

MELINA

Modules Couplag & Calgre

Calcul des termes de Couplage

D.MARTIN

Équipe d'Analyse Numérique,
I.R.M.A.R., Université de RENNES I
UMR 6625 du C.N.R.S.

&

Groupe Simulation et Modélisation des Phénomènes de Propagation (S.M.P)
E.N.S.T.A., PARIS
URA 853 du C.N.R.S

La méthode de couplage est une particularité importante du code [MÉLINA](#) pour la résolution de problèmes extérieurs. Nous rappelons tout d'abord son principe afin d'en fixer les notations et d'exhiber les calculs nécessaires pour discrétiser les termes (dits de couplage).

1. La méthode de couplage 'éléments finis–représentation intégrale'

Nous indiquons tout d'abord le principe de la construction de la formulation variationnelle issue de la méthode de couplage 'éléments finis–représentation intégrale' pour le problème de Helmholtz en dimension 2 ou 3.

1.1. Le problème modèle

Étant donné un domaine $\check{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ complémentaire d'un compact K de frontière C et une fonction g (par exemple de $L^2(C)$), il s'agit de trouver une fonction $\check{\varphi} \in H_{loc}^1(\check{\Omega})$ solution du problème de Neumann extérieur :

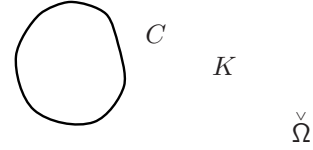


Figure 1.

$$(P_N) \quad \begin{cases} \Delta \check{\varphi} + k^2 \check{\varphi} = 0 & \text{dans } \check{\Omega} \\ \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial n} = g & \text{sur } C \\ \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial r} - ik \check{\varphi} \in L^2(\check{\Omega}) & \text{(condition de rayonnement)} \end{cases}$$

où k représente le nombre d'onde, n la normale unitaire extérieure à $\check{\Omega}$ et r la distance à l'origine. Nous rappelons ci-dessous l'établissement de la formulation variationnelle de ce problème qui nous est nécessaire pour comprendre la mise en œuvre informatique qui conduit à sa résolution.

1.2. La représentation intégrale

On note G la fonction de Green ou solution élémentaire de l'opérateur de Helmholtz définie de $\{(M, P) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; M \neq P\}$ dans \mathbb{C} :

$$G(M, P) = \begin{cases} \frac{1}{2i} H_1^{(0)}(kR) & \text{pour } d = 2 \\ -\frac{e^{ikR}}{4\pi R} & \text{pour } d = 3 \end{cases} \quad \text{avec } R = \|\overrightarrow{MP}\|$$

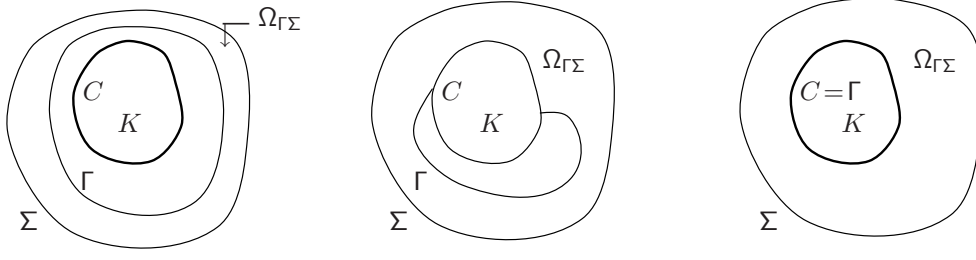
où $H_1^{(0)}$ est la fonction de Hankel de première espèce.

Pour toute frontière Γ extérieure à C on définit les potentiels de simple et double couche en un point M non situé sur Γ :

$$S_\Gamma(\phi)(M) = \int_\Gamma \phi(P) G(M, P) d\sigma_P \quad \text{et} \quad D_\Gamma(\phi)(M) = \int_\Gamma \phi(P) \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) d\sigma_P$$

On sait alors que la solution $\check{\varphi}$ de (P_N) admet, pour tout $M \in \check{\Omega}$, la représentation intégrale

$$(R.I.) \quad \check{\varphi}(M) = D_\Gamma(\check{\varphi})(M) - S_\Gamma\left(\frac{\partial \check{\varphi}}{\partial n}\right)(M)$$

Figure 2. Différents choix des frontières Γ et Σ

1.3. Problème posé en domaine borné

On considère une frontière Σ entièrement contenue dans le domaine $\check{\Omega}$ et entourant C et par ailleurs **arbitraire** et on note Ω le domaine limité par C et Σ . On considère une seconde frontière arbitraire Γ incluse dans $\check{\Omega}$ et d'intersection vide avec Σ , les points de Γ pouvant coïncider avec tout ou partie des points de C (figure 2) et on note $\Omega_{\Gamma\Sigma}$ l'ouvert de Ω compris entre Γ et Σ .

On considère les formes sesquilinéaires définies sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$, par

$$\begin{aligned} a(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} \, d\omega - k^2 \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} \, d\omega \\ a_{\Gamma\Sigma}(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega_{\Gamma\Sigma}} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} \, d\omega - k^2 \int_{\Omega_{\Gamma\Sigma}} \varphi \bar{\psi} \, d\omega \\ b_{\Sigma}(\varphi, \psi) &= \int_{\Sigma} \varphi \bar{\psi} \, d\sigma \end{aligned}$$

1.3.1. Formulation variationnelle : Couplage 'Fourier'

Étant donné un nombre complexe λ de partie imaginaire non nulle, on construit une condition aux limites de type Fourier sur Σ à l'aide de la représentation intégrale (R.I.) ; on démontre alors que le problème (\check{P}_N) est équivalent au problème posé sur le domaine borné Ω suivant :

$$(P_N)_f \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = g & \text{sur } C \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \lambda \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda \right) \left(D_{\Gamma}(\varphi) - S_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_{\Gamma}} \right) \right) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

dans le sens où $\varphi = \check{\varphi}|_{\Omega}$ et $\check{\varphi} = D_{\Gamma}(\varphi) - S_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_{\Gamma}} \right)$ dans $\check{\Omega}$.

La formulation variationnelle de $(P_N)_f$ s'obtient de manière classique et s'écrit :

$$(F.V_N)_f \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ a(\varphi, \psi) + \lambda b_{\Sigma}(\varphi, \psi) - b_{\Sigma} \left(\left(\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}} + \lambda \right) D_{\Gamma}(\varphi), \psi \right) \\ \quad + b_{\Sigma} \left(\left(\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}} + \lambda \right) S_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_{\Gamma}} \right), \psi \right) = \int_C g \bar{\psi} \, d\sigma \end{cases}$$

Dans $(F.V_N)_f$ le second terme de couplage contient l'inconnue $\partial \varphi / \partial n_{\Gamma}$, on peut modifier ce terme pour revenir à la seule inconnue φ : φ solution de $(P_N)_f$ vérifie

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \eta \, d\sigma = a_{\Gamma\Sigma}(\varphi, \bar{\eta}) \quad \forall \eta \in H^1(\Omega_{\Gamma\Sigma}) \text{ tel que } \eta|_{\Sigma} = 0;$$

on considère un opérateur de relèvement \mathcal{R}_{Γ} de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega_{\Gamma\Sigma})$ tel que :

$$\mathcal{R}_{\Gamma} f|_{\Gamma} = f \text{ et } \mathcal{R}_{\Gamma} f|_{\Sigma} = 0 \quad \forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On a ainsi

$$S_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) (M) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (P) G(M, P) \, d\sigma_P = a_{\Gamma\Sigma} \left(\varphi, \mathcal{R}_{\Gamma} G(M, \cdot) \right)$$

où '.' représente la variable sur laquelle porte le relèvement.

