

Conditions de rayonnement et couches absorbantes de type PML pour l'équation de Galbrun fréquentielle en présence d'un écoulement uniforme.

E. Bécache^{†,*}, A.-S. Bonnet-Ben Dhia^{‡,*} et G. Legendre^{‡,*}

[†]INRIA ROCQUENCOURT, [‡]ENSTA, * UMR 2706 CNRS-INRIA-ENSTA

1 Position du problème dans un guide infini

Nous considérons le problème bidimensionnel de la propagation du son dans un écoulement uniforme, de vitesse subsonique $v_0 > 0$, dans un conduit rigide infini. On considère une source de perturbations, périodique en temps, de la forme :

$$\mathbf{F}(x, t) = \Re e (\mathbf{f}(x) e^{-i\omega t})$$

de pulsation $\omega > 0$. On cherche alors un champ de déplacements $\mathbf{U}(x, t)$ de la même forme :

$$\mathbf{U}(x, t) = \Re e (\mathbf{u}(x) e^{-i\omega t})$$

qui représente la solution du régime périodique établi.

La fonction \mathbf{u} (à valeurs complexes) est alors solution du problème suivant :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2)$$

où Ω et $\partial\Omega$ désignent respectivement le conduit infini de hauteur h et ses parois rigides, $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde et $M = v_0/c_0$ le nombre de Mach ($0 < M < 1$). Pour simplifier, on suppose que le second membre à support compact \mathbf{f} admet une décomposition de Helmholtz de la forme :

$$\mathbf{f} = \nabla g_a + \operatorname{rot} g_h, \quad (3)$$

où g_a et g_h sont également à supports compacts. Du point de vue physique, ceci signifie que la source \mathbf{f} contient une partie "acoustique" g_a , donnant naissance à des perturbations irrotationnelles (c'est-à-dire des fluctuations de pression), et une partie rotationnelle g_h , à l'origine de perturbations hydrodynamiques (ou fluctuations de vitesse).

Tel quel, le problème (1)-(2) admet une infinité de solutions. Il nous faut donc tout d'abord le compléter par des conditions destinées à caractériser l'unique solution représentant le régime périodique établi. Ces conditions vont porter sur le comportement de \mathbf{u} à l'infini. Nous les obtiendrons à l'aide d'un procédé dit "d'absorption limite".

Une fois la solution physique caractérisée, nous décrirons une méthode numérique pour la calculer: cette méthode repose sur une utilisation combinée de la technique de régularisation [4] et de la technique des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) [1].

2 Principe d'absorption limite

2.1 Le problème dissipatif

La démarche est la suivante. Dans un premier temps, nous substituons au nombre d'onde réel k un nombre complexe k_ϵ tel que :

$$k_\epsilon = k + i\epsilon,$$

où ϵ désigne un réel positif. Le cas nous concernant devient alors un cas limite pour lequel ϵ vaut zéro. Cette substitution peut s'interpréter mathématiquement par la présence d'un milieu de propagation dissipatif. Elle permet de prouver l'existence d'une solution \mathbf{u}^ϵ d'"énergie finie" (*i.e.* appartenant à l'espace $L^2(\Omega)^2$) pour le problème dissipatif (nous admettrons ici ce résultat).

La technique d'absorption limite proprement dite consiste à montrer que la suite des solutions des problèmes dissipatifs converge, lorsque le paramètre ϵ vers zéro, vers une solution des équations (1) à (2). C'est cette solution que nous appellerons la solution du régime périodique établi.

La forme particulière de la source f nous conduit à introduire les problèmes suivants : trouver $\varphi_a^\epsilon \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} -k_\epsilon^2 \varphi_a^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1^2} - \Delta \varphi_a^\epsilon &= g_a \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

et : trouver $\varphi_h^\epsilon \in L^2(\Omega)$ tel que

$$-k_\epsilon^2 \varphi_h^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi_h^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_h^\epsilon}{\partial x_1^2} = g_h \text{ dans } \Omega. \quad (5)$$

