Solution d'une équation de Schrödinger avec la condition de finitude de Sommerfeld

Résumé

On considère un obstacle de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$), régulier et "sans trou", et Ω son complémentaire. Si p est une fonction à décroissance assez rapide et $k > 0$, on considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{array}{lcl} -\Delta u - k^2 u + p(x)u & = & 0, \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u \in H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega}), u_{|\partial\Omega} = 0 & & \end{array} \right.$$

et on impose à la solution u la condition de finitude de Sommerfeld :

$$(*) \quad \sup_{R>1} \frac{1}{R} \int_{\Omega_R} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

C'est, grosso modo, une condition plus faible que la condition de rayonnement sortant de Sommerfeld que l'on impose habituellement pour ce genre de problème.

Le but de mon exposé serait de montrer quelques propriétés sur l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des solutions de $(\mathcal{P})$ vérifiant la condition $(*)$.
En particulier, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}^*$ est étroitement lié au saut de discontinuité de la résolvante $(-\Delta - z)^{-1}$ lorsque z traverse l'axe réel au point k^2.
Si l'on rajoute un second membre convenable dans l'équation $(\mathcal{P})$, on peut facilement obtenir l'ensemble des solutions du nouveau problème à partir de $\mathcal{S}^*$, et il y en a beaucoup ! En revanche, on peut facilement caractériser une unique solution de l'équation avec second membre qui soit la plus petite possible à l'infini (dans un sens à préciser), c'est à dire la plus économique possible.
Un intéressant problème inverse est la reconstruction du flux sur $\partial\Omega$ lié à la solution u (c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial n}$) à partir de la connaissance de son comportement asymptotique, c'est à dire des contributions entrantes et sortantes de la solution. On a ici quelques résultats d'unicité et de stabilité pour ce problème inverse.