On obtient ainsi la nouvelle formulation qui ne contient plus que l'inconnue φ baptisée *Formulation Variationnelle de couplage avec Relèvement de frontière Intermédiaire* du problème de Neumann :

$$(F.R.I_N)_f \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ a(\varphi, \psi) + \lambda b_\Sigma(\varphi, \psi) - b_\Sigma\left(\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda\right) D_\Gamma(\varphi), \psi\right) \\ + b_\Sigma\left(a_{\Gamma\Sigma}\left(\varphi, \mathcal{R}_\Gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda\right) G(M, \cdot)\right]\right), \psi(M)\right) = \int_C g \bar{\psi} d\sigma \end{cases}$$

Remarque 1

Lorsque l'on choisit $\Gamma = C$, la donnée de Neumann sur C permet de reporter le deuxième terme de couplage de $(F.V_N)_f$ au second membre, on obtient alors la

Formulation Variationnelle de couplage Standard du problème de Neumann :

$$(F.S_N)_f \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ a(\varphi, \psi) + \lambda b_\Sigma(\varphi, \psi) - b_\Sigma\left(\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda\right) D_C(\varphi), \psi\right) \\ = \int_C g \bar{\psi} d\sigma - b_\Sigma\left(\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda\right) S_C(g), \psi\right) \end{cases}$$



On démontre que les formulations $(F.V_N)_f$, $(F.R.I_N)_f$ et $(F.S_N)_f$ du problème de Neuman sont équivalentes au problème extérieur $(\check{P}_N)_f$ si seulement si $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Remarque 2

Dans le cas où la condition de Neumann sur C est remplacée par une condition de Dirichlet ($\varphi = g$ sur C), la formulation $(F.R.I)_f$ devient la formulation naturelle même dans le cas où Γ et C coïncident :

Formulation Variationnelle de couplage avec Relèvement de frontière Intermédiaire du problème de Dirichlet :

$$(F.R.I_D)_f \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ et } \varphi|_C = g, \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\Omega) \text{ et } \psi|_C = 0 \\ a(\varphi, \psi) + \lambda b_\Sigma(\varphi, \psi) - b_\Sigma\left(\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda\right) D_\Gamma(\varphi), \psi\right) \\ - b_\Sigma\left(a_{\Gamma\Sigma}\left(\varphi, \mathcal{R}_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial n_{M\Sigma}} + \lambda\right) G(M, \cdot)\right), \psi(M)\right) = 0 \end{cases}$$

1.3.2. Formulation variationnelle : Couplage 'Dirichlet'

On peut, au lieu de construire une condition aux limites sur Σ de type Fourier, utiliser directement la formule de représentation intégrale $(R.I.)$ pour construire une condition aux limites de type 'Dirichlet' :

$$(P_N)_d \quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi \text{ dans } \Omega, \text{ tel que} \\ \Delta\varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = g \quad \text{sur } C \\ \varphi = D_\Gamma(\varphi) - S_\Gamma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_\Gamma}\right) \quad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

La formulation variationnelle s'obtient de manière analogue à celle de la formulation avec relèvement de frontière intermédiaire :

On considère un opérateur de relèvement \mathcal{R}_Σ de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dans $H^1(\Omega_{\Sigma\Gamma})$ tel que :

$$\mathcal{R}_\Sigma f|_\Sigma = f \text{ et } \mathcal{R}_\Sigma f|_\Gamma = 0 \quad \forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

Dans le cas où les frontières C et Γ coïncident on obtient la

Formulation Variationnelle de Relèvement Dirichlet Standard du problème de Neumann, qui s'obtient de la même façon que $(F.R.I_N)_f$ et s'écrit :

$$(F.R.S_N)_d \quad \begin{cases} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega), \phi|_\Sigma = 0, \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\Omega), \psi|_\Sigma = 0 \\ a(\phi, \psi) - a_{C\Sigma}\left(\mathcal{R}_\Sigma D_C(\phi), \psi\right) = \int_C g \bar{\psi} d\omega + a_{C\Sigma}\left(\mathcal{R}_\Sigma S_C(g), \psi\right) \\ \varphi = \phi + \mathcal{R}_\Sigma(D_C(\phi) - S_C(g)) \end{cases}$$



Il est connu que cette dernière formulation de la méthode de couplage pour le problème extérieur de Helmholtz conduit à un problème mal posé pour une suite de valeurs de k , valeurs propres du problème de Dirichlet pour l'équation de Helmholtz posé sur le domaine borné $K \cup \Omega$ intérieur à Σ ; c'est le phénomène des **fréquences irrégulières**.

Exercice : Formulation $(F.R.I.R_N)_d$

On peut aussi utiliser la formulation avec relèvement de frontière intermédiaire dans le cas d'un couplage Dirichlet, pour le problème de Neumann ! On utilise alors simultanément les 2 opérateurs de relèvement \mathcal{R}_Γ et \mathcal{R}_Σ en introduisant une troisième frontière Γ' telle les domaines de relèvement $\Omega_{\Gamma'}$ et $\Omega_{\Sigma'}$ des opérateurs aient une intersection vide.

1.4. Les termes de couplage

1.4.1. Cas d'une frontière de couplage régulière : calcul dit global sur Σ

On suppose, dans ce paragraphe, les frontières Γ et Σ régulières (par exemple de classe \mathcal{C}^1), de façon à ce que le vecteur normal soit défini en tout point, ou bien qu'il est possible de les partitionner en sous-ensemble réguliers $\Gamma = \cup_{p=1,2,\dots} \Gamma_p$ et $\Sigma = \cup_{q=1,2,\dots} \Sigma_q$, d'opérer pour chaque couple (Γ_p, Σ_q) , et d'assembler tous les morceaux de termes de couplage obtenus.

Plus précisément on suppose qu'en tout nœud des faces ou arêtes constituant les (approximations des) frontières Γ et Σ (ou Γ_p et Σ_q), le vecteur normal extérieur unitaire est défini de manière "unique". Le calcul de ce vecteur est défini comme assemblage des normales.

De plus on suppose que les valeurs nodales de $G(M, P)$ et de ses dérivées sont définies pour tout couple de nœuds $M_L \in \Sigma$, $P_K \in \Gamma$ (un contre-exemple existe pour le problème de Neumann-Kelvin en hydrodynamique navale dans le cas d'un corps perçant la surface libre).

On pose

$$\mathcal{D}^\lambda G(M, P) = \left(\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma_M}} + \lambda \right) \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma_P}} (M, P) \quad , \quad \mathcal{D}^\infty G(M, P) = \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma_P}} (M, P) \quad (1.1)$$

$$\mathcal{S}^\lambda G(M, P) = \left(\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma_M}} + \lambda \right) G(M, P) \quad , \quad \mathcal{S}^\infty G(M, P) = G(M, P) \quad (1.2)$$

de sorte que le cas du couplage 'Neumann' correspond à $\lambda = 0$ et le cas du couplage 'Dirichlet' à $\lambda = \infty$. Les termes de couplage de $(F.V.R_I)_f$ deviennent

$$b_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda \right) D_\Gamma(\varphi), \psi \right) = \int_\Sigma \overline{\psi}(M) \int_\Gamma \varphi(P) \mathcal{D}^\lambda G(M, P) d\sigma_P d\sigma_M \quad (1.3)$$

$$b_\Sigma \left(a_{\Gamma_\Sigma} \left(\varphi, \mathcal{R}_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda \right) G \right), \psi \right) = \int_\Sigma \overline{\psi}(M) a_{\Gamma_\Sigma} \left(\varphi(\cdot), \mathcal{R}_\Gamma \mathcal{S}^\lambda G(M, \cdot) \right) d\sigma_M \quad (1.4_I)$$

où ' \cdot ' représente la variable d'intégration sur le domaine de relèvement Ω_{Γ_Σ} dans les intégrales constituant la forme bilinéaire $a_{\Gamma_\Sigma}(\cdot, \cdot)$. De même le terme de couplage de second membre de $(F.S_N)_f$ s'écrit

$$b_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial n_\Sigma} + \lambda \right) S_C(g), \psi \right) = \int_\Sigma \psi(M) \int_C g(P) \mathcal{S}^\lambda G(M, P) d\sigma_P d\sigma_M \quad (1.4_S)$$

1.4.2. Discrétisation et notations

Soit $\{w_I\}_{I=1, N_h}$ la base éléments finis de l'espace d'approximation de $H^1(\Omega)$; la solution du problème approché du problème $(P_f)_N$ sera de la forme

$$\varphi_h = \sum_{J=1, N_h} \varphi_J w_J.$$

On note

RIGID la matrice assemblée correspondant à la discrétisation du terme $\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \overline{\psi} d\omega$, c'est-à-dire que son coefficient courant est défini par : $\text{RIGID}_{I,J} \approx \int_\Omega \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\omega$;

de même $\text{MASSE}_{I,J} \approx \int_\Omega w_I w_J d\omega$, $\text{GDELTA}_{I,J} \approx \int_\Sigma w_I w_J d\sigma$, $\text{PDELTA}_{I,J} \approx \int_\Gamma w_I w_J d\sigma$

et $\text{RDELTA}_{I,J} \approx a_{\Gamma_\Sigma}(w_I, w_J) = \int_{\Omega_{\Gamma_\Sigma}} \nabla w_I \cdot \nabla w_J - k^2 w_I w_J d\omega$

On construit l'interpolé de $\mathcal{D}^\lambda G$ en posant

$$\mathcal{D}^\lambda G_h(M, P) = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \mathcal{D}^\lambda G_h(M_L, P_K) w_L(M) w_K(P)$$

(et de même pour $\mathcal{S}^\lambda G$) où la notation ' $K \in \Gamma'$ ' (resp. ' $L \in \Sigma'$ ') représente l'ensemble des degrés de liberté sur Σ (resp. Γ).