Ces deux problèmes sont bien posés. Il apparaît alors que $\mathbf{u}^\epsilon = \nabla \varphi_a^\epsilon + \mathbf{rot} \varphi_h^\epsilon$ est la solution du problème dissipatif. En particulier, on a :

$$\frac{D^2 \mathbf{u}^\epsilon}{Dt^2} - \nabla (\text{div } \mathbf{u}^\epsilon) = \nabla \left(\frac{D^2 \varphi_a^\epsilon}{Dt^2} - \Delta \varphi_a^\epsilon \right) + \mathbf{rot} \left(\frac{D^2 \varphi_h^\epsilon}{Dt^2} \right) = \nabla g_a + \mathbf{rot} g_h,$$

où l'on a posé

$$\frac{D}{Dt} = -ik + M \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Nous allons maintenant passer à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans les problèmes (4) et (5).

2.2 Limite du potentiel acoustique

On a montré dans [5] que, si $k \neq \sqrt{1 - M^2} n\pi/h$ pour tout entier n (on fera cette hypothèse dans la suite), le potentiel φ_a^ϵ tend, lorsque ϵ tend vers 0, vers un potentiel φ_a qui vérifie :

$$\begin{aligned} -k^2 \varphi_a - 2ikM \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_1^2} - \Delta \varphi_a &= g_a \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Là encore (et contrairement au problème dissipatif (4)), les deux équations ci-dessus ne suffisent pas à caractériser φ_a . Il faut préciser son comportement à l'infini. Pour cela, on écrit la décomposition de φ_a^ϵ sur les modes du conduit puis on passe à la limite.

Pour le problème dissipatif, il est facile de vérifier que les modes sont de la forme:

$$\varphi_n(x_2)e^{i\beta_n^{\pm}x_1}$$

où

$$\beta_n^{\pm} = \frac{-k_\epsilon M \pm \sqrt{k_\epsilon^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2)}}{1-M^2},$$

la détermination choisie pour la racine carrée d'un nombre complexe étant :

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\arg(z)}{2}}, \quad 0 \leq \arg(z) < 2\pi.$$

En particulier, on a $\Im m(\beta_n^+) > 0$ et $\Im m(\beta_n^-) < 0$, de sorte que les modes “+” sont évanescents à l’aval et les modes “-” à l’amont. On peut alors montrer que le potentiel φ_a^ϵ se décompose, hors du support de la source, sur les modes “+” à l’aval et sur les modes “-” à l’amont.

Nous pouvons maintenant passer à la limite dans ces décompositions. On montre que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_n^{\pm} = \beta_n^{\pm}$, où les nombres β_n^{\pm} désignent les nombres d’onde axiaux des modes de conduit sans dissipation ($\epsilon = 0$). En remarquant que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{k_\epsilon^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2)} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2)} \in \mathbb{R}_+ & \text{if } k \geq \frac{n\pi}{h} \sqrt{1-M^2}, \\ i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2) - k^2} \in i\mathbb{R}_+ & \text{if } k < \frac{n\pi}{h} \sqrt{1-M^2}, \end{cases}$$

on peut vérifier les propriétés suivantes :

1. Il n’existe qu’un nombre fini de modes propagatifs ($\beta_n^{\pm} \in \mathbb{R}$). En revanche, il existe une infinité de modes évanescents.
2. Tous les modes “+” (resp. “-”) ont une vitesse de groupe $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$ positive (resp. négative).
3. Un effet bien connu de la présence de l’écoulement est l’existence, si

$$\sqrt{1-M^2} \frac{n\pi}{h} < k < \frac{n\pi}{h},$$

de modes “+” qui ont une vitesse de phase négative. Ils sont appelés modes amont inverses.

Le potentiel φ_a est finalement caractérisé par le fait qu’il se décompose sur les modes “sortants”, c’est à dire sur les modes “+” à l’aval et sur les modes “-” à l’amont.

