de $\mathbb{T}^N$ à $\mathbb{R}$.
$C(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^m)$: l'ensemble des fonction continues de $\mathbb{T}^N$ à $\mathbb{R}^m$.
$C(\mathbb{T}^N)^m$: l'ensemble des fonctions vectorielles $(v_1, \ldots, v_m)$ avec de $v_i \in C(\mathbb{T}^N)$.
Pour $r = (r_1, \ldots, r_m), s = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m$, we write $r \leq s$ si $r_k \leq s_k$ pour tout $k = 1, \ldots, m$.
Pour le système (1), nous le classons comme suit :
si $A_i \equiv 0$, for all i : système d'équation de Hamilton-Jacobi (totalement dégénéré).
si $A_i \geq \mu Id$ with $\mu > 0$, for all i : système uniformément parabolique.
si $A_i \geq 0$, for all i : système parabolique dégénéré.
Dans toute la thèse, nous considérons toujours les solutions de viscosité. Livres de références : Lions 82, Crandall-Ishii et Lions 92, Fleming et Soner 93, Barles 94, Bardi et Capuzzo Dolcetta 97, Koike 04.