Premier terme de couplage Fourier

Le coefficient courant $b_{I,J}^{(1)}$ (' $I \in \Sigma'$ ', ' $J \in \Gamma'$ ') de la matrice issue de la discrétisation du 1^{er} terme de couplage (1.3) de $(F.R.I_N)_f$ ou $(F.S_N)_f$ s'écrira alors :

$$b_{I,J}^{(1)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \mathcal{D}^\lambda G_h(M_L, P_K) \int_{\Sigma} w_I w_L d\sigma \int_{\Gamma} w_K w_J d\sigma$$

soit encore sous forme matricielle

$$b_{I,J}^{(1)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \text{GDELTA}_{I,L} \times \mathcal{D}^\lambda G_h(M_L, P_K) \times \text{PDELTA}_{K,J} \quad (1.3)$$

Deuxième terme de couplage Fourier

Le second terme de couplage $b_{I,J}^{(2)}$ (' $I \in \Sigma'$ ', ' $J \in \Omega_{\Gamma'}$ ') (1.4_I) de $(F.R.I_N)_f$ s'écrit de manière analogue :

$$b_{I,J}^{(2)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \mathcal{S}^\lambda G_h(M_L, P_K) \int_{\Sigma} w_I w_L d\sigma \times a_{\Gamma\Sigma}(w_K, w_J)$$

soit encore

$$b_{I,J}^{(2)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \text{GDELTA}_{I,L} \times \mathcal{S}^\lambda G_h(M_L, P_K) \times \text{RDELTA}_{K,J} \quad (1.4_I)$$

Terme de couplage Fourier de second membre

De manière analogue le vecteur de couplage du second membre (1.4_S) de $(F.S_N)_f$ s'écrit pour ' $I \in \Sigma'$ ' :

$$b_I^{(2)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \mathcal{S}^\lambda G_h(M_L, P_K) \int_{\Sigma} w_I w_L d\sigma \int_{\Gamma} w_K g d\sigma$$

soit sous forme d'un produit matrices×vecteur

$$b_I^{(2)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \text{GDELTA}_{I,L} \times \mathcal{S}^\lambda G_h(M_L, P_K) \times \text{VECTG}_K \quad (1.4_S)$$

où VECTG_K peut être calculé par intégration numérique de $\int_{\Gamma} w_K g d\sigma$ ou en interpolant la fonction g :

$$\text{VECTG}_K = \sum_{J \in \Sigma'} \text{PDELTA}_{K,J} \times g(P_J) \quad (1.5_S)$$

Termes de couplage Dirichlet

Les termes de couplage s'obtiennent de la même façon que précédemment, on obtient par exemple : pour ' $I \in \Omega'_{C\Sigma}$ ', ' $J \in \Gamma'$ '

$$b_{I,J}^{(1)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{L \in \Sigma'} \text{RDELTA}_{I,L} \times \mathcal{D}^\infty G_h(M_L, P_K) \times \text{PDELTA}_{K,J} \quad (1.6)$$

où cette fois la matrice RDELTA correspond à $a_{C\Sigma}(\varphi, \psi)$.

1.4.3. Cas d'un calcul dit local sur Σ

Dans le cas où l'on n'assemble pas les vecteurs normaux sur Σ , l'opération matricielle (1.3) est alors effectuée sur Σ élément par élément comme

$$\bar{b}_{i,J}^{(1)} = \sum_{K \in \Gamma'} \sum_{T' \in \Sigma} \sum_{\ell \in T'} \text{Gdelta}_{i,\ell}^{T'} \times \mathcal{D}_{T'}^\lambda G_h(M_\ell, P_K) \times \text{PDELTA}_{K,J} \quad (1.3)$$

où

- $T' \in \Sigma$ désigne une face (ou arête) d'un élément sur la frontière Σ ,
- i et $\ell \in T'$ sont des nœuds de T' ,
- $\mathcal{D}_{T'}^\lambda G_h(M_\ell, P_K)$ est calculée à l'aide du vecteur normal unitaire extérieur sur T' et
- $\text{Gdelta}_{i,\ell}^{T'} = \int_{T'} w_i w_\ell d\sigma$ désigne la matrice élémentaire contribution de la face T' à la matrice assemblée $\text{GDELTA}_{I,L}$.

Le coefficient $b_{I,J}^{(1)}$ est alors obtenu par assemblage des coefficients $\bar{b}_{i,J}^{(1)}$ pour tous les nœuds locaux i correspondant au nœud global I .

2. Calcul des noyaux de Green discrets

Il s'agit du calcul des coefficients des matrices

$$\left(\mathcal{S}^\lambda G_h(M_\ell, P_k) \right)_{\ell \in \Sigma, k \in \Gamma} \quad \text{et} \quad \left(\mathcal{D}^\lambda G_h(M_\ell, P_k) \right)_{\ell \in \Sigma, k \in \Gamma}$$

(avec la notation $\lambda = \infty$ dans le cas du couplage Dirichlet) notées respectivement NoyauS et NoyauD (cf. (1.3), (1.4)).

Ces matrices sont pleines, et dans notre exemple (Helmholtz) à coefficients complexes. Elles sont stockées sous forme de tableaux (et non de termes), qui pourront le cas échéant être découpés en morceaux⁽¹⁾. Étant donné qu'il est intéressant en général (du point de vue du temps de calcul et de la programmation) de calculer la fonction de Green et ses dérivées simultanément, la procédure de calcul de ces noyaux de Green fournit les 2 matrices.

Comme on le voit dans leurs définitions (1.1), (1.2) ces calculs nécessitent les coordonnées des nœuds et les normales sur les 2 domaines couplés Γ (ou C) et Σ (cas Fourier), ou seulement les coordonnées des nœuds sur Γ (ou C) et Σ et les normales sur Γ ou C (cas Dirichlet). C'est la raison majeure de l'existence de la sous-directive **NORMALES ASSEMBLEES** de la directive **CALCUL SUR LES DOMAINES**.

Les valeurs de la fonction de Green G , de ses dérivées $\partial_P^i G$, $\partial_M^j G$, et $\partial_P^i \partial_M^j G$ dans le cas Fourier, pour $(M, P) \in \Sigma \times \Gamma$, sont fournies par une procédure 'utilisateur' de nom **GREEN** (voir ses arguments plus loin).

Le calcul des valeurs nodales des noyaux de Green est effectué par appel de la procédure

- **SUBROUTINE CALNOY** (SIGMA, GAMMA, NBMORG, TYPCOU, NBCSGR, TBCSGR, LAMBDA, NOYOUS, NVNOYS, NOYAUD, NVNOYD)

Les arguments de la procédure sont :

- SIGMA** nom du domaine de bord portant la condition de couplage ;
- GAMMA** nom de la frontière où est calculée la représentation intégrale de la solution servant à définir la condition aux limites sur la frontière de couplage ;
- NBMORG** nombre de morceaux du découpage des matrices contenant les noyaux de Green (lorsque la mémoire centrale est saturée). On a vu que les matrices peuvent être grosses. Seul le cas NBMORG=1 a véritablement été testé, on conseille de s'y tenir !
- TYPCOU** (chaîne de) caractère(s) désignant le type de couplage
- 'FOURIER' comme on l'a vu ci-dessus ;
 - 'NEUMANN' i.e. avec $\lambda = 0$; on évite certains calculs de dérivées, mais dans certains problèmes ce choix conduit à un problème mal posé : phénomène des fréquences irrégulières pour le problème de Helmholtz extérieur ou le problème de tenue à la mer par exemple ;
 - 'DIRICHLET' dans lequel la représentation (*R.I.*) est utilisée directement pour construire la condition aux limites de type Dirichlet sur Σ . Ce type de couplage ne nécessite pas le calcul des dérivées secondes, mais dans certains problèmes ce choix conduit à un problème mal posé : phénomène des fréquences irrégulières pour Helmholtz ou la tenue à la mer par exemple. Ce type de couplage est utilisé notamment pour le problème de Neumann–Kelvin (calcul de la résistance de vagues).
- NBCSGR** nombre de constantes intervenant dans le calcul de la fonction de Green ;
- TBCSGR** la chaîne de caractères ou le tableau de type chaîne contenant le(s) nom(s) de la (des) constante(s) intervenant dans le calcul de la fonction de Green (par exemple k dans le problème de Helmholtz) ; le remplissage de l'éventuel tableau est à la discrétion du développeur de l'application ;
- LAMBDA** chaîne de caractères contenant le nom de la constante de couplage λ dans le cas du couplage de type FOURIER ;
- NOYOUS** (chaîne de caractères contenant le) nom du tableau (ou des tableaux si NBMORG>1) contenant les noyaux de simple couche $\mathcal{S}^\lambda G_h$;
- NVNOYS** son niveau, ou plutôt le niveau du premier tableau si NBMORG>1, les autres ayant un niveau égal à NVNOYS+1, NVNOYS+2, etc.
- NOYAUD** (chaîne de caractères contenant le) nom du tableau (ou des tableaux si NBMORG>1) contenant les noyaux de double couche $\mathcal{D}^\lambda G_h$;
- NVNOYD** son niveau, ou plutôt le niveau du premier tableau si NBMORG>1, les autres ayant un niveau égal à NVNOYD+1, NVNOYD+2, etc.