2.3 Limite du potentiel hydrodynamique

La solution du problème (5) est explicitement donnée par le produit de convolution $\varphi_h^\epsilon(x_1, x_2) = G_\epsilon * g_h(\cdot, x_2)(x_1)$, où le noyau $G_\epsilon(x_1)$ désigne l’unique fonction de Green d’énergie finie de l’équation (5), donnée par :

$$G_\epsilon(x_1) = \frac{x_1}{M^2} e^{i\frac{k_\epsilon}{M}x_1} \text{ si } x_1 \geq 0, \quad 0 \text{ sinon.}$$

Si G désigne la limite de G_ϵ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (G a la même expression que G_ϵ avec k à la place de k_ϵ), alors φ_h^ϵ tend vers φ_h où $\varphi_h(x_1, x_2) = G * g_h(\cdot, x_2)(x_1)$. On vérifie aisément que φ_h est solution du problème limite suivant

$$-k^2 \varphi_h - 2ikM \frac{\partial\varphi_h}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial x_1^2} = g_h \text{ dans } \Omega. \quad (7)$$

De plus, c'est l'unique solution qui est identiquement nulle à l'amont de la source. Ceci exprime le fait que les tourbillons sont produits par la source et convectés par l'écoulement. Il ne peut donc pas en exister en amont de la source.

Nous constatons que le potentiel hydrodynamique devient très oscillant lorsque le rapport k sur M est grand, et donc en particulier pour un écoulement à faible vitesse. Lors de la résolution numérique du problème, ceci se traduira par la nécessité employer un maillage très fin du domaine de calcul, afin d'éviter tout problème de discrétisation.

2.4 Conclusion et caractérisation de la solution sortante

Nous déduisons finalement de ce qui précède que la solution \mathbf{u}^ϵ du problème dissipatif converge, lorsque ϵ tend vers 0, vers $\mathbf{u} = \nabla\varphi_a + \text{rot}\varphi_h$, où φ_a et φ_h sont les potentiels "sortants" définis ci-dessus.

Ce champ \mathbf{u} vérifie les équations (1)-(2). Parmi toutes les solutions de (1)-(2), c'est l'unique solution qui représente le régime périodique établi. Nous dirons qu'il s'agit de la solution "sortante" du problème.

3 Couches absorbantes et régularisation

L'objet de cette section est de décrire une méthode numérique permettant de calculer une approximation de \mathbf{u} par éléments finis. Cette méthode utilisera d'une part la technique des PML, permettant de travailler en domaine borné sans créer de réflexions parasites, et d'autre part le procédé de régularisation décrit dans [4], assurant la stabilité de la discrétisation.

Pour simplifier la présentation, nous allons tout d'abord décrire la méthode des PML sur le cas scalaire du potentiel acoustique étudié dans [1].

3.1 Couches absorbantes pour le problème en potentiel acoustique

La méthode des PML a été initialement introduite par Bérenger [3] pour la résolution de problèmes transitoires en électromagnétisme. Elle consiste à résoudre le problème dans une portion de conduit $x_- < x_1 < x_+$, contenant la source, en lui accolant de part et d'autre des couches absorbantes, construites de telle sorte qu'aucune réflexion n'est produite à l'entrée dans les couches. Le nouveau

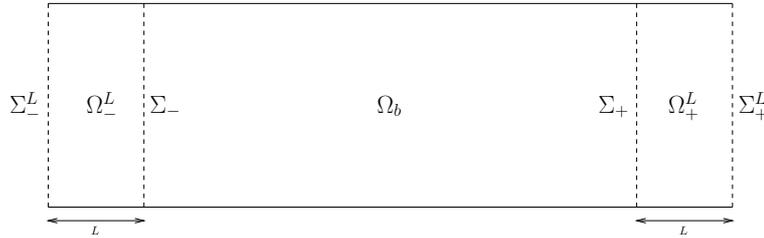


Figure 1: Le domaine de calcul Ω^L .

problème est obtenu en remplaçant dans l'équation (6) l'opérateur ∂_{x_1} par $\alpha(x_1)\partial_{x_1} + i\lambda(x_1)$, les fonction α et λ étant définies par

$$\alpha(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_- \leq x_1 \leq x_+ \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lambda(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_- \leq x_1 \leq x_+ \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

