Régularisation non-locale de lois de conservation scalaires

Jérôme Droniou,
Université Montpellier II

Un moyen bien connu, qui a de plus un sens physique, pour approcher les solutions entropiques d'une loi de conservation scalaire

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{1}$$

consiste à considérer une viscosité évanescente

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x - \varepsilon\Delta u^\varepsilon = 0. \tag{2}$$

L'obtention de la formulation entropique de (1) est évidente sur cette approximation: si η est une fonction convexe on a

$$\Delta(\eta(u^\varepsilon)) = \eta''(u^\varepsilon)|\nabla u^\varepsilon|^2 + \eta'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon \geq \eta'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon \tag{3}$$

de sorte qu'en multipliant (2) par $\eta'(u)$ et en prenant un flux ϕ vérifiant $\phi' = \eta' f'$, on trouve $(\eta(u^\varepsilon))_t + (\phi(u^\varepsilon))_x - \varepsilon\Delta(\eta(u^\varepsilon)) \leq 0$ soit, à la limite, la formulation entropique $(\eta(u))_t + (\phi(u))_x \leq 0$ de (1).

Dans cet exposé, nous nous intéresserons au cas où le laplacien de (2) est remplacé par un laplacien fractionnaire:

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x + \varepsilon g[u^\varepsilon] = 0 \qquad \text{avec, formellement,} \qquad \widehat{g[u^\varepsilon]}(\xi) = |\xi|^\lambda \widehat{u^\varepsilon}(\xi) \tag{4}$$

pour $\lambda \in]1,2]$ (ce type d'approximation a aussi des significations physiques, et $\lambda = 2$ correspond à (2)).

Les principales manipulations que l'on fait sur (2), par exemple pour prouver des estimations sur u^ε ou établir (3), utilisent la structure particulière du laplacien qui, en tant qu'opérateur de dérivation, se comporte bien vis-a-vis des compositions. Ces manipulations ne sont plus du tout adaptées à l'opérateur non-local g et, autant pour prouver les estimations a priori qui permettent d'établir l'existence d'une solution globale à (4) que pour établir les inégalités d'entropie

$$(\eta(u^\varepsilon))_t + (\phi(u^\varepsilon))_x + \varepsilon g[\eta(u^\varepsilon)] \leq 0,$$

il faut employer des techniques totalement différentes de celles utilisées dans le cadre de l'approximation visqueuse.

Nous verrons qu'il est cependant possible, grâce à une méthode de splitting, d'établir l'existence de solutions (régulières) à (4) et leur convergence, quand $\varepsilon \to 0$, vers la solution entropique de (1).