(1) On pourra procéder autrement que par découpe de tableaux. Si le maillage le permet, il est en effet plus simple de découper la frontière Σ , puis d'assembler les termes de couplage sur chaque morceau de Σ .



Le lecteur aura remarqué qu'il n'existe pas d'arguments NIVIMP pour cette procédure ; qu'il soit rassuré, le niveau d'impression des calculs de cette procédure est le maximum des niveaux d'impressions affectés par directive aux domaines Γ et Σ !

Exemple Calcul des noyaux de Green pour le problème de Helmholtz

```
CALL CALNOY ('Sigma', 'Gamma', 1, 'FOURIER', 1, 'k', 'LAMBDA'  
&           , 'NoyauS', 1, 'NoyauD', 1)
```

On suppose ici que la constante λ porte dans le code le nom de donnée 'LAMBDA' et qu'elle a été déclarée préalablement.

3. Calcul de termes de relèvement

3.1. Cas d'un relèvement de frontière intermédiaire

RELFR module couplag

Dans la formulation variationnelle de relèvement de frontière intermédiaire $(F.R.I_N)_f$, il est nécessaire de calculer un terme issu de la formule de Green pour le calcul du terme de couplage de simple couche (exprimé en fonction de $\partial\varphi/\partial n_\Gamma$). Ce terme s'exprime à partir de la forme bilinéaire associée à l'opérateur (de Helmholtz dans les exemples) sur une partie $\Omega_{\Gamma\Sigma}$ (dite domaine de relèvement) du domaine Ω . La matrice, notée RDELTA, qui lui est associée après discrétisation est extraite de la matrice correspondant à la forme bilinéaire : il suffit pour l'obtenir de n'en conserver que les lignes correspondant aux degrés de liberté de la *frontière intermédiaire* Γ , et dans ces lignes de ne conserver que les coefficients des colonnes correspondant à des nœuds du domaine de relèvement $\Omega_{\Gamma\Sigma}$. Ce nouveau terme sera encore stocké selon une structure de stockage matriciel qui se déduit de la structure des pointeurs de stockage de la matrice associée à la forme bilinéaire $a(.,.)$, soit schématiquement (on note ici Γ l'ensemble des nœuds de la frontière et $\Gamma \times \Omega_{\Gamma\Sigma}$ la sous-matrice correspondant aux lignes de nœuds de Γ et aux colonnes de $\Omega_{\Gamma\Sigma}$)

$$\begin{pmatrix} \Gamma \times \Gamma & \Gamma \times \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Gamma \times \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Gamma \times \Sigma \\ \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Gamma & \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Sigma \\ \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Gamma & \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} \times \Sigma \\ \Sigma \times \Gamma & \Sigma \times \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Sigma \times \Omega \setminus \Omega_{\Gamma\Sigma} & \Sigma \times \Sigma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Gamma \times \Gamma & \Gamma \times \Omega_{\Gamma\Sigma} \end{pmatrix}$$

C'est l'objet de la procédure

- **SUBROUTINE RELFRI** (NMGROS, NVGROS, FRONTR, NMPETI, NVPETI)

dont les arguments sont

NMGROS nom du tableau contenant le '*gros terme*' (matrice associée à la forme bilinéaire) dont on extrait le terme de relèvement ;
 NVGROS son niveau ;
 FRONTR nom du domaine géométrique définissant la frontière intermédiaire pour laquelle est définie le relèvement \mathcal{R}_Γ . En pratique le domaine de relèvement est constitué des éléments ayant un nœud sur cette frontière.
 NMPETI nom du tableau contenant le '*petit terme*' de relèvement ;
 NVPETI son niveau ;

3.2. Cas d'un terme de relèvement de couplage Dirichlet

RELDIR module couplag

Dans le cas du relèvement Dirichlet $(F.R.S_N)_d$ la matrice du terme relevé s'extrait de la matrice de la forme bilinéaire $a(.,.)$ selon le schéma

$$\begin{pmatrix} \Gamma \times \Gamma & \Gamma \times \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Gamma \times \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Gamma \times \Sigma \\ \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Gamma & \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Sigma \\ \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Gamma & \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Sigma \\ \Sigma \times \Gamma & \Sigma \times \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Sigma \times \Omega \setminus \Omega_{\Sigma\Gamma} & \Sigma \times \Sigma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_{\Sigma\Gamma} \times \Sigma \end{pmatrix}$$

et s'obtient à l'aide de la procédure (ne pas confondre avec la précédente)

- **SUBROUTINE RELDIR** (NMGROS, NVGROS, FRONTR, NMPETI, NVPETI)

dont les arguments sont

NMGROS nom du tableau contenant le '*gros terme*' (matrice associée à la forme bilinéaire) dont on extrait le terme de relèvement ;
 NVGROS son niveau ;
 FRONTR nom du domaine géométrique définissant la frontière de couplage pour laquelle est définie le relèvement \mathcal{R}_Σ .
 NMPETI nom du tableau contenant le '*petit terme*' de relèvement ;
 NVPETI son niveau ;

4. Calcul des termes de couplage

4.1. Termes de couplage calculés à l'aide de la structure de couplage

Ce calcul des termes de couplage peut être soit **local** soit **global** sur la domaine Σ et est effectué en 3 ou 4 étapes. Ce nouveau module de calcul doit être utilisé quand

- i) les calculs sont effectués élément par élément sur la frontière Σ et la matrice Gdelta est un terme élément finis matrice élémentaire ;
- ii) les calculs des valeurs nodales de la fonction de Green sont intégrés au calcul des produits "Gdelta*Noyau" ;
- iii) on souhaite conserver les résultats des produits "Gdelta*Noyau" que la matrice Gdelta soit une matrice assemblée (elle est alors notée GDELTA) ou non ;
- iv) les produits "Gdelta*Noyau" relèvent de procédures particulières propres à la résolution d'une application non prévue dans le cas général, par exemple lorsque les valeurs nodales de la 'fonction de Green' ne sont pas définies ;

mais il s'applique aussi dans les autres cas (voir calcul direct).

Les étapes du calcul sont

- 1) Création de la structure pilotant les calculs
- 2) Le cas échéant calcul des noyaux de Green discrets

$$S^\lambda G_h(M_L, P_K) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^\lambda G_h(M_L, P_K) \quad (4.1)$$

- 3) Calcul des produits "Gdelta*Noyau" (calcul local ou global) :

$$\left. \begin{aligned} GS_{I,K} &= \sum_{\substack{T' \in \Sigma \\ I \in T'}} \sum_{\ell \in T'} \text{Gdelta}_{i,\ell}^{T'} \times S_{T'}^\lambda G_h(M_\ell, P_K) \\ GS_{I,K} &= \sum_{L \in \Sigma'} \text{GDELTA}_{I,L} \times S^\lambda G_h(M_L, P_K) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} GD_{I,K} &= \sum_{\substack{T' \in \Sigma \\ I \in T'}} \sum_{\ell \in T'} \text{Gdelta}_{i,\ell}^{T'} \times \mathcal{D}_{T'}^\lambda G_h(M_\ell, P_K) \\ GD_{I,K} &= \sum_{L \in \Sigma'} \text{GDELTA}_{I,L} \times \mathcal{D}^\lambda G_h(M_L, P_K) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

- 4) Calcul d'un terme de couplage par produit de "Gdelta*Noyau" par PDELTA qui est nécessairement actuellement une matrice assemblée (de masse sur Γ ou de relèvement sur $\Gamma \times \Omega_{\Gamma\Sigma}$)

$$B_{I,J} = \sum_{K \in \Gamma'} GD_{I,K} / GS_{I,K} \times \text{Pdelta}_{K,J} \quad (4.4)$$

ou par un vecteur pour un terme de couplage vectoriel

$$B_I = \sum_{K \in \Gamma'} G_{I,K} D / GS_{I,K} \times \text{Vect}_K \quad (4.5)$$

4.1.1. Définition de la structure de couplage

MKSDGN module `sdexplo`

Il s'agit de définir les éléments nécessaires au calcul des produits "Gdelta*Noyau" à l'aide d'une chaîne de caractères définie par une suite d'items séparés de virgules, chaque item étant de la forme `item=valeur` où `item` et `valeur` sont définies dans le tableau ci-dessous (attention les majuscules et minuscules sont significatives)

Item	Valeur
Domaine_Sigma	nom du domaine de couplage Σ (donnée obligatoire)
Domaine_Gamma	nom du domaine de représentation intégrale Γ (donnée obligatoire)