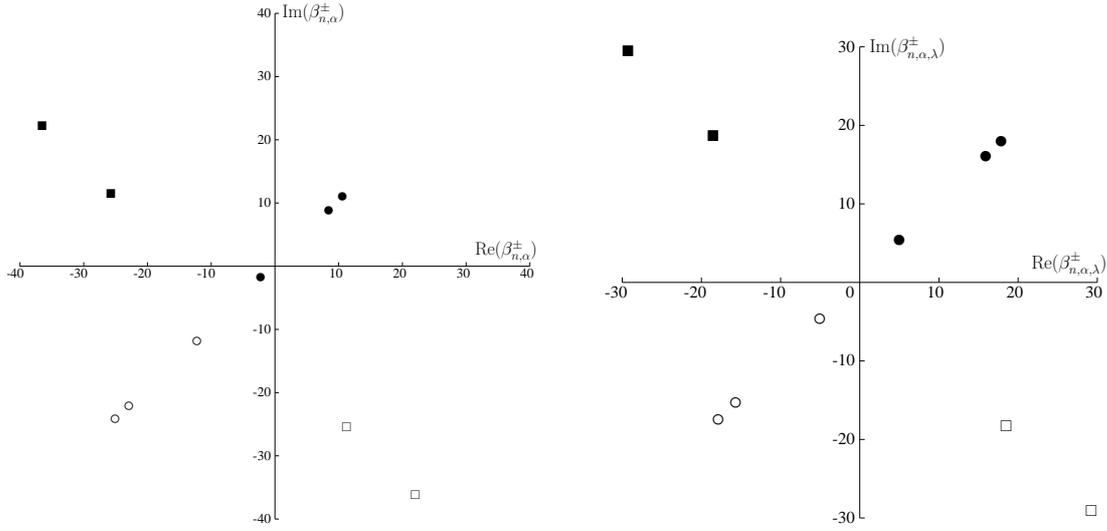


Figure 2: $\beta_{n,\alpha,\lambda}$ pour le modèle classique à gauche et pour le nouveau modèle à droite. Cas d'existence d'un mode amont inverse ($\alpha = 0.2(1 - i)$, $k = 6$ et $M = 0.4$).

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Im}(\alpha) < 0. \quad (9)$$

Plus précisément, si on note L la largeur des couches absorbantes, Ω^L le domaine de calcul et Σ_{\pm}^L les frontières extérieures (voir figure 1), le problème satisfait par le potentiel acoustique approché noté φ_a^L devient :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2 \varphi_a^L}{Dt^2} - \Delta_{\alpha,\lambda} \varphi_a^L = g_a \text{ dans } \Omega^L,$$

$$\frac{\partial \varphi_a^L}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L \setminus (\Sigma_-^L \cup \Sigma_+^L) \text{ et } \varphi_a^L = 0 \text{ sur } \Sigma_-^L \cup \Sigma_+^L,$$

où

$$\frac{D_{\alpha,\lambda} \varphi}{Dt} = i(M\lambda(x_1) - k) \varphi + M\alpha(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \text{et} \quad \Delta_{\alpha,\lambda} \varphi = (\alpha(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + i\lambda(x_1))^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

Le modèle de Bérenger correspond au cas particulier où $\lambda = 0$ et $\alpha(x_1) = -i\omega/(-i\omega + \sigma(x_1))$ où $\sigma(x_1)$ est une fonction réelle positive. Dans la suite, le modèle obtenu avec $\lambda = 0$ (resp. $\lambda \neq 0$) sera appelé le modèle PML classique (resp. le nouveau modèle PML).

On vérifie facilement que les modes dans le milieu PML ont l'expression suivante

$$e^{\pm i\beta_{n,\alpha,\lambda} x_1} \varphi_n(x_2) \text{ avec } \beta_{n,\alpha,\lambda}^{\pm} = \frac{\beta_n^{\pm} - \lambda}{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Les couches sont dites ‘‘parfaitement adaptées’’ au sens où un mode sortant génère en pénétrant dans les couches uniquement un mode transmis et aucun mode réfléchi. Soulignons que cette propriété n'est jamais vérifiée par les couches absorbantes reposant sur des modèles physiques. En l'absence d'écoulement ($M = 0$), le modèle PML classique transforme tous les modes sortants en modes évanescents. Ce n'est plus vrai en présence d'un écoulement : en particulier, les modes amont inverses deviennent instables dans la couche située à l'aval. C'est pourquoi nous avons introduit le nouveau modèle. En effet, le choix

$$\lambda = -\frac{kM}{1 - M^2},$$

assure la décroissance de tous les modes sortants (voir figure 2 où les cercles et les carrés sont respectivement associés aux modes propagatifs et évanescents, les symboles pleins et vides indiquant quant à eux le caractère aval (+) ou amont (-) du mode).

En fait, une analyse approfondie (voir [1]) nous a permis de démontrer que, pour les deux modèles, la solution calculée φ_a^L converge exponentiellement vers la solution exacte φ_a lorsque $L/|\alpha|$ tend vers $+\infty$. Ceci est surprenant car, pour les problèmes transitoires, le modèle PML classique est instable en présence de modes amont inverses [7] (voir [2] pour une analyse générale de ce phénomène).

3.2 Couches absorbantes pour l'équation de Galbrun

Notre but est à présent de calculer une approximation \mathbf{u}^L de la solution \mathbf{u} de l'équation de Galbrun obtenue par absorption limite. Les notations sont celles du paragraphe précédent.

La construction du problème approché se fait en trois étapes. On écrit tout d'abord une formulation du problème avec des couches absorbantes parfaitement adaptées de longueur infinie. Celle-ci est ensuite régularisée et les couches sont enfin tronquées.

Soit $\psi_{\alpha,\lambda}$ est l'unique solution d'énergie finie (et nulle en amont de la source) de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \psi_{\alpha,\lambda} = \text{rot } \mathbf{f} \text{ dans } \Omega. \quad (11)$$

On peut montrer que :

$$\psi_{\alpha,\lambda} = \text{rot } \mathbf{u} \text{ dans } \Omega_b.$$

On définit alors \mathbf{u}^L comme la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{u}^L - \nabla_{\alpha,\lambda}(\text{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L) + \text{rot}_{\alpha,\lambda}(\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L - \psi_{\alpha,\lambda}) &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega^L, \\ \mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L, \\ \text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L &= \psi_{\alpha,\lambda} \text{ sur } \partial\Omega^L. \end{aligned} \quad (12)$$

Nous avons montré que ce problème relève de l'alternative de Fredholm et admet une solution unique pour $L/|\alpha|$ assez grand. De plus, cette solution \mathbf{u}^L tend bien vers la solution recherchée \mathbf{u} . Là encore, on peut montrer que l'erreur tend exponentiellement vers 0 quand $L/|\alpha|$ tend vers $+\infty$.

L'ajout du terme $\text{rot}_{\alpha,\lambda}(\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L - \psi_{\alpha,\lambda})$ à l'équation constitue ce que nous appelons le procédé de régularisation. Sans ce terme (qui tend pourtant exponentiellement vers 0 quand $L/|\alpha|$ tend vers $+\infty$), la méthode est instable et les résultats inexploitable.

Notons enfin que le terme $\text{rot}_{\alpha,\lambda} \psi_{\alpha,\lambda}$ est en fait un terme source pour l'équation en \mathbf{u}^L : son support s'étend jusqu'au bout du domaine en aval de la source mais son module décroît exponentiellement dans la couche absorbante.

4 Résultats numériques

Les résultats numérique ont été obtenus à l'aide du code MELINA, développé par Daniel Martin [6].

4.1 Propagation de modes

Pour valider la méthode, nous considérons tout d'abord la propagation de modes acoustiques ou hydrodynamiques. Ceux-ci sont imposés sur la frontière Σ_- par une condition de Dirichlet non homogène portant sur le déplacement normal au bord du domaine.

Les cas testés correspondent à un nombre d'onde valant $k = 8$ et le nombre de Mach $M = 0,4$. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution analytique \mathbf{u}_{ex} sur le domaine physique Ω_b . Le maillage utilisé est non structuré et les éléments finis sont des éléments de Lagrange P_2 . La longueur de la couche correspond à 10% de la longueur du domaine Ω_b .