Nom_Gdelta	nom du terme représentant la matrice assemblée GDELTA ou des matrices élémentaires $Gdelta^{T'}$ pour les éléments T' parcourant Σ .
Niveau_Gdelta	niveau de ce terme.
Type_Gdelta	type réel ou complexe de ce terme. <i>Information inutile si le terme Gdelta est défini.</i>
Nom_Pdelta	nom du terme représentant la matrice assemblée PDELTA.
Niveau_Pdelta	niveau de ce terme.
Type_Pdelta	type réel ou complexe de ce terme. <i>Information inutile si le terme PDELTA est défini.</i>
Inconnue_Ligne_Sigma	nom de l'inconnue (déclaré par directive) de l'interpolation en ligne sur Σ .
Inconnue_Ligne_Gdelta	<i>idem</i>
Inconnue_Colonne_Sigma	nom de l'inconnue (déclaré par directive) de l'interpolation en colonne sur Σ .
Inconnue_Colonne_Gdelta	<i>idem</i>
Inconnue_Ligne_Noyau	<i>idem</i> <i>Ces dernières informations (Inconnue...) sont inutiles si le terme GDELTA est défini.</i>
Inconnue_Ligne_Gamma	nom de l'inconnue (déclaré par directive) de l'interpolation en colonne sur Γ .
Inconnue_Ligne_Pdelta	<i>idem</i>
Inconnue_Colonne_Noyau	<i>idem</i>
Inconnue_Colonne_Gamma	<i>inutile actuellement</i>
Inconnue_Colonne_Pdelta	<i>idem</i> <i>Ces dernières informations (Inconnue...) sont inutiles si le terme PDELTA est défini.</i>
Inconnue	nom commun aux 4 inconnues ci-dessus, lorsque qu'elles sont identiques.
Niveau_Noyau_Simple	niveau du tableau contenant les valeurs des noyaux de simple couche S^λ . Son nom est obligatoirement 'NoyauS'.
Niveau_Noyau_Double	niveau du tableau contenant les valeurs des noyaux de double couche D^λ . Son nom est obligatoirement 'NoyauD'.
Donnee_Lambda	nom de la donnée λ . <i>(Information inutile si les noyaux de Green discrets sont calculés préalablement au calcul du produit "Gdelta*Noyau".)</i>
Type_Green	type réel ou complexe de la fonction de Green <i>(Information inutile si les noyaux de Green discrets sont calculés préalablement.)</i>
Donnee 'i'	où 'i' $\in \mathbb{N}$, nom de la "i"-ème donnée nécessaire au calcul de la fonction de Green et valeur est le nom de cette donnée constante ou tableau. <i>(Ces 3 dernières informations sont inutiles si les noyaux de Green discrets sont calculés préalablement au calcul du produit "Gdelta*Noyau".)</i>



Dans la chaîne CHAINE, les blancs de part et d'autre du signe = sont ignorés, ainsi que les blancs suivant une virgule.



Les données redondantes sont inutilisées ; ainsi si la matrice Gdelta est connue, il est inutile de donner son type et ses inconnues associées. De même les données Donnee_Lambda et Donnee 'i' et Type_Green sont inutiles si les noyaux NoyauS et NoyauD ont été calculés préalablement.

• **SUBROUTINE MKSDGN** (NMGDNS,NVGDNS,NMGDND,NVGDND,CHAINE)

Les arguments de la procédure sont :

NMGDNS nom du terme "GDELTA*Noyau de simple couche"

NVGDNS son niveau

NMGDND nom du terme "GDELTA*Noyau de double couche"

NVGDND son niveau

CHAINE la chaîne de caractères défini ci-dessus

Toutes ces données sont optionnelles, mais l'ensemble des items donnés dans CHAINE doit être suffisant pour créer un terme "Gdelta*Noyau" :

Exemple 1 Calcul local, la matrice Gdelta étant connue sous forme d'un terme matrice élémentaire, le calcul des noyaux étant intégrés aux calculs des produits

```
CALL MKSDGN ('GDNOSI',1,'GDNODO',1
&           , 'Domaine_Sigma=SIGMA, Domaine_Gamma=GAMMA'
&           //' , Nom_Gdelta= Gdelta, Niveau_Gdelta= 3, Inconnue=PHI'
&           //' , Donnee_Lambda= LAMBDA, Type_Green= COMPLEXE'
&           //' , Donnee1= K')
```

Exemple 2 Calcul local, le calcul de la matrice Gdelta ainsi le calcul des noyaux étant intégrés aux calculs des produits

```
CALL MKSDGN ('GDNOSI',2,'GDNODO',2
&           , 'Domaine_Sigma=SIGMA, Domaine_Gamma=GAMMA'
&           //' , Inconnues=PHI, Type_Gdelta=REEL'
&           //' , Donnee_Lambda= LAMBDA, Type_Green= COMPLEXE'
&           //' , Donnee1= K')
```

Exemple 3 Calcul global, la matrice assemblée GDELTA étant donnée et le noyau de Green NoyauS calculé préalablement, et on effectue les calculs seulement pour le noyau de simple couche

```
CALL MKSDGN ('GDNOSI',3,' ',0
&           , 'Domaine_Sigma=SIGMA, Domaine_Gamma=GAMMA'
&           //' , Nom_Gdelta= GDELTA, Niveau_Gdelta= 4, Inconnue=PHI'
&           //' , Niveau_Noyau_Simple=1')
```

4.1.2. Calcul des termes Gdelta×Noyau

COGDNO module couplag

Il s'agit du calcul effectif d'un ou des termes matriciels $GS_{I,K}$ ou $GD_{I,K}$ qui peut être réalisé

- soit par produit de la matrice Gdelta de type matrice élémentaire par une matrice Noyau dont le calcul des coefficients est intégré au produit (cas qualifié de "STANDARD", procédures [COSLGN](#), [COSLNO](#), [COSLDN](#), [COGNRG](#))
- soit par produit de la matrice GDELTA assemblée de type élément finis standard par une matrice NoyauS ou NoyauD dont le calcul des coefficients est effectué préalablement (par exemple par appel à la procédure [CALNOY](#)) procédure [COMOPL](#).
- soit par un algorithme fourni par le développeur de l'application à l'aide d'une procédure [PRSOGN](#) et de la procédure [COGNRG](#).

- **SUBROUTINE COGDNO** (KPERSO, KLNOYO, NMGDNS, NVGDNS, NMGDND, NVGDND, NIVIMP)

Les arguments de la procédure sont :

KPERSO chaîne de caractère "STANDARD" lorsque l'on utilise les procédures de [MÉLINA](#).

une autre chaîne lorsque les calculs sont effectués au niveau élémentaire sur Σ et que le résultat est fourni par la procédure *utilisateur* [PRSOGN](#).

KLNOYO chaîne de caractère désignant le type de couplage 'DIRICHLET', 'NEUMANN' ou 'FOURIER'

NMGDNS nom du terme produit "GDELTA*Noyau de simple couche" ou la chaîne ' '

NVGDNS son niveau

NMGDND nom du terme produit "GDELTA*Noyau de double couche" ou la chaîne ' '

NVGDND son niveau

NIVIMP niveau d'impression des calculs.



On peut ne calculer qu'un seul des termes (NMGDNS, NVGDNS) ou (NMGDND, NVGDND). Pour ne calculer que le terme (NMGDNS, NVGDNS), il suffit de poser NMGDND=' '.

4.1.3. Calcul des termes matriciels de couplage

COGNOP module couplag

Il s'agit de calculer le produit d'une des matrices pleines résultat du produit d'une matrice Gdelta ou GDELTA par une matrice Noyau par une matrice éléments finis PDELTA ou de relèvement RDELTA assemblées, formule (4.4).

- **SUBROUTINE COGNOP** (NMGDNO, NVGDNO, NMPDEL, NVPDEL, NMCOUM, NVCOUM, NIVIMP)

Les arguments de la procédure sont :

NMGDNO nom d'un terme produit $G_{\text{delta}} * \text{Noyau}$ de simple ou double couche calculé à l'aide de **COGDNO**.
 NMGDNO son niveau
 NMPDEL nom de la matrice PDELTA (de masse sur Γ) ou RDELTA de relèvement de frontière intermédiaire Γ .
 NVPDEL son niveau
 NMCOUM nom de la matrice de couplage résultat.
 NVCOUM son niveau
 NIVIMP niveau d'impression

4.1.4. Calcul des termes vectoriels de couplage

MATVEC module **assembl**

Le calcul des termes vectoriels de couplage (produit d'une matrice " $G_{\text{delta}} * \text{Noyau}$ " par un vecteur), formule (4.5) est effectué à l'aide de la procédure standard de multiplication matrice \times vecteur (procédure **MATVEC**, voir module **assembl**)



On notera que les résultats intermédiaires du calcul sont des matrices pleines qui peuvent être de grande taille ; on prendra donc soin de les détruire lorsqu'elles sont devenues inutiles (cf. procédure **TBTUER**, librairie **allodyn**).