Concernant les modes acoustiques, trois d'entre eux sont propagatifs pour cette configuration. Pour l'étude de la méthode sur les modes rotationnels, nous les choisissons de la forme :

$$\begin{pmatrix} iM/k p'(x_2) \\ p(x_2) \end{pmatrix} e^{i \frac{k}{M} x_1}$$

avec $p(x_2) = \sin\left(\frac{m\pi x_2}{h}\right)$, où m désigne un entier naturel non nul.

Les courbes représentant l'erreur relative en norme $H^1(\Omega_b)$ pour le déplacement calculé en fonction du module du coefficient complexe α (la valeur de l'argument de α est fixée à $-\frac{\pi}{4}$) sont tracées pour chacun des modes sur la figure 3. Les figures 4 et 5 présentent quant à elles les lignes de niveau des

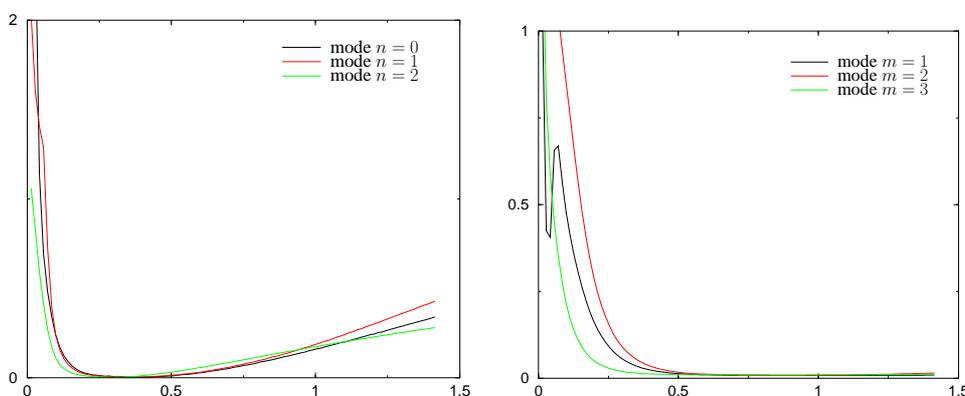


Figure 3: Erreur relative en fonction de $|\alpha|$ pour les modes acoustiques à gauche et hydrodynamiques à droite, $k = 8$ et $M = 0,4$.

composantes de la partie réelle du déplacement calculé pour une valeur de α correspondant à une erreur inférieure à 1%.

Nous constatons sur les courbes de la figure 3 la convergence de la méthode pour une plage de valeurs intermédiaires de $|\alpha|$. L'erreur augmente brutalement pour les faibles valeurs de $|\alpha|$, le maillage n'étant alors plus capable de représenter le comportement très rapidement décroissant et oscillant du mode dans la couche. Cet effet est plus fort pour les modes hydrodynamiques que pour les modes acoustiques. Pour les modes acoustiques, on observe également une dégradation du résultat pour les grandes valeurs de $|\alpha|$. L'erreur est cette fois due aux réflexions en bout de couche. On pourrait également l'observer pour les modes hydrodynamiques à condition de considérer de plus grandes valeurs de $|\alpha|$.

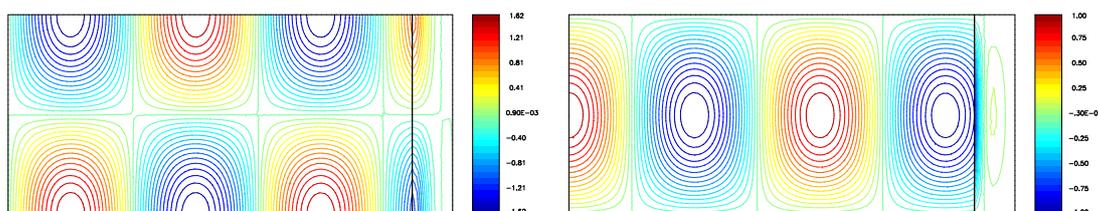


Figure 4: Isolignes des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour le mode acoustique d'indice $n = 1$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,25(1 - i)$.