4.2. Termes de couplage : calcul direct

4.2.1. Calcul des termes matriciels de couplage

COUMAT module **couplag**

Ce calcul direct nécessite :

- que les valeurs nodales noyaux de Green ont été calculés préalablement (procédure **CALNOY**)
- la matrice GDELTA est un terme éléments finis assemblé sur le domaine de couplage Σ ou est un terme de relèvement (procédure **RELDIR**)
- dans le cas d'un couplage de type "NEUMANN" ou "FOURIER", que la frontière Σ est régulière (approximation d'une frontière \mathcal{C}^1 , par exemple).

Il s'agit de produire les termes matriciels de couplages (1.3), (1.4) ou (1.6) obtenus par multiplication de 3 matrices. Encore une fois c'est plus compliqué qu'il n'y paraît, les matrices 'éléments finis' sont en effet stockées sous forme compactée alors que la matrice des noyaux de Green est pleine. De plus la matrice de couplage issue du produit est de la même taille que les matrices noyaux, elle peut donc, au même titre, être découpée en morceaux (blocs de lignes).

- **SUBROUTINE COUMAT** (NMGDEL, NVGDEL, NOYAU, NVNOY, NBMORG, SAVGRE, NMPDEL, NVPDEL, NMCOUP, NVCOUP, NBCOUP, NIVIMP)

Les arguments de la procédure sont :

NMGDEL nom du terme éléments finis, premier opérande du produit (la matrice GDELTA dans le couplage FOURIER) ;
 NVGDEL son niveau ;
 NOYAU nom du tableau ou des tableaux des noyaux de Green opérande central du produit :
 ($\mathcal{D}^\lambda G_h(M_\ell, P_k)$ ou $\mathcal{S}^\lambda G_h(M_\ell, P_k)$ selon le terme (1.3) ou (1.4) dans l'exemple de la formulation FOURIER) ;
 ($\mathcal{D}^\infty G_h(M_\ell, P_k)$ ou $\mathcal{S}^\infty G_h(M_\ell, P_k)$ pour le terme (1.6) dans l'exemple de la formulation DIRICHLET).
 NVNOY son niveau, ou plutôt le niveau du premier tableau si NBMORG > 1 ;
 NBMORG nombre de morceaux du découpage des matrices contenant les noyaux de Green (doit être identique à l'argument de même nom lors de l'appel de **CALNOY**) ;
 SAVGRE chaîne de caractères indiquant la destruction (si SAVGRE = 'A MORT', attention aux majuscules) ou la sauvegarde (sinon) du ou des tableaux NOYAU ;
 NMPDEL nom du terme éléments finis 3^{ème} opérande du produit (la matrice PDELTA pour le 1^{er} terme de couplage (1.3), ou la matrice RDELTA pour le 2nd terme (1.4_I) de la formulation (F.R.I.))
 NVPDEL son niveau ;
 NMCOUM nom du terme de couplage produit (ou des termes produits en cas de découpe)
 NVCOUM son niveau, ou plutôt le niveau du premier terme si NBCOUM > 1 ;

NBCOUM nombre de sous-matrices produites (en cas de découpe) ;
 NIVIMP niveau d'impression du ou des termes de couplage produit.

Exemple Calcul des termes de couplage (1.3) et (1.4_I)

```
CALL COUMAT ('GDELTA',1,'NoyauD',1,1,'A MORT','PDELTA',1
&              , 'COUPL1',1,1,0)
CALL COUMAT ('GDELTA',1,'NoyauS',1,1,'A MORT','RDELTA',1
&              , 'COUPL2',1,1,0)
```



On suppose ici, dans ce deuxième appel que la matrice $RDELTA = a_{\Omega_{\Gamma}}(w_k, w_l)$ correspondant au relèvement sur la frontière intermédiaire a été calculée auparavant par un appel à la procédure [RELFRI](#).

4.2.2. Calcul des termes vectoriels de couplage

COUVEC module couplag

Cette procédure, en beaucoup de point analogue à la précédente permet de calculer le terme de couplage de second membre ((1.4_S) dans notre exemple). Il s'agit du produit matrice×matrice×vecteur, la première matrice étant le terme de masse GDELTA dans (1.4_S), la seconde la matrice des noyaux de Green, et le vecteur résultat du produit de la matrice PDELTA par le terme vectoriel de type valeurs nodales défini par la donnée de Neumann sur C (ou Γ qui coïncide avec C dans ce cas), voir la procédure d'assemblage [MATVEC](#) de la section **Calcul de termes vectoriels par multiplication matrice×vecteur**. On doit noter que dans l'exemple du problème de Helmholtz détaillé plus haut, ce calcul est déjà effectué pour le second membre 'éléments finis' issu de la donnée de Neumann sur $C : \int_C g \psi d\gamma$ dans $(F.S_N)_f$.

- SUBROUTINE COUVEC (NMGDEL,NVGDEL,NOYAU,NVNOY,NBMORG,SAVGRE,
 ,NMGAMM,NVGAMM,NMCOUP,NVCOUP,NIVIMP)

La plupart des arguments étant identiques à ceux de [COUMAT](#), on donne la description de ceux qui en sont distincts :

NOYAU nom du tableau ou des tableaux contenant les noyaux de Green de simple couche $S^\lambda G_h(M_\ell, P_k)$, dans l'exemple de la formulation FOURIER), opérande central du produit ;
 NMGAMM nom du terme éléments finis issu de la donnée de Neumann sur C ;
 NVGAMM son niveau ;
 NMCOUP nom du terme vectoriel de couplage de second membre ;
 NVCOUP son niveau ;
 NIVIMP niveau d'impression du terme de couplage produit.

Exemple Calcul du terme de couplage de second membre (1.4)

```
CALL MATVEC ('PDELTA',1,'DPHIn',1,'NEUGAM',1,0)
CALL COUVEC ('GDELTA',1,'NoyauS',1,1,'A MORT','NEUGAM',1
&              , 'COUPLS',1,1,0)
```

5. Reconstitution par représentation intégrale

La représentation intégrale permet, lorsqu'après résolution du problème (P) on connaît la solution dans Ω , de reconstituer la valeur de la solution en tout point du domaine extérieur $\check{\Omega}$ à l'aide de la formule

$$\varphi(M) = D_{\Gamma}(\varphi)(M) - S_{\Gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)(M) \quad (R.I.)$$

Les calculs sont en beaucoup de points analogues aux calculs des termes de couplage, mais en plus simple (il s'agit d'une autre version du calcul d'un produit matrice×vecteur, la matrice étant ici toujours pleine). Il existe 3 procédures pour le calcul de cette représentation qui sont d'utilisation différentes selon que l'ensemble des points où on effectue le calcul est un simple tableau ou un domaine géométrique et que le résultat doit être réutilisé dans le calcul (dans ce cas on doit calculer un terme) ou uniquement calculé pour un post-traitement (un tableau suffit alors). Les premières de ces procédures utilisent directement la procédure utilisateur **GREEN**, la dernière, conservée pour des raisons historiques, nécessite un appel préalable de la procédure **CALNOY** présentée plus haut, pour le calcul des noyaux de Green et est donc plus coûteuse en place-mémoire.

5.1. Cas d'un tableau de points

RICAL

- **SUBROUTINE RICAL** (TBPOIN, NVPOIN, NBCSTG, NMCSTG, NMVEC1, NVVEC1, NMVEC2, NVVEC2, NMREPI, NVREPI, NIVIMP)

On l'utilise pour créer un tableau de valeurs sur un ensemble de points T dont les coordonnées sont contenues dans un tableau simple. Cette procédure permet de calculer

$$V_3(M) = \int_{\Gamma} V_1(P) \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) - V_2(P) G(M, P) d\gamma_P \quad \forall M \in T$$

sous la forme

$$V_3(M) = \sum_j \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}}(M, P_j) DV_1(P_j) - G_h(M, P_j) SV_2(P_j)$$

où

$$DV_1(P_j) = \sum_k V_1(P_k) \int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma \quad \text{et} \quad SV_2(P_j) = \sum_k V_2(P_k) \int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma$$

sont calculés à l'aide de la procédure **MATVEC**, module **assembl** par exemple, le calcul de la fonction de Green étant fourni par la procédure 'utilisateur' **GREEN**. Les arguments sont

TBPOIN nom du tableau contenant les coordonnées des points ;
 NVPOIN son niveau ;
 NBCSTG nombre de constantes nécessaires au calcul de la fonction de Green ;
 NMCSTG tableau de caractères contenant les noms des constantes ;
 NMVEC1 nom du terme contenant les valeurs nodales du potentiel de double couche DV_1 calculé sur Γ (il s'agit d'un terme défini sur Γ) ;
 NVVEC1 son niveau ;
 NMVEC2 nom du terme contenant les valeurs nodales du potentiel de simple couche SV_2 calculé sur Γ ;
 NVVEC2 son niveau ;
 NMREPI nom du **tableau** V_3 contenant en sortie les valeurs de la représentation intégrale sur l'ensemble des points T ;
 NVREPI son niveau ;
 NIVIMP niveau d'impression en cours du calcul.

5.2. Cas d'un domaine géométrique

CALRI, REPINT

- **SUBROUTINE CALRI** (NMDORP, GAMMA, TYNOYO, NBCSTG, NMCSTG, NMLAMB, NMCST1, NMVEC1, NVVEC1, NMCST2, NMVEC2, NVVEC2, NMREPI, NVREPI, NIVIMP, TYPDER)

où cette fois les points où sont calculés les valeurs de la représentation intégrale sont les nœuds d'un domaine géométrique D défini dans le fichier de maillage. Il est possible de calculer soit les valeurs de la représentation intégrale, soit ses dérivées :

$$V_3(M) = c_1 \int_{\Gamma} V_1(P) G(M, P) d\gamma_P + c_2 \int_{\Gamma} V_2(P) \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) d\gamma_P, \forall M \in D$$

soit sa dérivée normale sur D

$$V_3(M) = c_1 \int_{\Gamma} V_1(P) \mathcal{S}^0 G(M, P) d\gamma_P + c_2 \int_{\Gamma} V_2(P) \mathcal{D}^0 G(M, P) d\gamma_P, \forall M \in D$$

soit la combinaison $\frac{\partial}{\partial n} + \lambda$ sur D

$$V_3(M) = c_1 \int_{\Gamma} V_1(P) \mathcal{S}^{\lambda} G(M, P) d\gamma_P + c_2 \int_{\Gamma} V_2(P) \mathcal{D}^{\lambda} G(M, P) d\gamma_P, \forall M \in D$$

Les arguments différents de ceux de la procédure précédente sont

NMDORP nom du domaine géométrique support de la représentation intégrale ;
 GAMMA frontière sur laquelle est effectué le calcul ;
 TYNOYO type de calcul ('DIRICHLET', 'NEUMANN', 'FOURIER') ;
 NMLAMB nom de la constante λ pour un noyau de Fourier ;
 NMCST1 nom de la constante c_1 ;
 NMCST2 nom de la constante c_2 ;
 TYPDER type de la dérivée calculée.

- **SUBROUTINE REPINT** (NMDORP, NOYAU, NVNOY, NBMORG, NMVECT, NVVECT, NMREPI, NVREPI, NIVIMP)

La formule de représentation intégrale utilise les noyaux de Green G et $\frac{\partial G}{\partial n_P}$ du même type que les termes de couplage de la formulation dite de Dirichlet. La procédure suivante doit donc être précédée d'un appel à **CALNOY** (avec l'argument 'DIRICHLET') pour le domaine d'intégration (par exemple Γ) sur lequel est évaluée ($R.I.$) et le domaine géométrique sur lequel on reconstitue la solution.

La procédure **REPINT** ne fournit qu'un des 2 termes de la formule de représentation intégrale ; il doit donc être appelé deux fois (avec des arguments différents !) et les deux termes produits doivent ensuite être combinés linéairement. Dans l'appel de cette procédure l'ensemble des points où l'on calcule la représentation intégrale (souvent une surface ou une courbe extérieure à Σ) doit être défini comme un domaine géométrique défini dans le fichier de maillage.

Les arguments ont un air de famille certain avec ceux des procédures de calcul des termes de couplage, excepté le premier

NMDORP nom du domaine géométrique contenant les points où l'on calcule la représentation intégrale ;
 NOYAU nom du tableau contenant les noyaux de Green ;
 NVNOY son niveau ;
 NBMORG nombre de morceaux de matrice de valeurs de la fonction de Green (voir la procédure **CALNOY** ;
 NMVECT nom du terme vectoriel contenant selon le potentiel (simple ou double couche) calculé, la valeur de la solution ou de sa dérivée normale ;
 NVVECT son niveau ;
 NMREPI nom du terme résultat ;
 NVREPI son niveau ;
 NIVIMP niveau d'impression du terme produit.

Exemple 1 Calcul de la représentation ($R.I.$) sur Σ dans le cas $(F.S.)_N$

$$\varphi_{ri}(M) = \int_{\Gamma} \varphi(P) \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) d\gamma_P - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(P) G(M, P) d\gamma_P$$

calculé sous la forme

$$\sum_{j,k} \mathcal{D}G_h(M, P_k) \left(\int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma \right) \varphi(P_j) - \sum_{j,k} \mathcal{S}G_h(M, P_k) \left(\int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(P_j)$$

```

*   La solution est dans le vecteur 'PHI',1
    CALL MATVEC ('PDELTA',1,'PHI',1,'PHIGAM',1,0)
    CALL CALNOY ('Sigma','Gamma',1,'DIRICHLET',1,'k',' ',
&               'NoyauS',2,'NoyauD',2)
    CALL REPINT ('Sigma','NoyauD',2,1,'PHIGAM',1,'DOUBLE',1,0)
*   Le terme 'NEUGAM',1 est déjà calculé par ailleurs
    CALL REPINT ('Sigma','NoyauS',2,1,'NEUGAM',1,'SIMPLE',1,0)
*   Calcul de 'PHIREC' = 'DOUBLE' - 'SIMPLE'
    CALL SOTERM ('DOUBLE',1,' ', 'SIMPLE',1,' ', 'PHIREC',1,0)
    CALL TBTUER ('NoyauS',2)
    CALL TBTUER ('NoyauD',2)

```

où on a noté

PDELTA la matrice $\{\int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma\}_{k,j}$ et PHI le vecteur nodal $\{\varphi(P_j)\}_j$

PHIGAM le vecteur nodal $\{\sum_j \varphi(P_j) \int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma\}_k$

NEUGAM le vecteur nodal $\{\sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial n_{\Gamma}}(P_j) \int_{\Gamma} w_k w_j d\gamma\}_k$

On peut alors, par exemple, comparer le terme obtenu avec la valeur de la solution sur Σ .

Exemple 2 Calcul de la représentation (R.I.) sur Σ dans le cas (F.R.I) Il suffit de remplacer dans la portion de programme ci-dessus le calcul de 'NEUGAM' et de 'DOUBLE' par

```

CALL MATVEC ('RDELTA',1,'PHI',1,'PHIGAM',2,0)
...
CALL REPINT ('Sigma','NoyauS',2,1,'PHIGAM',2,'DOUBLE',2,0)

```



On suppose dans ce deuxième appel que la matrice $a_{\Omega_{\Gamma\Sigma}}(w_k, w_j)$ correspondant au relèvement sur la frontière intermédiaire a été calculé précédemment (voir la procédure [RELFRI](#)).

6. Procédure 'utilisateur' PRSOGN

Il s'agit d'une procédure programmée par le développeur d'une application lorsque le calcul des termes de couplage ne peut être effectué à l'aide des procédures de couplage standard de MÉLINA. Cette procédure nécessite un grand nombre d'informations car les calculs sont effectués localement sur chaque élément de la frontière de couplage Σ . On voit donc ici apparaître des données très internes des structures de MÉLINA ; elles ne sont pas forcément nécessaires dans toutes les applications mais la liste qui suit doit permettre le calcul dans tous les cas.

- **SUBROUTINE PRSOGN** (KPERO,NDIM,KLNOYO,LAMBDA,CONGRE,TYTBAS,MCTBAS, ISYMGR,TSYMGR,PSYMGR,NDLGAM,CORGAM,NDNOGA,NORGAM,ELTSIG,NUTSIG,NBNSIG,CORSIG,NUTSIC,NBNSIC,CORSIC,NDNOSI,NORSIC,NUTSIL,NBNSIL,TYNOYO,MCNOY1,MCNOY2,TYGDNO,TBGDNO,TBGDND,RST,CST,PREFIX,NIVESP,NIVIMP,IMPFCH)