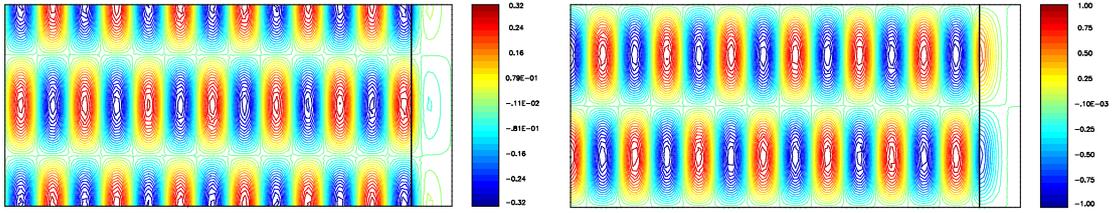


Figure 5: Isolignes des composantes de la partie réelle du champ de déplacement u calculé pour le mode hydrodynamique $m = 2$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,65(1 - i)$.

Ces résultats illustrent une des difficultés auxquelles nous nous trouvons confrontés lors de la mise en œuvre pratique de la méthode en présence de perturbations acoustiques et hydrodynamiques. En effet, les valeurs du module de α permettant un bon accord entre les solutions calculée et exacte sont relativement différentes selon que le mode considéré est acoustique ou hydrodynamique .

Une première manière de traiter le cas en question de manière simple et assez satisfaisante est d'utiliser des couches de taille beaucoup plus importante qu'il n'est d'usage, par exemple, pour les applications transitoires. La largeur de la plage des valeurs de $|\alpha|$ pour lesquelles l'erreur est admissible est ainsi augmentée.

4.2 Rayonnement d'une source

Nous présentons les premiers résultats de simulation avec une source. Celle-ci est placée au centre du domaine. La figure 6 correspond au cas d'une source irrotationnelle et la figure 7 au cas d'une source rotationnelle. Dans ce second cas, on observe le sillage hydrodynamique produit par la source.

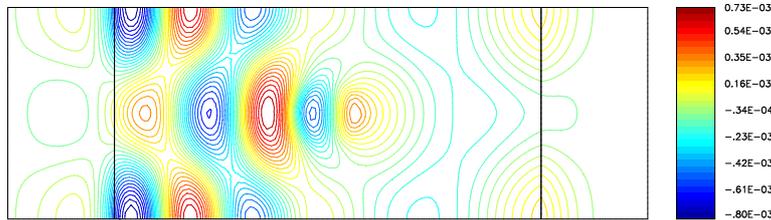


Figure 6: Isolignes de la partie réelle de la composante u_1 du champ de déplacement (rayonnement d'une source irrotationnelle, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,5(1 - i)$).

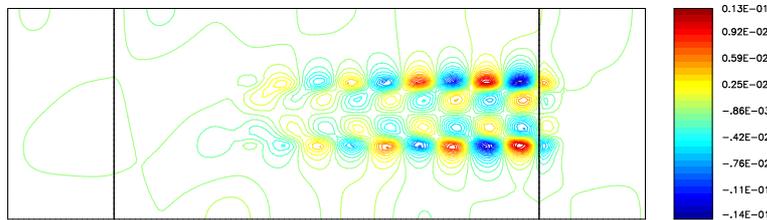


Figure 7: Isolignes de la partie réelle de la composante u_1 du champ de déplacement (rayonnement d'une source tourbillonnaire, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,5(1 - i)$).

References

- [1] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA AND G. LEGENDRE, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*, to appear in SINUM.
- [2] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, AND P. JOLY, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, J. Comput. Phys., 188 (2003), pp. 399–433.
- [3] J.-P. BÉRENGER, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 185–200.
- [4] A.-S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE, AND E. LUNÉVILLE, *Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib Méc., 329 (2001), pp. 601–606.
- [5] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. DAHI, E. LUNÉVILLE, AND V. PAGNEUX, *Acoustic diffraction by a plate in a uniform flow*, Math. Models Methods Appl. Sci., 12 (2002), pp. 625–647.
- [6] D. MARTIN, *On line documentation of MÉLINA*, <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>.
- [7] C. K. W. TAM, L. AURIAULT, AND F. CAMBULI, *Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains*, J. Comput. Phys., 144 (1998), pp. 213–234.