Les arguments d'entrée de la procédure sont

- KPERO chaîne de caractère argument d'entrée de la procédure COGDNO à la discrétion de l'utilisateur, mais nécessairement différente de 'STANDARD'.
- NDIM dimension d'espace.
- KLNOYO chaîne de caractères désignant le type de couplage ('DIRICHLET', 'NEUMANN', 'FOURIER' ou une autre chaîne, dans le cas où on utilise la procédure PRSONO dans le cas KPERO='STANDARD').
- LAMBDA valeur complexe de la constante λ dans le cas d'un couplage 'FOURIER'.
- CONGRE tableau complexe contenant les valeurs des constantes nécessaires au calcul de la fonction de Green (résulte de l'exploitation de la structure de couplage).
- TYTBAS type (réel ou complexe) du tableau associé au calcul de la fonction de Green (le cas échéant).
- MCTBAS son adresse.
- ISYMGR indicateur entier de symétries/antisymétries (définies par directive)
- TSYMGR tableau entier définissant les symétries/antisymétries.
- PSYMGR tableau réel de travail de dimension NDIM de calcul des points symétriques.
- NDLGAM nombre de colonnes de la matrice de couplage = nombre de d.l. sur Γ (correspond aux d.l. K des formules (4.2) ou (1.3)).
- CORGAM tableau des coordonnées de nœuds de Γ .
- NDNOGA indicateur de présence (NDNOGA=NDIM), ou non (NDNOGA=0), du tableau des normales aux nœuds de Γ .
- NORGAM tableau des composantes des normales aux nœuds de Γ .
- ELTSIG numéro de l'élément courant de Σ (pour information).
- NUTSIG numéro de type géométrique de l'élément courant de Σ (pour les calculs géométriques : matrice jacobienne,etc.)
- NBNSIG nombre de points de l'élément courant de Σ .
- CORSIG coordonnées des points de l'élément courant de Σ (interpolation géométrique).
- NUTSIC numéro de type de l'élément courant de Σ pour l'interpolation en colonne (correspond aux d.l. l des formules (4.2) ou (1.3)).
- NBNSIC nombre de nœuds de l'élément courant de Σ pour l'interpolation en colonne (d.l. l).
- CORSIC coordonnées des nœuds de l'élément courant de Σ pour l'interpolation en colonne.
- NDNOSI indicateur de présence NDNOSI=NDIM ou non NDNOSI=0 du tableau des normales aux nœuds de Σ (couplage 'Fourier').
- NORSIC tableau des composantes des normales aux nœuds de l'élément courant de Σ .
- NUTSIL numéro de type de l'élément courant de Σ pour l'interpolation en ligne (correspond aux d.l. i de la formule (4.2) ou (1.3)).
- NBNSIL nombre de nœuds de l'élément courant de Σ pour l'interpolation en ligne (d.l. i).
- TYNOYO type réel ou complexe des matrices noyaux.
- MCNOY1 adresse dans le super-tableau du type TYNOYO d'un tableau de travail de longueur NDLGAM*NBNSIC pour le calcul des noyaux locaux de simple couche $\mathcal{S}_{T',G_h}^\lambda(M_l, P_k)$.
- MCNOY2 adresse dans le super-tableau du type TYNOYO d'un tableau de travail de longueur NDLGAM*NBNSIC pour le calcul des noyaux locaux de double couche $\mathcal{D}_{T',G_h}^\lambda(M_l, P_k)$.
- TYGDNO type (réel ou complexe) des termes résultats
- RST super-tableau version réelle.
- CST super-tableau version complexe.
- PREFIX tableau de chaînes de caractères indicateur des procédures traversées.

NIVESP niveau de la procédure traversée.

NIVIMP niveau d'impression des calculs.

IMPFCH numéro d'unité logique du fichier d'impression.

Les arguments de sortie de la procédure sont

TBGDNS tableau déclaré COMPLEX TBGDNS(NBNSIL,NDLGAM) récepteur du produit résultat $G_{\text{delta}_{i,l}} \times \mathcal{S}^\lambda G_{l,k}$
où $\mathcal{S}^\lambda G$ désigne le noyau de simple couche (4.2).

TBGDND tableau déclaré COMPLEX TBGDNS(NBNSIL,NDLGAM) récepteur du produit résultat $G_{\text{delta}_{i,l}} \times \mathcal{D}^\lambda G_{l,k}$
où $\mathcal{D}^\lambda G$ désigne le noyau de double couche (4.3).

7. Procédure 'utilisateur' GREEN

Il s'agit du calcul des valeurs de la fonction de Green et le cas échéant de ses dérivées. Le code contient les modules de calculs des fonctions de Green suivantes

- Opérateur de Helmholtz en 2D et 3D (bibliothèques **appl_helmz2d** et **appl_helmz3d**) ;
- Opérateur de Helmholtz en axisymétrique en 3D (coefficients de Fourier du cas précédent) ;
- Opérateur du mouvement sur houle (ou tenue à la mer) en 2D et 3D (bibliothèques **appl_houle2d** et **appl_houle3d**) ;
- Opérateur de Neuman–Kelvin (Résistance de vagues) en 2D et 3D (bibliothèques **appl_rw2d** et **appl_rw3d**) ;
- Opérateur de Maxwell en 3D (bibliothèque **appl_maxwl3d**) ;
- Certains problèmes de guides d'ondes ou d'optique intégrée (opérateur de Maxwell avec dépendance périodique dans une direction).

Le calcul des valeurs nodales des noyaux de Green est effectué par appel de la procédure

- **SUBROUTINE GREEN** (TYNOYO, TABCSG, CORP, CORM, E, TABASS)

dont les arguments sont

TYNOYO type de noyau

dirichlet : calcul de $G(M, P)$ et $\frac{\partial G}{\partial x_{iM}}(M, P)$

neuman : calcul de $\frac{\partial G}{\partial x_{iP}}(M, P)$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial x_{iP} \partial x_{jM}}(M, P)$

fourier : calcul de $G(M, P)$, $\frac{\partial G}{\partial x_{iM}}(M, P)$, $\frac{\partial G}{\partial x_{iP}}(M, P)$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial x_{iP} \partial x_{jM}}(M, P)$

TABCSG tableau déclaré complexe contenant les valeurs des constantes associées au calcul de la fonction de Green ;

CORP coordonnées du point P (parcourant Γ) ;

CORM coordonnées du point M (parcourant Σ) ;

E tableau déclaré complexe récepteur des résultats décrits ci-dessus ;

TABASS tableau déclaré complexe associé au calcul de la fonction de Green à la discrétion de l'utilisateur.

Annexe 1. Index des procédures

Procédure	Objet	Page
CALNOY	calcul des noyaux de Green	6
RELFRI	terme de relèvement de frontière intermédiaire	8
RELDIR	terme de relèvement de couplage Dirichlet	8
MKSDGN	structure de couplage pour les produits $G_{\text{delta}} \times \text{Noyau}$	10
COGDNO	calcul des produits $G_{\text{delta}} \times \text{Noyau}$	11
COGNOP	calcul des produits $(G_{\text{delta}} * \text{Noyau}) \times P_{\text{DELTA}}$	12
COUMAT	terme matriciels de couplage	12
COUVEC	termes vectoriels de couplage	13
RICAL	représentation intégrale calculée pour un tableau de coordonnées	14
CALRI	représentation intégrale calculée sur un domaine	14
REPINT	représentation intégrale calculée sur un domaine géométrique	15
PRSOGN	procédure utilisateur de calcul des produits $G_{\text{delta}} \times \text{Noyau}$	17
GREEN	fonction de Green, procédure utilisateur	19

Tables des matières

1. La méthode de couplage	1
1.1. Le problème modèle	1
1.2. La représentation intégrale	1
1.3. Problème posé en domaine borné	1
1.3.1. Formulation variationnelle : Couplage 'Fourier'	2
1.3.2. Formulation variationnelle : Couplage 'Dirichlet'	3
1.4. Les termes de couplage	4
1.4.1. Cas d'une frontière de couplage régulière : calcul dit global sur Σ	4
1.4.2. Discrétisation et notations	4
1.4.3. Cas d'un calcul dit local sur Σ	5
2. Calcul des noyaux de Green discrets	6
3. Calcul de termes de relèvement	8
3.1. Cas d'un relèvement de frontière intermédiaire	8
RELFR module couplag	8
3.2. Cas d'un terme de relèvement de couplage Dirichlet	8
RELDIR module couplag	8
4. Calcul des termes de couplage	9
4.1. Termes de couplage calculés à l'aide de la structure de couplage	9
4.1.1. Définition de la structure de couplage	9
MKSDGN module sdxplo	9
4.1.2. Calcul des termes $G_{\text{delta}} \times \text{Noyau}$	11
COGDNO module couplag	11
4.1.3. Calcul des termes matriciels de couplage	11
COGNOP module couplag	11
4.1.4. Calcul des termes termes vectoriels de couplage	12
MATVEC module assembl	12
4.2. Termes de couplage : calcul direct	12
4.2.1. Calcul des termes matriciels de couplage	12
COUMAT module couplag	12
4.2.2. Calcul des termes termes vectoriels de couplage	13
COUVEC module couplag	13
5. Reconstitution par représentation intégrale	14
5.1. Cas d'un tableau de points	14
RICAL	14
5.2. Cas d'un domaine géométrique	14
CALRI,REPINT	14
6. Procédure 'utilisateur' PRSOGN	17
7. Procédure 'utilisateur' GREEN	19

Annexe 1. Index des procédures	A₁. 1
---------------------------------------	-------------------------